

DOI: 10.7511/jslx20230630001

超定法计算多复合材料切口尖端热流奇异场

姚善龙^{*1,2}, 赵光鹏¹, 张 建¹, 张志梅³

(1. 广西大学 土木建筑工程学院, 南宁 530004; 2. 广西大学 工程力学研究中心, 南宁 530004;
3. 合浦县中等职业技术学校, 北海 536100)

摘 要: 建立一种分析多复合材料平面切口尖端热流密度奇异性的有效方法, 再将奇性特征分析结果与有限元法相结合, 确定多复合材料切口尖端热学奇异物理场。首先, 基于切口尖端物理场的 Williams 级数展开式, 推导多复合材料切口热传导奇性特征方程, 数值求解此特征方程后获得切口尖端物理场渐近展开式的奇性指数、特征角函数及其各阶导数。其次, 利用稀疏有限元网格初步计算切口尖端附近的温变场, 将有限元计算结果与奇性特征分析结果相结合, 构建超定方程组, 计算切口尖端邻域的物理场渐近展开式的幅值系数, 进而确定切口尖端邻域的温变场和奇异热流密度。本文方法基于稀疏网格有限元计算结果, 获得多复合材料切口尖端较高精度的奇异物理场, 摆脱常规有限元法在计算切口尖端奇异场时对稠密网格的依赖, 提高计算效率。

关键词: 切口; 多复合材料; 奇异热流密度; 超定方程

中图分类号: O343

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2024)06-1103-07

1 引 言

复合材料在各个领域中得到广泛应用, 如在航天航空领域中, 复合材料是飞机制造的重要力学结构材料^[1]。切口普遍存在于各类复合材料结构当中。由于切口处的几何形状突变, 热通量等受到干扰而产生不均匀性, 导致热流、应力等物理量在切口尖端处产生严重的奇异性^[2-3]。这使得切口尖端处容易萌生裂纹, 大大降低结构的强度, 甚至造成结构失效。切口尖端处的奇异性指数、奇异物理场是预测切口断裂行为的重要参数, 因此获取并研究切口尖端邻域的奇性特征和奇异物理场具有重要意义。

切口结构因受到热荷载作用而发生断裂的问题是结构安全评估的重要内容。裂纹相对于切口而言, 由于张开角为零的特点能给对裂纹的研究带来一些便利, 裂纹尖端的热传导、热断裂问题受更多学者关注^[4-8]。切口尖端处的奇异物理场相对而言更为复杂。Svolos 等^[9]利用相场断裂法分析了单一各向同性材料切口尖端附近的热传导问题。

Sun 等^[10]将近场动力学和有限元相结合提出了一种新方法, 分析了单材料切口在机械荷载和热荷载作用下切口尖端处裂纹萌生与裂纹扩展行为。基于特征函数展开法, Penado^[11]给出了热荷载作用下双正交各向异性材料切口尖端处的位移场和奇异应力场。周震寰等^[12]基于哈密顿法对多材料界面 V 型切口在弯曲时尖端处的应力奇异性进行了研究, 并引入了新定义的广义应力强度因子对切口断裂行为进行评估。由于结构的复杂性, 往往难以获得多材料切口等粘接结构奇异物理场的解析解。碍于切口或裂纹尖端处的奇异性, 常规数值方法也难以模拟切口或裂纹尖端邻域高梯度变化的物理场, 为此, 不少学者尝试在尖端处开发能反映奇异性的特殊奇异单元^[13-14]。但鉴于多材料切口或裂纹尖端奇异性的复杂性, 目前较难将在切口尖端设置奇异单元的想法应用于多材料切口结构。针对多复合材料 V 形切口奇异性分析问题, 以往的文献多基于各向异性弹性 Stroh 格式和传递矩阵的概念^[15]。

本文提出一种结合多复合材料奇性特征分析

收稿日期: 2023-06-30; 修改稿收到日期: 2023-08-07.

基金项目: 广西自然科学基金(2023GXNSFBA026064); 国家自然科学基金(52168015)资助项目.

作者简介: 姚善龙^{*} (1989-), 男, 博士, 讲师, 硕士生导师(E-mail: yaoshanlong@gxu.edu.cn).

引用本文: 姚善龙, 赵光鹏, 张 建, 等. 超定法计算多复合材料切口尖端热流奇异场[J]. 计算力学学报, 2024, 41(6): 1103-1109.

YAO Shan-long, ZHAO Guang-peng, ZHANG Jian, et al. Calculation of singular field near the tip of a multi-material notch under thermal load with an over-determined method[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2024, 41(6): 1103-1109.

