

DOI: 10.7511/jslx20230523002

多液滴撞击自由液面复杂流动的 δ -SPH模拟

郑春耀^{1,2}, 周媛³, 张林^{*1}

- (1. 中国科学院过程工程研究所 介科学与工程全国重点实验室, 北京 100190;
2. 中国科学院大学 化学工程学院, 北京 100049;
3. 石油化工研究院 过程模拟计算中心, 北京 102206)

摘要: 基于 δ -SPH法对多液滴撞击自由液面进行了模拟与分析。首先, 通过添加密度耗散项和人工粘性项, 消除压力场的虚假振荡, 保证数值格式的稳定性; 然后, 对单液滴撞击自由液面进行模拟, 通过与文献结果比较验证方法的可靠性; 最后, 对双液滴垂直/水平分布、四液滴菱形分布撞击自由液面进行模拟, 分析液滴垂直/水平距离等对撞击结构的影响。结果表明, δ -SPH法能准确捕捉多液滴撞击自由液面时出现的液体飞溅、液体大幅晃动和不连续液面等强非线性现象, 还能获得光滑的压力分布。

关键词: 无网格法; δ -SPH; 液滴撞击; 自由液面; 复杂流动

中图分类号: O242 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-4708(2024)06-1081-07

1 引言

液滴撞击自由液面的物理现象与水利工程中的掺气、泄洪消能和雾化等问题相关, 也是核安全工程中高温熔融液滴冲击气液界面的重要组成部分。开展多液滴撞击自由液面问题的研究, 有助于理解其运动规律, 指导相关工业生产。

流体体积(VOF)法、水平集(Level Set)法、前沿跟踪(Front-Tracking)法是常用的界面追踪技术。其基于网格的特性, 难以模拟液滴撞击后产生的液体飞溅等现象。

与基于网格的数值方法相比, 光滑粒子动力学(SPH)法是一种拉格朗日描述下的无网格方法, 擅长处理对流主导的流动, 也非常适合模拟大变形问题。因此, SPH法在液滴飞溅现象^[1]、返回舱入水^[2]等方面有着巨大的潜力。压力振荡是SPH法面临的一个难题, Antuono等^[3]在连续性方程中引入密度耗散项来消除压力的数值噪声, Marrone等^[4]将其命名为 δ -SPH法。该方法能有效解决压力场的数值振荡问题。

鉴于 δ -SPH法在大变形和破碎过程中的优

势, 以及多液滴撞击自由液面问题的重要性, 本文将基于 δ -SPH法开展多液滴撞击自由液面复杂流动的研究。

2 SPH基本原理

SPH方程的构造主要包含核近似和粒子近似两个关键步骤。函数 $f(x)$ 的核近似定义为

$$f(x) = \int_{\Omega} f(x') W(x - x', h) dx' \quad (1)$$

式中 $W(x - x', h)$ 为核函数, h 是光滑长度。

对式(1), 粒子 i 处函数 $f(x_i)$ 的粒子近似为

$$\langle f(x_i) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(x_j) W(x_i - x_j, h) \quad (2)$$

式中 N 是粒子 i 支撑域中的粒子数, m_j 和 ρ_j 分别表示粒子 j 的质量和密度。

在SPH的核近似和粒子近似中, 本文均采用二维Wendland的C2核函数^[5]。

3 δ -SPH方法

忽略黏性的影响, 拉格朗日描述下的流体控制方程为

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3)$$

收稿日期: 2023-05-23; 修改稿收到日期: 2023-08-18.

基金项目: 多相复杂系统国家重点实验室自主部署课题(MESO-24-A04; MESO-23-A01)资助项目.

作者简介: 张林(1982-), 男, 博士, 副研究员(E-mail: zhanglin@ipe.ac.cn).

引用本文: 郑春耀, 周媛, 张林. 多液滴撞击自由液面复杂流动的 δ -SPH模拟[J]. 计算力学学报, 2024, 41(6): 1081-1086, 1129.
ZHENG Chun-yao, ZHOU Yuan, ZHANG Lin. Simulation of complex flow of multi-droplet impingement on a free surface by δ -SPH method[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2024, 41(6): 1081-1086, 1129.

