

DOI: 10.7511/jslx20230612002

基于混合形函数和 Gurtin 变分原理 的动力时域有限元方法

陈凤玲, 何宜谦, 于洋, 杨海天*

(大连理工大学 工程力学系 工业装备结构分析优化与 CAE 软件全国重点实验室, 大连 116024)

摘要:提出一种基于多项式和三角函数混合的形函数及其构造方法,结合 Gurtin 变分原理和加权余量法,建立了三种时域有限元方程,从而为描述变量的时变特性提供了更灵活和多样的选择。在基于增维降阶一阶动力方程的时域有限元计算中,提出了一种算法稳定的分析方法,当形函数形式、时间步长及节点数给定,可通过数值计算对算法的稳定性进行判定。通过算例对所提方法的有效性进行了数值验证,考虑了多项式、简谐荷载作用下常/变刚度、质量的动力问题,探讨了不同时间有限元建模方式、形函数、插值点个数、时间步长等因素对计算精度和计算效率的影响,并与解析解、Newmark 法、中心差分法等进行了比较,得到了满意的结果。

关键词:动力分析;混合形函数;时域有限元;Gurtin 变分原理;加权余量法

中图分类号:O242.21

文献标志码:A

文章编号:1007-4708(2024)06-1012-08

1 引言

时域有限元方法为求解动力问题提供了一种有效的数值计算手段,其主要思想是利用 Gurtin 变分原理^[1]、Hamilton 原理^[2]或加权余量法^[3]等,在时域建立有限元求解方程,而不是通过差分或逐步积分等方法^[4,5]将动力方程在时域离散并进行求解。于开平等^[6]在对当时国内外相关研究进展综述的基础上,进一步阐述了时域有限元方法研究的必要性及发展前景。赵振峰等^[7]从单自由度振动问题出发,结合时域降维与加权余量法,建立了一个单步求解的时域有限元方程,可降低对插值多项式的阶次要求,并进行了算法的稳定性分析。基于 Gurtin 变分原理,马立明等^[8-10]等推导了计算结构动力响应的逐步积分法;罗志国等^[11]对平面动力问题进行了分析。隋永枫等^[12,13]基于分析动力学与分析结构力学在数学理论上的一致性,提出了时间-空间混合有限元方法,既继承了有限元保辛的优良特性,又可灵活有效地处理动力/波动问题。

时域有限元方法的一个潜在优点是能够灵活

选择形函数的形式^[6,14],从而可根据不同的载荷形式,更精细模拟变量的时变特性。目前研究中,形函数多采用 Hermite 多项式^[8,9,11,15],也有学者采用其他形式的形函数近似表达结构的瞬态响应,如样条函数^[3]、拉格朗日多项式^[16]等。

此外,以往工作大多基于二阶动力方程构建时域有限元方程。也有一些学者从增维降阶的一阶动力方程出发,基于加权余量法建立了不同形式的时域有限元方程^[15-17]。在一阶系统相关的时域有限元方程中,位移和位移速度作为独立变量求解,往往会提高问题的求解精度^[17]。在形式上与二阶动力方程相同的二阶非傅里叶热传导方程的求解中,通过方程降阶,并将温度与温度对时间的导数作为独立变量考虑,可描述速度的间断行为^[18]。

本文基于二阶动力方程和增维降阶的一阶动力方程,利用加权余量法和 Gurtin 变分原理,建立三种时域有限元方程,提出了一种由多项式和三角函数为基底的混合形函数及其构造方法。在算例中,分别对简谐、多项式函数等荷载激励下的常/变刚度、质量问题,以及一个二维齿轮状结构的动力问题进行求解,探讨了形函数形式、单元节点个数、

收稿日期:2023-06-12;修改稿收到日期:2023-07-14.

基金项目:国家自然科学基金(11972109,11572068,12072063);国家重点基础研究发展计划(2015CB057804)资助项目.