与有限元分析的半解析方法,致力于计算多复合材料 V 型切口尖端各阶广义热流强度因子,确定切口尖端邻域的温变场和奇异热流密度。该方法基于远离切口尖端温变场的有限元计算结果,因而无需在切口尖端附近划分稠密的网格或设置特殊的奇异单元。

2 切口尖端热流密度奇异特征分析

本文将研究由 M 种复合材料粘结构成的 V 型切口结构,如图 1 所示。 $\Omega_m (m=1,2,\dots,M)$ 表示第 m 个子区域;相邻的两个子域结合形成的材料界面记为 Γ_m ; Γ_0 和 Γ_M 是切口端面。以切口尖端为原点建立笛卡尔直角坐标系 oxy 和极坐标系 $or\theta$ 。

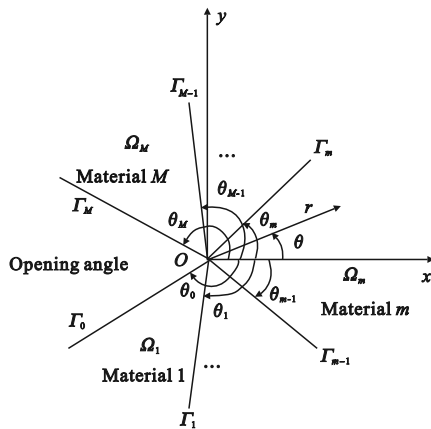


图 1 多材料 V 型切口
Fig. 1 Schematic of a multi-material V-notch

在复合材料的材料主轴系下,热流密度 q 与温变值 T 的关系可表示为

$$\begin{Bmatrix} q_{x_1}^{(m)} \\ q_{x_2}^{(m)} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \kappa_{11}^{(m)} & \kappa_{12}^{(m)} \\ \kappa_{21}^{(m)} & \kappa_{22}^{(m)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x_1} \\ \frac{\partial T}{\partial x_2} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

式中 x_1 和 x_2 为复合材料的主轴方向, $[\kappa^{(m)}]$ 为材料主轴方向上的热传导系数。根据坐标变换关系,式(1)可改写为在极坐标系 $or\theta$ 下的等式,

$$\begin{Bmatrix} q_r^{(m)} \\ q_\theta^{(m)} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{\kappa}_{11}^{(m)} & \bar{\kappa}_{12}^{(m)} \\ \bar{\kappa}_{21}^{(m)} & \bar{\kappa}_{22}^{(m)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial r} \\ \frac{\partial T}{r\partial\theta} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

式中 q_r 和 q_θ 分别为沿径向和周向的热流密度分量; $[\bar{\kappa}^{(m)}]$ 与 $[\kappa^{(m)}]$ 的转换关系为

$$[\bar{\kappa}^{(m)}] = [C][\kappa^{(m)}][C]^T \quad (3)$$

式中

$$[C] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (4)$$

多材料切口尖端邻域各子域的温变值可用 Williams 级数展开式表达^[16],即

$$T = \sum_{k=1}^N A_k r^{\lambda_k} \tilde{T}_k(\lambda_k, \theta) \quad (5)$$

式中 r 为距切口尖端奇异点的径向距离, N 为截取的级数项数, A_k 为幅值系数,也称为广义热流密度强度因子, λ_k 为反映切口尖端热流密度奇异性的奇性指数, $\tilde{T}_k(\lambda_k, \theta)$ 是与 λ_k 相对应的温变值的特征角函数。

若考虑无热源的稳态热传导问题,在切口各个子域内应满足如下 Fourier 稳态热传导方程

$$\frac{\partial q_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} + \frac{q_r}{r} = 0 \quad (6)$$

将式(5)代入式(2),再将热流密度分量代入式(6),可得多材料 V 型切口平面问题的热流奇性特征分析的特征方程组

$$\bar{g}_{T_k}^{(m)} = \lambda_k \tilde{T}_k^{(m)} \quad (7a)$$

$$\bar{\kappa}_{22}^{(m)} \tilde{T}_k''^{(m)} + \bar{\kappa}_{22}^{(m)} \tilde{T}_k'^{(m)} + (\bar{\kappa}_{12}^{(m)} + \bar{\kappa}_{21}^{(m)}) \lambda_k \tilde{T}_k'^{(m)} + \bar{\kappa}_{21}^{(m)} \lambda_k \tilde{T}_k^{(m)} + \bar{\kappa}_{11}^{(m)} \lambda_k \bar{g}_{T_k}^{(m)} = 0 \quad (7b)$$