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} \quad (4)$$

式中 ρ 和 \mathbf{u} 分别表示流体微团的密度和速度, \mathbf{g} 为重力加速度, p 是压力。

将不可压缩流体视为弱可压缩流体, 通过状态方程建立密度 ρ 与压力 p 之间的关系, 可实现压力项的计算。本文采用的状态方程为

$$p = p(\rho) = c_0^2(\rho - \rho_0) \quad (5)$$

式中 c_0 表示人工声速, ρ_0 为流体的初始密度。常取 $c_0 \geq 10u_{\max}$, u_{\max} 为预估的流场最大速度^[6]。

为了解决弱可压 SPH 法中压力场计算的数值振荡问题, Antuono 等^[3,4] 提出了 δ -SPH 法。在连续性方程中添加密度耗散项, 防止密度的高频波动, 消除压力场的虚假振荡; 在动量方程中施加一定的人工粘性, 确保数值格式的稳定性。 δ -SPH 法的离散形式为

$$\begin{aligned} \frac{D\rho_i}{Dt} &= -\rho_i \sum_j (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j + \delta h c_0 D_i \\ \frac{D\mathbf{u}_i}{Dt} &= -\frac{1}{\rho_i} \sum_j (p_i + p_j) \nabla_i W_{ij} V_j + \mathbf{g} + \\ &\alpha h c_0 \frac{\rho_0}{\rho_i} \sum_j \pi_{ij} \nabla_i W_{ij} V_j \end{aligned} \quad (6)$$

式中

$$D_i = 2 \sum_j \phi_{ij} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \cdot \nabla_i W_{ij} V_j / |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2$$

$$\pi_{ij} = (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) / |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2$$

$$\phi_{ij} = (\rho_j - \rho_i) - 0.5[\langle \nabla \rho \rangle_i^L + \langle \nabla \rho \rangle_j^L] \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)$$

式中 δ 和 α 分别控制密度和粘性的耗散强度, $\langle \nabla \rho \rangle^L$ 为重整化密度梯度^[3]

$$\langle \nabla \rho \rangle_a^L = \sum_b (\rho_b - \rho_a) \mathbf{L}_a \nabla_a W(\mathbf{r}_b) dV_b \quad (7)$$

$$\mathbf{L}_a = \left[\sum_b (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a) \otimes \nabla_a W(\mathbf{r}_b) dV_b \right]^{-1} \quad (8)$$

离散的 SPH 方程组对时间积分一般采用显示格式。本文采用预估-校正法对式(9)进行求解, 时间步长 Δt 满足 CFL 条件以保证解的收敛。

4 边界条件处理

壁面边界条件处理一直是 SPH 法中的难点。目前已提出多种壁面边界条件处理方法^[7], 如固定虚粒子边界法、动态边界条件法等。

本文采用 Adami 等^[8] 提出的固定虚粒子边界法, 直接将内部流体粒子的压力插值到壁面固定虚粒子上, 得出其上的压力 p_w ,

$$p_w =$$

$$\frac{\sum_f [p_f + \rho_f (\mathbf{a}_w - \mathbf{g}) \cdot (\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_w)] W(|\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_w|, h)}{\sum_f W(|\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_w|, h)}$$

(9)

再通过状态方程反推出固定虚粒子的密度 ρ_w 。该方法能很好地处理复杂几何边界问题。

5 数值算例

所有算例参数为, 容器长 $L=2.0$ m, 水深 $H=1.0$ m, 密度 $\rho=1000$ kg \cdot m⁻³, 动力学粘性系数 $\mu=1 \times 10^{-3}$ Pa \cdot s, 液滴直径 $d=0.2$ m。为了消除压力反射波的干扰, 在壁面附近设置厚度为 0.1 m 的人工阻尼区, 并在动量方程中加入阻尼项^[9]。

5.1 有效性验证

首先模拟单液滴撞击自由液面问题, 验证模型的有效性, 其中初始时刻液滴中心为(1.0, 1.5)。

图 1 给出本文和文献[10]的粒子分布模拟结果。从图 1(a)可以看出, 液滴撞击自由液面后液面迅速下凹, 形成一个空腔, 在 $t=0.52$ s 时液体向两侧飞溅, 产生一个半球形的弹坑, 并出现皇冠状的边缘。之后液面持续下凹, 水花进一步横向传播。反弹运动集中在弹坑中心, 液面粒子都向液面中心点运动。随着液面中心粒子继续向上运动, 出现一个沃辛顿喷流^[11] ($t=0.84$ s)。弹坑深度达到最大值时, 其宽度约为水滴直径的 2.5 倍。图 1(b)给出文献[10]的模拟结果, 可以看出本文模拟结果与其基本一致。

将液滴中心放置在(1, 1.7)处, 液滴直径改为 0.3 m, 计算水槽中部(1, 0.5)处的速度和压力^[12,13], 结果如图 2 所示。首先, (1, 0.5)位于水槽的中部, 由于算例的对称性, 故 x 方向的速度为 0, 而本文 x 方向速度的模拟结果在整个过程中都接近于 0; 其次, y 方向速度的模拟结果与文献的变化趋势一致, 得到的速度值也基本相同; 最后, 压力与文献也吻合。这进一步验证了本文模型的有效性。