作者简介:杨海天*(1956-),男,博士,教授(E-mail:haitian@dlut.edu.cn).

引用本文:陈凤玲,何宜谦,于洋,等.基于混合形函数和 Gurtin 变分原理的动力时域有限元方法[J].计算力学学报,2024,41(6):1012-1019.

CHEN Feng-ling, HE Yi-qian, YU Yang, et al. Hybrid shape functions and gurtin variational principle based on temporal finite element method for dynamic analysis[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2024, 41(6): 1012-1019.

时间步长及时域有限元建模方式等对计算精度和计算效率的影响,并对算法稳定性进行了分析。所得计算结果与解析解、Newmark 解、中心差分解进行比较,得到了令人满意的结果。

2 时域有限元方程的构建

经空间有限元离散后,系统的动力方程可写为^[19]

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = f(t) \quad (1)$$

式中 M, C, K 分别为 $n \times n$ 的质量、阻尼、刚度矩阵, $f(t)$ 为 $n \times 1$ 阶的荷载向量, \ddot{u}, \dot{u}, u 分别代表 $n \times 1$ 阶的位移向量、位移速度向量和位移加速度向量,时域计算区间 $t \in [0, T]$ 。初始条件为

$$u(0) = u_0, \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \quad (2)$$

令 $v = \dot{u}, U = \{v \ u\}^T$ 可得到增维降阶的一阶动力方程

$$AU + BU = F \quad (3)$$

式中

$$A = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} C & K \\ -I & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$F = [f(t) \ 0]^T, I$ 为 $n \times n$ 阶单位阵,初始条件为

$$U_0 = [v_0 \ u_0]^T \quad (5)$$

将区间 $[0, T]$ 做分段离散,在每个离散时段内取 m 个时间节点。对二阶动力方程式(1),通过时间节点位移向量 \bar{u} 将时段内的位移 u 近似为

$$u = N\bar{u} \quad (6)$$

式中 N 为形函数矩阵

$$N(t) = [\varphi_1 \cdot I_{n \times n} \ \varphi_2 \cdot I_{n \times n} \ \dots \ \varphi_m \cdot I_{n \times n}] \quad (7)$$

$\varphi_i(t)$ 为形函数。

时段内的速度 v 近似为

$$v = \dot{N}\bar{u} \quad (8)$$

$\dot{N}(t)$ 为 N 对时间的一阶导数矩阵。

将计算得到的时段末节点位移和速度值作为下一时间步的初值,从而可递进求解相关的动力问题。

对于一阶动力方程式(3),通过时间节点向量 \bar{U} 将 U 近似为

$$U = \tilde{N}\bar{U} \quad (9)$$

形函数矩阵为

$$\tilde{N}(t) = [\varphi_1 \cdot I_{2n \times 2n} \ \varphi_2 \cdot I_{2n \times 2n} \ \dots \ \varphi_m \cdot I_{2n \times 2n}] \quad (10)$$

2.1 基于 Gurtin 变分原理和二阶动力方程的时域有限元方程

式(1)对应的 Gurtin 泛函为^[9]

$$\begin{aligned} \Pi_u = & \frac{1}{2} \dot{u}^T M * \dot{u} + \frac{1}{2} \dot{u}^T C * u + \frac{1}{2} u^T K * u - \\ & \dot{u}_0^T M u - \frac{1}{2} u_0^T C u - f^T * u \end{aligned} \quad (11)$$

算子 $*$ 代表两个时间函数的卷积

$$\varphi(t) * \psi(t) = \int_0^t \varphi(t - \tau) \psi(\tau) d\tau \quad (12)$$

将式(6)代入式(11)并取 $\delta \Pi_u = 0$ 可得

$$\begin{aligned} & (\dot{N}^T M * \dot{N} + \dot{N}^T C * N + N^T K * N) \bar{u} - \\ & N^T M \dot{u}(0) - \frac{1}{2} N^T C u(0) - N^T * f = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