式中 $(\dots)'$ 和 $(\dots)''$ 分别表示对坐标 θ 的一阶导数和二阶导数。

将切口的端面 Γ_0 和 Γ_M 处的边界条件考虑为绝热,并假设各个子域在界面处理理想结合。所以,切口端面边界条件和材料界面连续条件可表示为

$$q_\theta^{(1)}|_{\theta=\theta_1} = 0 \quad (8a)$$

$$T^{(m)}|_{\theta=\theta_m} = T^{(m+1)}|_{\theta=\theta_m} \quad (8b)$$

$$q_\theta^{(m)}|_{\theta=\theta_m} = q_\theta^{(m+1)}|_{\theta=\theta_m} \quad (8c)$$

$$q_\theta^{(M)}|_{\theta=\theta_M} = 0 \quad (8d)$$

考虑到切口尖端温变值的级数展开式(5)和式(2)的热流密度分量,式(8)的边界条件和连续条件可以改写为关于奇性指数和特征角函数的方程

$$\bar{\kappa}_{22}^{(1)} \tilde{T}_k'^{(1)} + \lambda_k \bar{\kappa}_{21}^{(1)} \tilde{T}_k^{(1)} = 0 \quad (9a)$$

$$\tilde{T}_k^{(m)} - \tilde{T}_k^{(m+1)} = 0 \quad (9b)$$

$$\bar{\kappa}_{22}^{(m)} \tilde{T}_k'^{(m)} + \lambda_k \bar{\kappa}_{21}^{(m)} \tilde{T}_k^{(m)} - (\bar{\kappa}_{22}^{(m+1)} \tilde{T}_k'^{(m+1)} + \lambda_k \bar{\kappa}_{21}^{(m+1)} \tilde{T}_k^{(m+1)}) = 0 \quad (9c)$$

$$\bar{\kappa}_{22}^{(M)} \tilde{T}_k'^{(M)} + \lambda_k \bar{\kappa}_{21}^{(M)} \tilde{T}_k^{(M)} = 0 \quad (9d)$$

至此,静态多材料平面切口热流奇性特征分析问题转化为求解一组特征方程组在边界条件下的特征值问题。利用插值矩阵法^[17]进行数值求解特征方程后,可获得特征值 λ_k 和特征角函数 $\tilde{T}_k(\theta)$ 。

3 切口尖端广义热流密度强度因子计算

由式(5),切口尖端附近的温变值可写成矩阵形式

$$\{T\}_{n \times 1} = [D]_{n \times 2N} \{A_T\}_{2N \times 1} \quad (10)$$

式中 矩阵 $[D]_{n \times 2N}$ 是包含各阶奇性指数和相应特征角函数的系数矩阵,其可由第2节的奇性特征分析确定。

利用有限元法模拟分析含有V型切口的结构后,可获得距离切口尖端一定距离的 n 个节点的温变值 $\{T\}_{n \times 1}$ 。至此,式(10)的 $\{T\}_{n \times 1}$ 和 $[D]_{n \times 2N}$ 均为已知量, $\{A_T\}_{2N \times 1}$ 为未知量。当 $n > 2N$ 时,方程组(10)的方程数大于未知量个数,方程组成为超定方程。根据最小二乘法,超定方程式(10)存在超定解

$$\{A_T\} = ([D]^T [D])^{-1} [D]^T \{T\} \quad (11)$$

当广义热流密度强度因子 A_k 确定后,V型切口尖端邻域的温变场和热流密度分量可分别由式(5)和式(2)确定。

4 算例与结果分析

4.1 双复合材料V型切口

本算例以图2所示的双复合材料V型切口结构为对象,分析切口的奇性特征,计算广义热流强度因子,验证本文方法的有效性。子域 Ω_1 中的材料考虑为某种正交各向异性材料,热传导系数设为 $\kappa_1^{(1)} = 10 \text{ W/m/K}$ 、 $\kappa_2^{(1)} = 15 \text{ W/m/K}$ 。子域 Ω_2 的材料热传导系数满足关系 $\kappa_1^{(2)}/\kappa_1^{(1)} = \kappa_2^{(2)}/\kappa_2^{(1)}$ 。材料主轴 x_1 绕垂直于 xy 平面的 z 轴由 x 轴正方向向 y 轴正方向旋转的角度记为 φ 。