5.2 双液滴撞击自由液面

本节开展双液滴撞击自由液面的研究, 探讨垂直/水平两个方向上的因素对撞击过程的影响。垂直/水平分布工况中, 两个液滴的中心位置分别为(1, 1.2)和(1, 1.5)、(0.75, 1.5)和(1.25, 1.5)。

5.2.1 垂直分布工况

图 3 给出垂直分布工况不同时刻模拟的液体分布和压力分布。 $t=0.34$ s 时两液滴相撞后液体向两侧飞溅产生次级冠状结构。这是由于第一

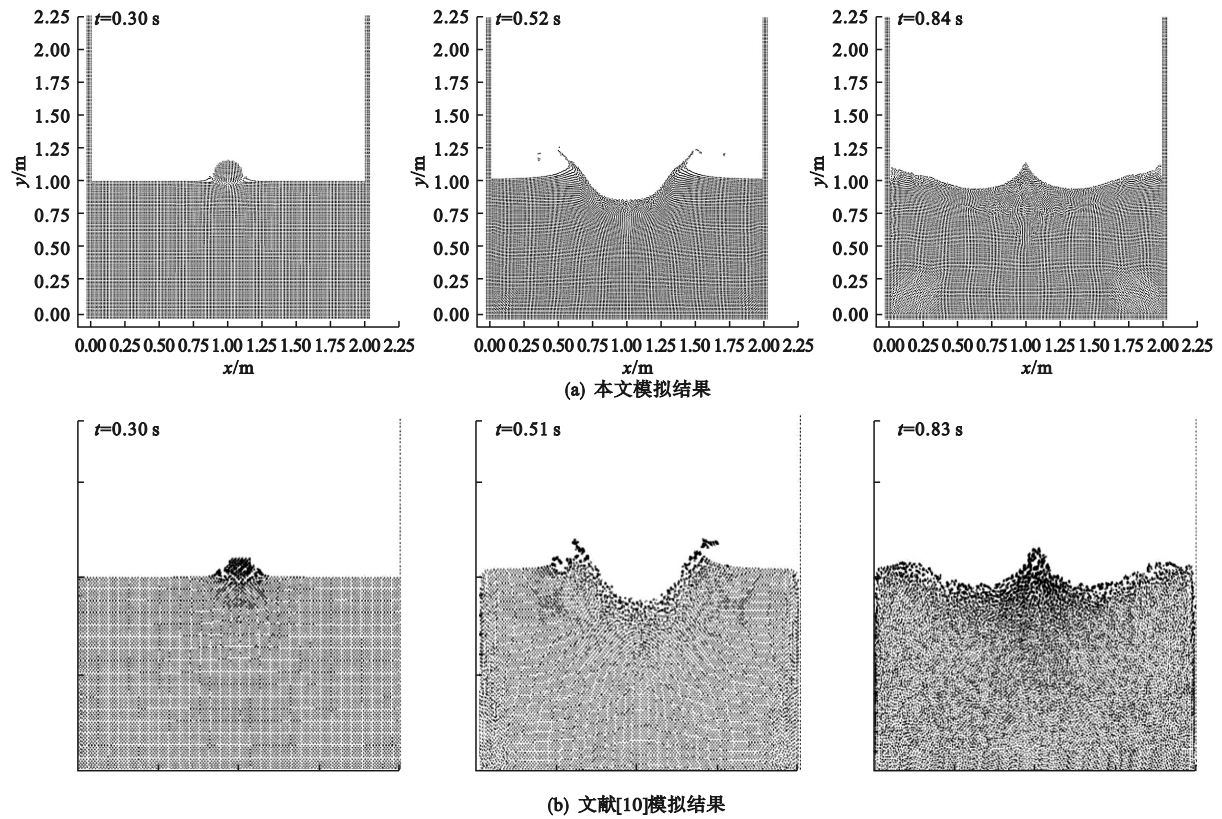


图1 单液滴撞击自由液面不同时刻的粒子分布
 Fig.1 Particle distribution at different time when one droplet impinges on a free surface