2.2 基于 Gurtin 变分原理和一阶动力方程的时域有限元方程

式(3)对应的 Gurtin 泛函为^[20]

$$\begin{aligned} \Pi_U = & \frac{1}{2} \dot{U}^T A * U + \frac{1}{2} U^T B * U - \frac{1}{2} U_0^T A * U - \\ & F^T * U \end{aligned} \quad (14)$$

在时段 $[0, \Delta t]$ 内,将式(9)代入式(14)并取 $\delta \Pi_U = 0$,得

$$(\dot{\tilde{N}}^T A * \tilde{N} + \tilde{N}^T B * \tilde{N}) \bar{U} = \frac{1}{2} \tilde{N}^T A U_0 + \tilde{N}^T * F \quad (15)$$

令 $\bar{U} = [U_0 \ U_{n-1} \ U_n]^T$,式(15)可进一步写为

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_{n-1} \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_0 \\ r_{n-1} \\ r_n \end{Bmatrix} U_0 + \begin{Bmatrix} p_0 \\ p_{n-1} \\ p_n \end{Bmatrix} \quad (16)$$

式中 U_0 为时段起始节点值向量, U_{n-1} 为时段中间节点值向量, U_n 为时段终点值向量

$$S = \dot{\tilde{N}}^T A * \tilde{N} + \tilde{N}^T B * \tilde{N} \quad (17)$$

$$r = \frac{1}{2} \tilde{N}^T A, p = \tilde{N}^T * F \quad (18)$$

经式(16)可导出

$$U_n = Q_1 U_0 + \alpha_1 (\beta_1 p_{n-1} - p_n) \quad (19)$$

式中 Q_1 为传递矩阵

$$Q_1 = \alpha_1 [\beta_1 (r_{n-1} - S_{21}) + S_{31} - r_n] \quad (20)$$

$$\alpha_1 = [S_{32} S_{22}^{-1} S_{23} - S_{33}]^{-1}, \beta_1 = S_{32} S_{22}^{-1} \quad (21)$$

从而第 k 个时间区段的终点值向量 $U_{k,n}$ 可直接通过初始向量 $U_{1,0}$ 由式(22)给出

$$U_{k,n} = Q_1^k U_{1,0} + \sum_{i=1}^k Q_1^{k-i} \alpha_1 (\beta_1 p_{i,n-1} - p_{i,n}) \quad (22)$$

2.3 基于加权余量法和一阶动力方程的时域有限元方程

在时间区段 $[0, \Delta t]$,将权函数取作与式(9)相

同的形式 $\mathbf{V} = \tilde{\mathbf{N}}\bar{\mathbf{V}}$, 利用加权余量法可得^[21]

$$\left(\int_0^{\Delta t} \bar{\mathbf{V}}^T \dot{\tilde{\mathbf{N}}}^T \mathbf{A} \tilde{\mathbf{N}} dt + \int_0^{\Delta t} \bar{\mathbf{V}}^T \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{B} \tilde{\mathbf{N}} dt \right) \bar{\mathbf{U}} = \int_0^{\Delta t} \bar{\mathbf{V}}^T \tilde{\mathbf{N}}^T \tilde{\mathbf{N}} \mathbf{F} dt \quad (23)$$

由 V 的任意性有

$$\left(\int_0^{\Delta t} \dot{\tilde{\mathbf{N}}}^T \mathbf{A} \tilde{\mathbf{N}} dt + \int_0^{\Delta t} \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{B} \tilde{\mathbf{N}} dt \right) \bar{\mathbf{U}} = \int_0^{\Delta t} \tilde{\mathbf{N}}^T \tilde{\mathbf{N}} \mathbf{F} dt \quad (24)$$

令 $\bar{\mathbf{U}} = [\mathbf{U}_0 \quad \mathbf{U}_{n-1} \quad \mathbf{U}_n]^T$, 式(24)可写为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & \mathbf{H}_{13} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} & \mathbf{H}_{23} \\ \mathbf{H}_{31} & \mathbf{H}_{32} & \mathbf{H}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_{n-1} \\ \mathbf{U}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{q}_{n-1} \\ \mathbf{q}_n \end{Bmatrix} \quad (25)$$