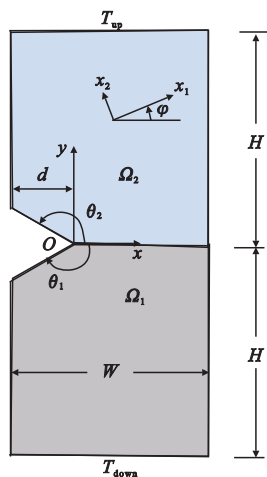


图2 双复合材料V型切口

Fig. 2 A notch consisted of two orthotropic materials

表1 双正交各向异性材料切口热流密度奇性指数
Tab.1 Heat flux singularity orders for an orthotropic bi-material notch

$\theta_2 / (^\circ)$	Methods	$\kappa_1^{(2)}/\kappa_1^{(1)}$		
		1	5	10
90	Present	-1.00000	-1.00000	-1.00000
	Ref. [18]	-1.00000	/	/
105	Present	-0.16796	-0.16796	-0.16796
	Ref. [18]	-0.16796	/	/
120	Present	-0.28152	-0.28152	-0.28152
	Ref. [18]	-0.28152	/	/
135	Present	-0.36065	-0.36065	-0.36065
	Ref. [18]	-0.36065	/	/
150	Present	-0.41846	-0.41846	-0.41846
	Ref. [18]	-0.41846	/	/
165	Present	-0.46320	-0.46320	-0.46320
	Ref. [18]	-0.46320	/	/
180	Present	-0.50000	-0.50000	-0.50000
	Ref. [18]	-0.50000	/	/

表1列出了双复合材料V型切口的热流密度奇性指数,其中 $\theta_2 = -\theta_1, \varphi = 0$ 。由式(2,5)可知,当奇性指数 $\lambda_k - 1$ 大于-1.0而小于0时热流密度发生奇异。因此,表1只列出了在 $[-1, 0]$ 区间内的奇性指数。Mantić等^[18]给出了单材料V型切口的热流密度奇性指数的解析表达式。由表1可以看到,本文的计算结果与文献[18]的结果能很好吻合。同时,表1的计算结果显示,当 $\theta_2 = -\theta_1$ 时,双材料切口的热流密度奇性指数不受两种材料的参数比值 $\kappa_1^{(2)}/\kappa_1^{(1)}$ 影响。通过观察图3也可以发现,当 $\theta_2 = 165^\circ (\theta_2 = -\theta_1)$ 时,切口的热流密度奇性指数不随 $\kappa_1^{(2)}/\kappa_1^{(1)}$ 变化而改变。但当 $\theta_2 < 165^\circ$ 时,两种材料的参数差异越大,双材料切口的热流密度奇性指数越小,奇异性越强;当 $\theta_2 > 165^\circ$,奇异性随 $\kappa_1^{(2)}/\kappa_1^{(1)}$ 的变化趋势与前者相反。

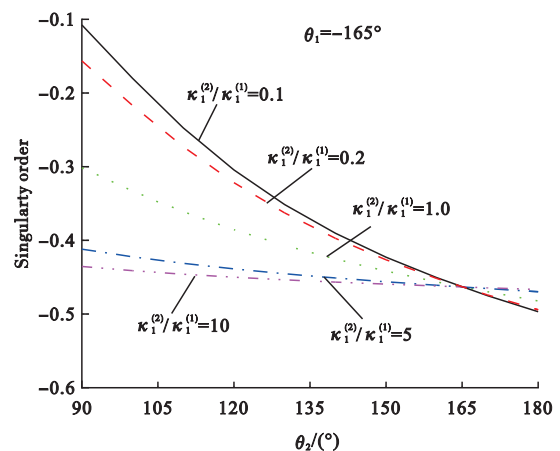


图3 热流密度奇性指数随双复合材料平面切口角度的变化
Fig. 3 Variation of singularity orders as a function of the notch angle θ_2 in the case of an orthotropic bi-material V-notch

材料主轴方向对双复合材料 V 型切口热流密度奇异性的影响如图 4 所示。从图 4 可以看出,复合材料的主轴方向对不同的双材料切口尖端的热流密度奇异性的影响有所不同。