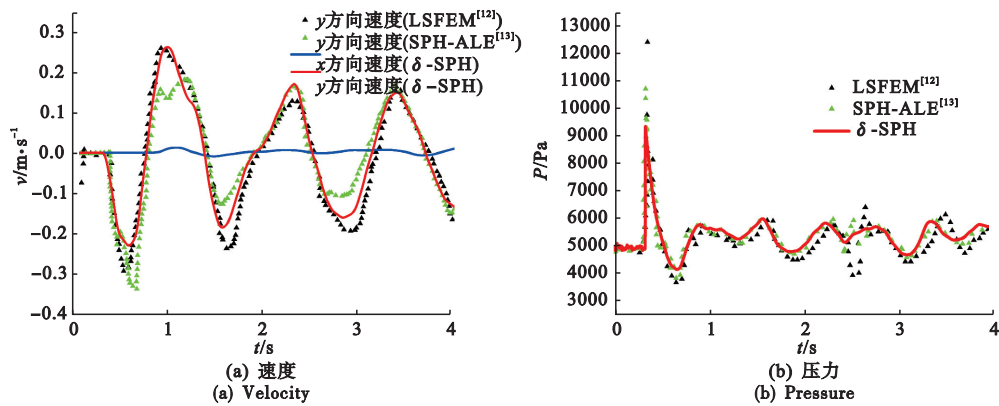


图2 测点(1,0.5)位置处的速度和压力时历
 Fig.2 The time history of velocity and pressure at the gauge position(1,0.5)

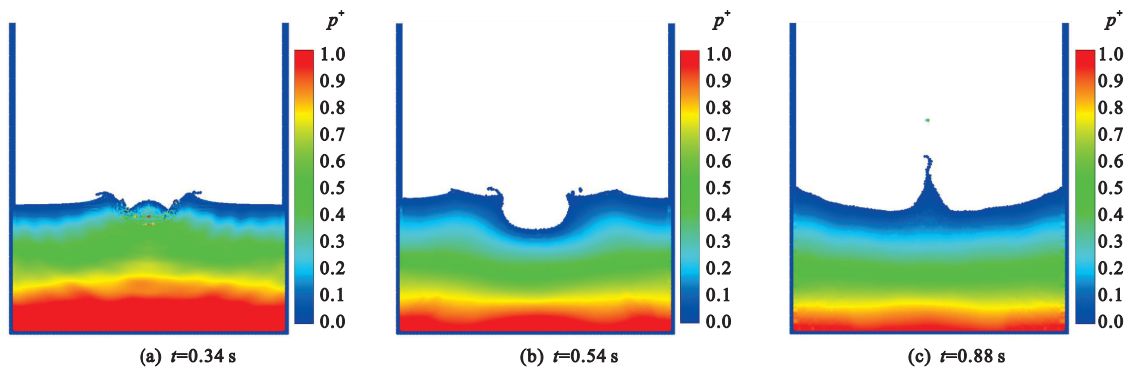


图3 双液滴垂直分布撞击自由液面不同时刻的液体分布和压力分布
 Fig.3 Liquid and pressure distribution at different time when two vertical droplets impinge on a free surface

个液滴产生的空腔四周液体量大于空腔内,初级空腔比次级空腔承受更大的流动阻力,因此次级冠膨胀更快,并与初级冠碰撞后聚结,导致初级冠内壁变形。 $t=0.54\text{ s}$ 时在液滴中心左侧区域,第一个液滴边缘约在 $x=0.375\text{ m}$ 处且无液体飞溅现象,第二个液滴边缘约在 $x=0.75\text{ m}$ 处且有液体飞溅现象,这与单液滴撞击自由液面的现象截然不同。当第二个液滴以一定速度接触第一个液滴撞击产生的径向移动的液体时,由于流动阻力较小,液体向上的流动速度明显减弱,用于第二冠扩张和飞溅的动量变小,导致平滑的凹陷产生,深度与单液滴的基本一致,这与 Liang 等^[1]对连续液滴撞击液膜的分析结果类似。 $t=0.88\text{ s}$ 时双液滴垂直分布撞击自由液面的沃辛顿喷流中心柱高度约在 1.5 m 处,大于单液滴的 1.25 m 。

最后,压力分布与单液滴的结果类似,且均匀光滑。 $t=0.34\text{ s}$ 时可见扇形压力波向水池深处

传播,之后 $t=0.54\text{ s}$ 和 0.88 s 时压力逐渐平缓。

5.2.2 水平分布工况

图 4 给出水平分布工况不同时刻模拟的液体分布和压力分布。可以看出, $t=0.30\text{ s}$ 时两个液滴撞击自由液面后各自出现了液体飞溅现象,都朝着水池中心一侧挤压自由液面,较另一侧的自由液面高。 $t=0.60\text{ s}$ 时,两个液滴撞击形成的空腔达到最大,远离水池中心一侧可观察到液体飞溅;而朝水池中心一侧,由于空腔的相互挤压,液体飞溅合并成一个中心射流。之后两个空腔边缘向远离水池中心一侧传播,碰到壁面后在 $t=0.98\text{ s}$ 时已各自返回,同时由于水池中心处飞溅液体的坠落,从而观察到图 4(c) 所示的液体分布。

最后, $t=0.30\text{ s}$ 时两个液滴撞击自由液面后各自出现了明显的压力波,向水池深处传播,并发生相干作用。 $t=0.60\text{ s}$ 时,整个流场的压力已变得平缓。

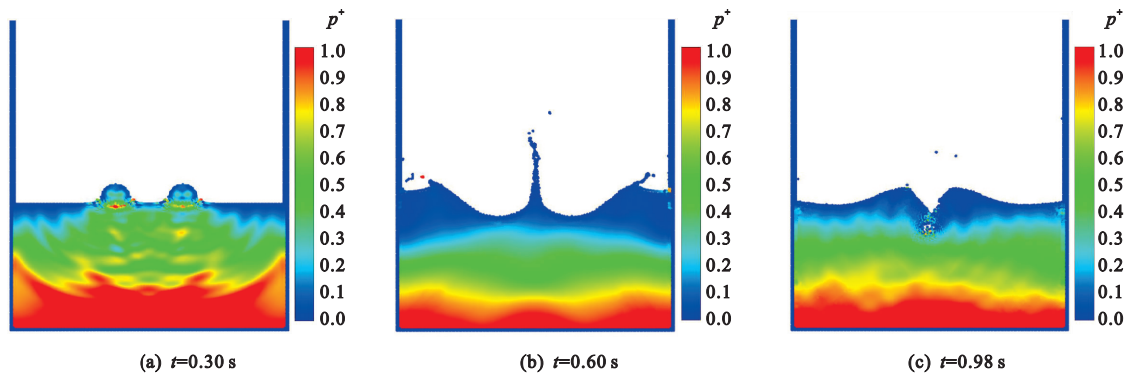


图 4 双液滴水平分布撞击自由液面不同时刻的液体分布和压力分布
Fig. 4 Liquid and pressure distribution at different time when two horizontal droplets impinge on a free surface

5.2.3 双液滴撞击自由液面的无量纲分析

对垂直/水平分布工况分别定义如下的结构参数,即液体凹陷深度 H_c 、空腔直径 D_c 、上升射流到初始液面的距离 H_s 和水花飞溅高度到初始液面的距离 H_d (见图 5)。同时,记两个液滴中心的垂直间距为 s_h ,水平间距为 s_l ,初始时刻最低液滴中心到液面的距离为下降高度 h 。以液滴直径为无量纲因子,用上标“+”表示无量纲化后的量。

对垂直分布工况,取 $s_h^+ = 1.3, 1.6, 1.9, 2.2, 2.5$ 的工况进行研究,其中 $h^+ = 1.0$ 。图 6 给出 s_h^+ 对 H_c^+ 和 D_c^+ 的影响。可以看出,凹陷深度 H_c^+ 随 s_h^+ 的增大而增大;当 s_h^+ 固定时, H_c^+ 随时间先增大后减小,最大凹陷深度约为液滴直径的 $0.9\sim 1.1$ 倍。空腔直径 D_c^+ 随 s_h^+ 的增大而减小;当 s_h^+ 固定时, D_c^+ 随时间先增大后减小,最大空腔直径约为液滴直径的 $2.3\sim 2.6$ 倍。对比发现,液滴垂直间距

s_h^+ 对 H_c^+ 的影响小于对 D_c^+ 的影响。

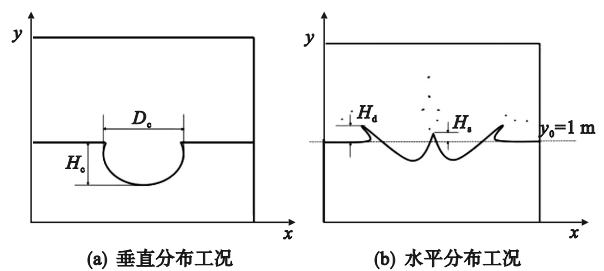


图 5 垂直/水平分布的结构参数
Fig. 5 Structural parameters for the vertical/horizontal cases

对水平分布工况,取 $s_l^+ = 1.3, 1.6, 1.9, 2.2, 2.5$ 的工况进行研究,其中 $h^+ = 1.9$ 。图 7 给出 s_l^+ 对 H_s^+ 和 H_d^+ 的影响。可以看出,随着 s_l^+ 从 1.3 增大到 1.9 ,在上半段时间射流高度 H_s^+ 随时间变大,后存在一个向下的突变,再随时间缓慢减小。该突变的机理是,对于小间距撞击产生的中心射流,更