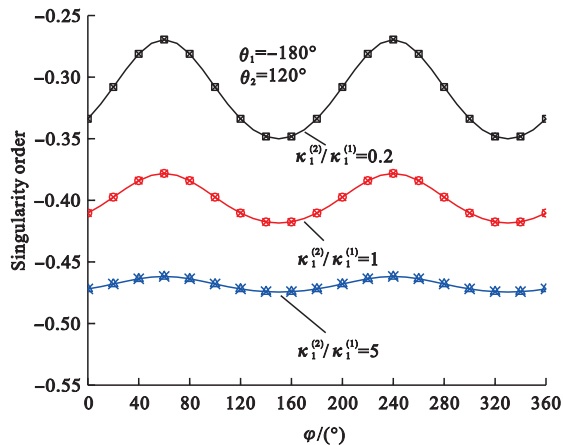


图 4 材料主轴对双复合材料切口的热流密度奇性指数的影响
Fig. 4 Variations of singularity orders as a function of the material orientation angle φ for an orthotropic bi-material notch

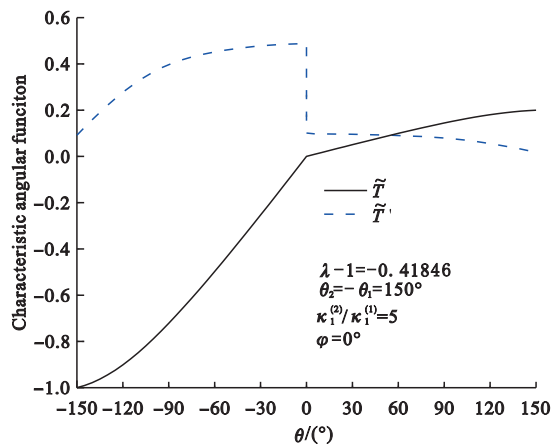


图 5 双材料切口热流奇性特征角函数
Fig. 5 Characteristic angular functions for a bi-material notch

图 5 给出了当 $\theta_2 = -\theta_1 = 150^\circ$ 时,双复合材料切口的第一阶热流密度奇性指数对应的特征角函数及其一阶导数。

将切口的热流密度奇性指数和特征角函数与有限元法的初步结果相结合,利用本文的超定法计算切口尖端的温变场级数表达式的各阶幅值系数 A_k 和热流密度分量。本文采用有限元商业软件 Ansys 17.2 对图 2 所示的结构按两种形式划分平面八节点单元,除了对距离切口尖端 $r \leq 1.4$ mm 的扇形区域按如图 6 所示类型 A 和类型 B 划分单元外,切口结构的其他区域网格划分基本相同。其中,结构的参数考虑为 $W = 10$ mm, $H = 2W$, $d/W = 0.5$, $T_{up} = 100$ K, $T_{down} = 0$ K。

选取网格类型 A 模型中距离切口尖端 r_0 的

一圈节点的有限元计算结果 T 代入式(11),获得幅值系数 A_k 。从图 7 可以发现,幅值系数的计算结果受选取节点与切口尖端距离 r_0 的影响不大。在获得幅值系数后,可计算切口尖端邻域的热流密度分量。如图 8 所示,将本文获得的切口尖端附近的热流密度分量与按网格类型 B 划分网格的有限元模型计算结果进行对照。可以看出,即使在切口尖端附近只划分了较少单元,利用本文方法获得的奇异热流密度分量与精细网格有限元模型的计算结果能很好地吻合,且本文结果可进一步表达离切口尖端更近区域的热流密度。

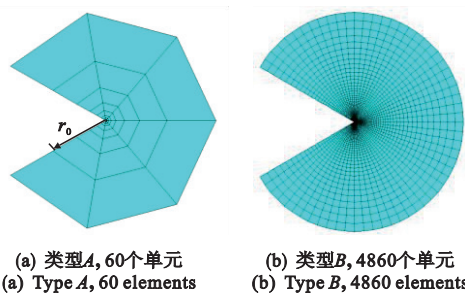


图 6 切口尖端附近有限元网格
Fig. 6 Illustration of finite element mesh near the notch tip

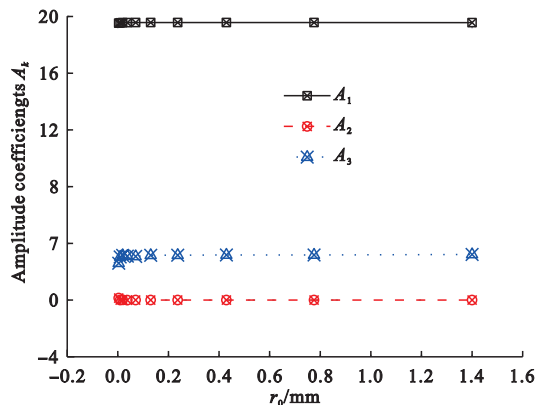


图 7 节点距离 r_0 对幅值系数计算结果的影响
Fig. 7 Effect of the distance r_0 on the calculation results of amplitude coefficients