多液体发生接触,消耗了更多的能量,导致上部液体更容易破碎飞溅,下部液体动能较小,因此衰减破碎出现更早,射流维持时间也减小,所以射流高度断崖式下降。当 s_1^+ 继续增大到2.2和2.5时,两液滴接触的液体较少,不容易出现破碎飞溅,因此射流高度 H_s^+ 并无突变现象发生,且随时间先增

大后减小。另外, H_d^+ 随 s_1^+ 增大而减小;当 s_1^+ 固定时, H_d^+ 随时间先增大后减小,最大值出现的时刻近似相同。

5.3 四液滴菱形分布撞击自由液面

将垂直/水平分布相结合,开展四液滴菱形分布撞击自由液面的研究,同时考虑两个方向上的因

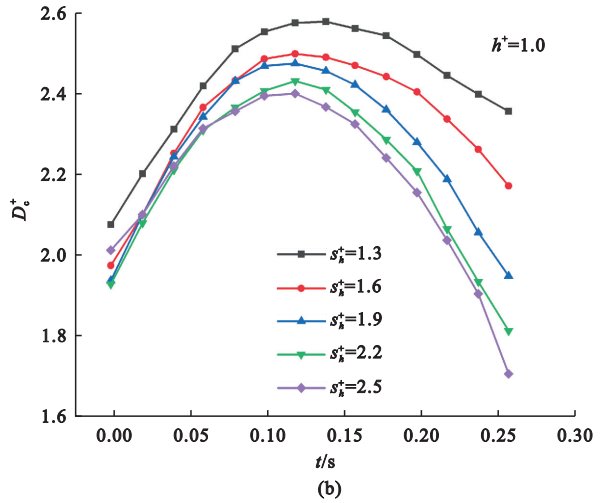
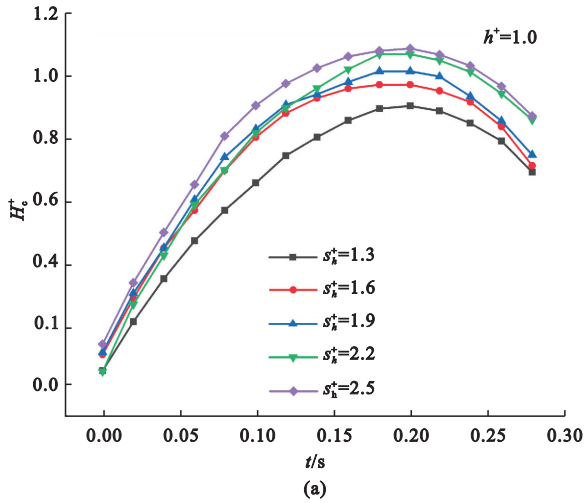


图6 液滴垂直间距 s_1^+ 对 H_c^+ 和 D_c^+ 的影响($h^+ = 1.0$)

Fig. 6 Effect of droplet vertical space s_1^+ on H_c^+ and D_c^+ ($h^+ = 1.0$)

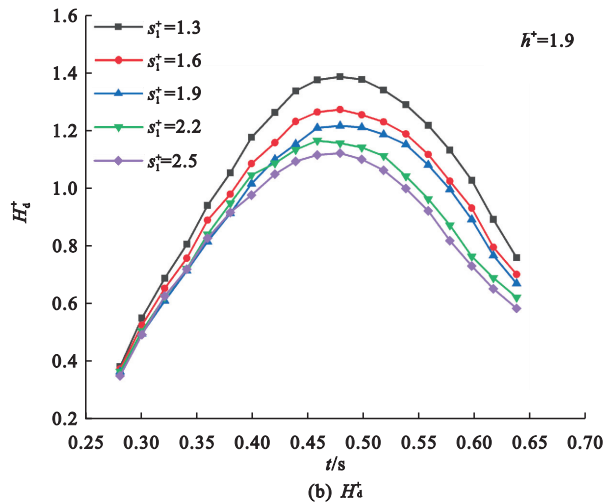
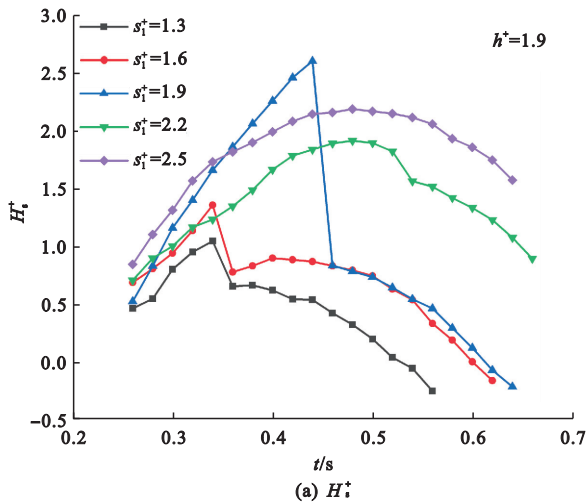


图7 液滴水平间距 s_1^+ 对 H_s^+ 和 H_d^+ 的影响($h^+ = 1.9$)

Fig. 7 Effect of droplet horizontal space s_1^+ on H_s^+ and H_d^+ ($h^+ = 1.9$)

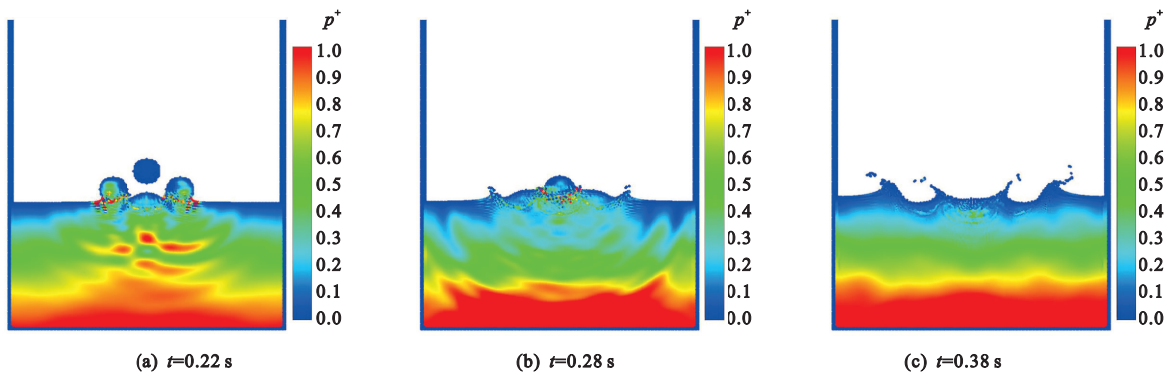


图8 四液滴菱形分布撞击自由液面不同时刻的液体分布和压力分布

Fig. 8 Liquid and pressure distribution at different time when four rhombus droplets impinge on a free surface

素对撞击过程的影响,其中,四液滴中心为(1, 1.2),(1,1.5),(0.75,1.35)和(1.25,1.35)。

图8给出四液滴菱形分布撞击自由液面不同时刻的模拟结果。可以看出, $t=0.22\text{ s}$ 时最下方液滴与自由液面已发生一段时间的碰撞,此时左右两侧液滴也开始与自由液面发生碰撞,整体上可看到扇形压力波的出现。这三个液滴分别产生压力波并向水池深处传播,由于波的相干作用使得局部压力增强。 $t=0.28\text{ s}$ 时,左右两个液滴的撞击导致出现了单侧的液体飞溅现象,整体上仍能看到扇形压力波。 $t=0.38\text{ s}$ 时有明显的两层液体飞溅现象,另外压力波已消失,压力变得平缓。

6 结 论

本文基于 δ -SPH法对多液滴撞击自由液面问题展开了数值研究。通过实现双液滴垂直/水平分布、四液滴菱形分布撞击自由液面的模拟,所得结论如下。

(1) δ -SPH法能准确捕捉多液滴撞击自由液面过程中的液体分布,复现撞击过程中的一些典型特征,如空腔、液体飞溅等,并能获得光滑的压力分布。

(2)液滴下降高度和液滴间距对撞击结构具有显著的影响。对垂直分布工况,凹陷深度随垂直间距的增大而增大,空腔直径随液滴垂直间距的增大而减小。对水平分布工况,随着液滴水平间距的增大,射流高度先增大后减小,对较小液滴水平间距还存在一个向下的突变。

(3)对四液滴菱形分布撞击自由液面问题,模拟结果出现了液体飞溅嵌套现象,其在双液滴垂直/水平撞击自由液面中不存在。

参考文献(References):