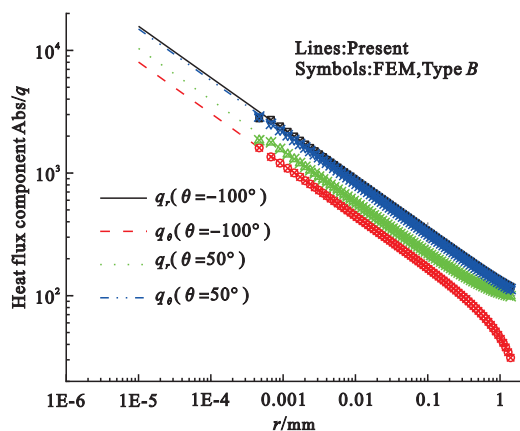


图 8 双材料切口尖端的热流密度(线条)与有限元结果(符号)对比
Fig. 8 Comparison of heat flux components calculated by the present method (lines) with those from FEM (symbols)

4.2 三材料V型切口

由三种各向异性材料构成的V型切口结构如图9所示。三个子域 $\Omega_m (m=1,2,3)$ 中的材料属性参数列入表2^[19-20]。

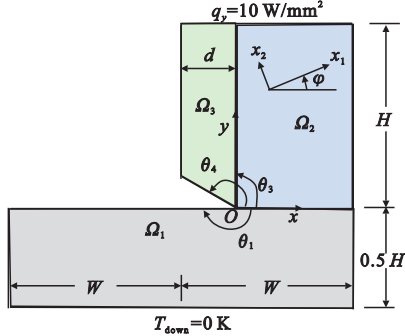


图9 由三种各向异性材料构成的V型切口
Fig. 9 A notch made of three generally anisotropic materials

表2 三种环氧树脂复合材料的属性参数
Tab. 2 Material properties of three kinds of graphite-epoxy composites

Properties	Material 1	Material 2	Material 3
κ_1 [W/(mK)]	40.00	10.00	0.93
κ_2 [W/(mK)]	20.70	15.00	0.54

从图10(a)可以看出,如图9所示的三复合材料切口热流密度奇异性指数随 θ_4 增大而减小,即切口张开角 $180^\circ - \theta_4$ 越小,热流密度奇异性越强,裂纹($\theta_4 = 180^\circ$)的奇异性达到最强。同时,材料的主轴方向对切口尖端的热流密度奇异性有不可忽视的影响,如图10(b)所示。

考虑图9结构的参数为 $W = 10\text{mm}, H = 2W, d/W = 0.5, \theta_4 = 135^\circ, \varphi = 0^\circ$ 。在切口尖端附近划分稀疏的网格,并由有限元法获得节点的温变值,再利用本文的超定法获得多材料切口尖端渐近展开式的各阶幅值系数 A_k 。前4阶热流密度奇异性指数和相应的幅值系数计算结果列入表3。

表3 三复合材料切口的前4阶热流密度奇异性指数和相应的幅值系数

Tab. 3 First four singularity orders λ_k and amplitude coefficients of a tri-material notch

k	1	2	3	4
λ_k	0.73945	1.23707	1.97795	2.37373
A_k	1.18484	0.29811	0.01451	0.20334

获得展开式的幅值系数后,可由Williams级数确定多复合材料切口尖端的温变场和热流密度分量。图11给出了本文结果与精密网格有限元计

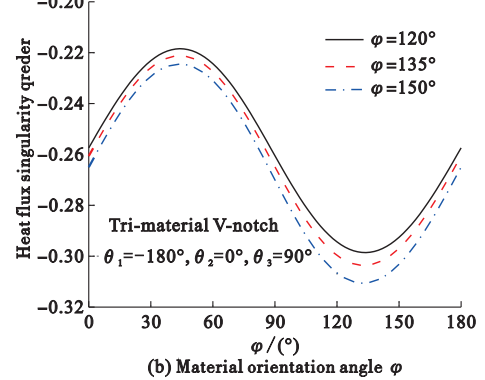
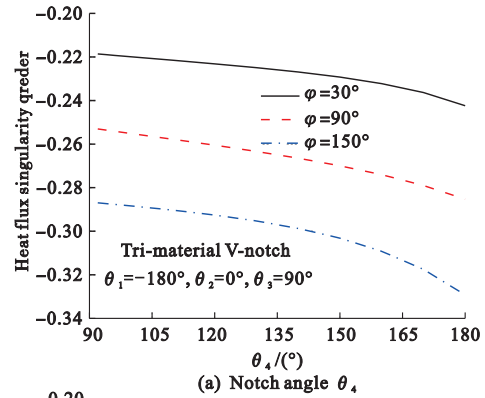