- [1] Liang G,Zhang T Y,Chen H L,et al. Successive impact of multiple droplets on liquid film[J]. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*,2019,**74**:389-398.
- [2] 丁宁,王鑫博.基于SPH法的返回舱入水载荷模拟分析[J]. *计算力学学报*,2023,**40**(6):963-971. (DING Ning,WANG Xing-bo. Simulation analysis on water entry loads of a space capsule based on SPH method[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*,2023,**40**(6):963-971. (in Chinese))
- [3] Antuono M,Colagrossi A,Marrone S,et al. Free-surface flows solved by means of SPH schemes with numerical diffusive terms[J]. *Computer Physics Communications*,2010,**181**(3):532-549.
- [4] Marrone S,Antuono M,Colagrossi A,et al. δ -SPH model for simulating violent impact flows[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,2011,**200**(13-16):1526-1542.
- [5] Dehnen W,Aly H. Improving convergence in smoothed particle hydrodynamics simulations without pairing instability[J]. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*,2012,**425**(2):1068-1082.
- [6] Meringolo D D,Liu Y,Wang X Y,et al. Energy balance during generation, propagation and absorption of gravity waves through the δ -LES-SPH model[J]. *Coastal Engineering*,2018,**140**:355-370.
- [7] Liu M B,Shao J R,Chang J Z. On the treatment of solid boundary in smoothed particle hydrodynamics [J]. *Science China Technological Sciences*,2012,**55**(1):244-254.
- [8] Adami S,Hu X Y,Adams N A. A generalized wall boundary condition for smoothed particle hydrodynamics[J]. *Journal of Computational Physics*,2012,**231**(21):7057-7075.
- [9] 孙鹏楠.物体与自由液面耦合作用的光滑粒子流体力学方法研究[D].哈尔滨工程大学,2018.(SUN Peng-nan. Study on the Coupling Effect between Object and Free Surface by Smooth Particle Hydrodynamics Method[D]. Harbin Engineering University, 2018. (in Chinese))
- [10] 丁蕊琪.自由液面问题模拟的SPH方法[D].南京航空航天大学,2016.(DING Rui-qi. SPH Method for Simulation of Free Surface Problem [D]. Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2016. (in Chinese))
- [11] Worthington A M,Cole R S. Impact with a liquid surface,studied by means of instantaneous photography [J]. *Proceedings of the Royal Society of London*,1895,**59**(353-358):250-251. (in Chinese))
- [12] 汤波,李俊峰,王天舒.水珠滴落的最小二乘粒子有限元方法模拟[J]. *物理学报*,2008,**57**(11):6722-6729. (TANG Bo,LI Jun-feng,WANG Tian-shu. Numerical simulation of liquid drop phenomenon by least square particle finite element method[J]. *Acta Physica Sinica*,2008,**57**(11):6722-6729. (in Chinese))
- [13] 上官子柠.基于黎曼解的SPH-ALE方法在自由面流动问题中的应用研究[D].哈尔滨工程大学,2015.(SHANGGUAN Zi-ning. Application of SPH-ALE method based on Riemann Solution in Free Surface Flow Problems[D]. Harbin Engineering University, 2015. (in Chinese))

Topological force finding analysis of bar structure

ZHANG Zhi-hong^{*}, ZHAO Kai

(Department of Civil Engineering, College of Civil Engineering, Shanghai Normal University, Shanghai 201418, China)

Abstract: Firstly, the paper studied various types of linear graph representations of a bar-type structure. Secondly, the incidence matrix is introduced to assemble the equilibrium matrix, and a new form of equilibrium matrix independent of the specific shape geometry of the structure is derived. The concept of topological force finding analysis is proposed based on this form of equilibrium matrix. Finally, the equilibrium matrices and their null spaces in different cases of a bar-type structure are compared. The correctness and applicability of linear graph representation and topological force finding for various types of bar structures are further verified.

Key words: bar structure; linear graphs; equilibrium matrices; topological force finding

~~~~~  
(上接第 1086 页)

## Simulation of complex flow of multi-droplet impingement on a free surface by $\delta$ -SPH method

ZHENG Chun-yao<sup>1,2</sup>, ZHOU Yuan<sup>3</sup>, ZHANG Lin<sup>\*1</sup>

(1. State Key Laboratory of Mesoscience and Engineering, Institute of Process Engineering, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190;

2. School of Chemical Engineering, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049;

3. Process Simulation & Calculation Center, Petrochemical Research Institute, Beijing 102206)

**Abstract:** Based on the  $\delta$ -SPH method, the multi-droplet impingement on a free surface is simulated and analyzed. First, by adding a density dissipation term and an artificial viscous term in the governing equations, the spurious numerical oscillations in pressure can be removed and the stability of the numerical scheme is ensured. Then, the impact of a single droplet on a free surface is simulated, and the reliability of the  $\delta$ -SPH method is verified by comparison with the results reported in the literature. Finally, two droplets with a vertical/horizontal distribution, four droplet's with a rhombus distribution, which impinge on a free surface, are simulated, and the effects of the droplet vertical/horizontal travel on the impact structure are analyzed. The numerical results show that: the  $\delta$ -SPH method can exactly capture the strong-nonlinearity phenomena such as splashing, large-amplitude sloshing and discontinuous free surface when multi-droplets impinge on a free surface, and a smooth pressure field is also obtained.

**Key words:** meshless method;  $\delta$ -SPH; droplet impact; free surface; complex flow