图10 切口角度 θ_4 和材料主轴对三材料切口热流密度奇异性的影响

Fig. 10 Effect of the notch angle θ_4 and the material orientation angle φ on the heat flux singularity of a tri-material notch

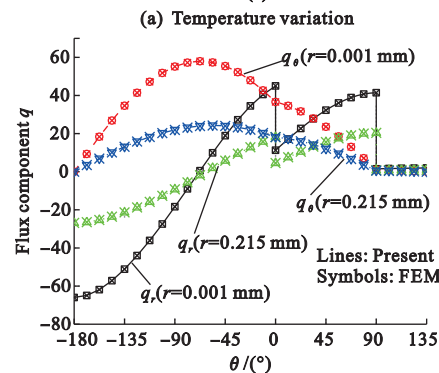
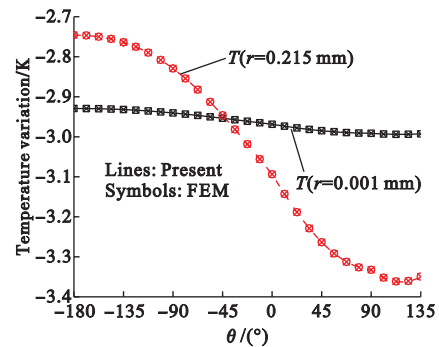


图11 三复合材料切口尖端的温变值、热流密度(线条)与有限元结果(符号)对比

Fig. 11 Comparison of temperature variation and heat flux components calculated by the present method (Lines) with those from FEM (Symbols)

算结果之间的对比。可以看出,无论是温变场还是热流密度,本文计算结果都能与以精细网格为基础获得的有限元结果很好地吻合,这再次验证了本文方法的有效性、准确性和高效性。

5 结 论

本文基于切口尖端奇性特征分析和温变值的有限元计算结果,提出了一种计算多复合材料切口尖端邻域温变场和奇异热流密度的数值方法。首先,将切口尖端温变场按渐近级数展开,推导了多复合材料切口奇性特征方程,获得了切口热流密度奇性指数和相应的特征角函数及其导数。再者,通过利用稀疏有限元网格计算出切口尖端附近节点的温变值组建以幅值系数为未知量的超定方程组,求得幅值系数。最后,将幅值系数回代入渐近展开式,确定切口尖端邻域的温变场和奇异热流密度。数值算例表明,本文方法适用于分析多复合材料切口的奇异性;超定法的计算结果稳定,基于稀疏有限元网格可达到精细网格有限元法的计算精度,达到提高计算效率的效果。

参考文献(References):

- [1] 付鹏强,蒋银红,王义文,等. CFRP 制孔加工技术的研究进展与发展趋势[J]. 航空材料学报, 2019, **39**(6): 32-45. (FU Peng-qiang, JIANG Yin-hong, WANG Yi-wen, et al. Research progress and perspective trend of drilling technology for carbon fiber reinforced polymer[J]. *Journal of Aeronautical Materials*, 2019, **39**(6): 32-45. (in Chinese))
- [2] Shen W, Liang G M, Lei J J, et al. Singular intensity factor method to estimate Notch stress and N-SIF in double edge V-notched plate[J]. *Thin-Walled Structures*, 2021, **169**: 108387.
- [3] Dai Y W, Qin F, Liu Y H, et al. On the second order term asymptotic solution for sharp V-Notch tip field in elasto-viscoplastic solids[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2021, **217**: 106-122.
- [4] Nourazar M, Yang W L, Chen Z T. Fracture analysis of a curved crack in a piezoelectric plane under general thermal loading [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2023, **284**: 109208.
- [5] Alfat S, Kimura M, Maulana A M. Phase field models for thermal fracturing and their variational structures [J]. *Materials*, 2022, **15**(7): 2571.
- [6] Zhang H, Zhang X. Peridynamic analysis of materials interface fracture with thermal effect[J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2022, **120**: 103420.
- [7] Bayat S H, Nazari M B. Thermal fracture analysis in orthotropic materials by XFEM[J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2021, **112**: 102843.
- [8] Li P D, Li X Y, Kang G Z, et al. Three-dimensional fundamental solution of a penny-shaped crack in an infinite thermo-magneto-electro-elastic medium with transverse isotropy[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2017, **130**: 203-220.
- [9] Svolos L, Bronkhorst C A, Waisman H. Thermal-conductivity degradation across cracks in coupled thermo-mechanical systems modeled by the phase-field fracture method[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2020, **137**: 103861.
- [10] Sun W, Lu W J, Bao F Y, et al. A PD-FEM coupling approach for modeling thermal fractures in brittle solids[J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2021, **116**: 103129.
- [11] Penado F E. Analysis of bimaterial singular regions for orthotropic and isotropic materials under thermal loading[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2021, **243**: 107527.
- [12] Zhou Z H, Xu W, Leung A Y T, et al. A study of stress singularities arising at the multi-material interface in a V-notched bending plate[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2017, **180**: 179-194.
- [13] 周枫林, 谢贵重, 张见明, 等. 一种新型三角形裂尖单元及其在结构裂纹分析中的应用[J]. 计算力学学报, 2019, **36**(5): 656-663. (ZHOU Feng-lin, XIE Guizhong, ZHANG Jian-ming, et al. A new triangular element for crack front and the application in analysis of crack problems[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2019, **36**(5): 656-663. (in Chinese))
- [14] 蔡智宇, 姚伟岸. 辛解析奇异元在动荷载作用下 V 型切口问题中的应用[J]. 计算力学学报, 2020, **37**(4): 389-395. (CAI Zhi-yu, YAO Wei-an. A symplectic analytical singular element for V-notch problem under dynamic loading condition [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2020, **37**(4): 389-395. (in Chinese))
- [15] Barroso A, Mantić V, Paris F. Singularity analysis of anisotropic multimaterial corners [J]. *International Journal of Fracture*, 2003, **119**(1): 1-23.
- [16] Yosibash Z, Actis R, Szabó B. Extracting edge flux intensity functions for the Laplacian[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, **53**(1): 225-242.
- [17] Niu Z R, Ge D L, Cheng C Z, et al. Evaluation of the stress singularities of plane V-notches in bonded dissimilar materials[J]. *Applied Mathematical Model-*

- ling, 2009, **33**(3):1776-1792.
- [18] Mantić V, Paris F, Berger J. Singularities in 2D anisotropic potential problems in multi-material corners Real variable approach[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, **40**(20):5197-5218.
- [19] Moleiro F, Mota Soares C M, Carrera E. Three-dimensional exact hygro-thermo-elastic solutions for multilayered plates; Composite laminates, fibre metal laminates and sandwich plates[J]. *Composite Structures*, 2019, **216**:260-278.
- [20] Naik N S, Sayyad A S. An accurate computational model for thermal analysis of laminated composite and sandwich plates[J]. *Journal of Thermal Stresses*, 2019, **42**(5):559-579.

Calculation of singular field near the tip of a multi-material notch under thermal load with an over-determined method

YAO Shan-long^{*1,2}, ZHAO Guang-peng¹, ZHANG Jian¹, ZHANG Zhi-mei³

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Guangxi University, Nanning 530004, China;

2. Scientific Research Center of Engineering Mechanics, Guangxi University, Nanning 530004, China;

3. Hepu Secondary Vocational and Technical School, Beihai 536100, China)

Abstract: This study presents an effective approach for analyzing the singularity of heat flux at the tip of a plane notch in multi-composite materials. By integrating the findings of singularity characteristics analysis with the finite element method, the thermally singular physical field at the notch tip is determined. Firstly, based on the Williams series expansion of the physical field near the notch tip, the characteristic equation of the thermal conduction singularity for the multi-composite material notch is derived. The singularity orders, characteristic angular functions, and their respective derivatives for the asymptotic expansion of the physical field at the notch tip are obtained by solving the characteristic equation numerically. Secondly, using a sparse finite element mesh, the temperature variation field near the notch tip is determined. The finite element results are then integrated with the singularity characteristics analysis results for constructing an over-determined system of equations. This system allows for the computation of the amplitude coefficients of the asymptotic expansion of the physical field near the notch tip, enabling the determination of the temperature variation field and the singular heat flux in the vicinity of the notch tip. The proposed method leverages the finite element computations with a sparse mesh, whereas high-precision computational results are obtained. The present method overcomes the reliance on dense meshes in conventional finite element methods for computing singular fields at notch tips, thereby enhancing computational efficiency.

Key words: notch; multi-composite material; singular heat flux; over-determined equation