式中

$$\mathbf{H} = \int_0^{\Delta t} \dot{\tilde{\mathbf{N}}}^T \mathbf{A} \tilde{\mathbf{N}} dt + \int_0^{\Delta t} \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{B} \tilde{\mathbf{N}} dt \quad (26)$$

$$\mathbf{q} = \int_0^{\Delta t} \tilde{\mathbf{N}}^T \tilde{\mathbf{N}} \mathbf{F} dt \quad (27)$$

由式(25)可导出

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{Q}_2 \mathbf{U}_0 + \boldsymbol{\alpha}_2 (\boldsymbol{\beta}_2 \mathbf{q}_{n-1} - \mathbf{q}_n) \quad (28)$$

式中

$$\mathbf{Q}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 (\mathbf{H}_{31} - \boldsymbol{\beta}_1 \mathbf{H}_{21}) \quad (29)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = [\mathbf{H}_{32} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{H}_{23} - \mathbf{H}_{33}]^{-1}, \boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{H}_{32} \mathbf{H}_{22}^{-1} \quad (30)$$

进而

$$\mathbf{U}_{k,n} = \mathbf{Q}_2^k \mathbf{U}_{1,0} + \sum_{i=1}^k \mathbf{Q}_2^{k-i} \boldsymbol{\alpha}_2 (\boldsymbol{\beta}_2 \mathbf{q}_{i,n-1} - \mathbf{q}_{i,n}) \quad (31)$$

3 混合形函数及构造方法

本节提出一种基函数由多项式和三角函数混合构成的形函数。

3.1 形函数的构造方法

考虑一个单自由度问题, 首先通过一组基函数 $\Psi_j(t)$ 的线性组合将 u 近似表达为^[22]

$$u(t) = \sum_{k=1}^m g_k \Psi_k = \{\mathbf{g}\}^T \{\Psi\} \quad (32)$$

另一方面, 可通过形函数和时间节点向量将 u 表示为

$$u(t) = \mathbf{N}\bar{\mathbf{u}} = \sum_{k=1}^m \varphi_k \bar{u}_k \quad (33)$$

φ_k 需满足^[23]

$$\varphi_i(t_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (i, j, \dots, m) \quad (34)$$

从而

$$\{\mathbf{g}\} = [\mathbf{C}]^{-1} \{\bar{\mathbf{u}}\} \quad (35)$$

式中 $[\mathbf{C}]$ 是一个转换矩阵

$$C_{ij} = \Psi_j(t_i) \quad (i, j = 1, 2, \dots, m) \quad (36)$$

形函数与基函数的关系为

$$\{\boldsymbol{\varphi}\} = [\mathbf{C}]^{-T} \{\boldsymbol{\psi}\} \quad (37)$$

3.2 混合形函数

设式(32)由三角函数和多项式混合构成

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n_0} a_k t^{k-1} + \sum_{i=1}^{n_1} \left(A_i \cos \frac{i\pi t}{\Delta t} + B_i \sin \frac{i\pi t}{\Delta t} \right) \quad (38)$$

$$m = n_0 + 2n_1 \quad (n_0 \geq 1) \quad (39)$$

基函数

$$\Psi_i(t) = \begin{cases} t^{i-1} & (i \leq n_0) \\ \cos((i-n_0)\pi t/\Delta t) & (n_0 < i \leq n_0+n_1) \\ \sin((i-n_0-n_1)\pi t/\Delta t) & (n_0+n_1 < i \leq m) \end{cases} \quad (40)$$

式(40)相关的形函数由式(37)给出。取 $n_0 = n_1 = 2$, 各形函数在时段 $[0, 1]$ 内随时间的变化如图1所示。

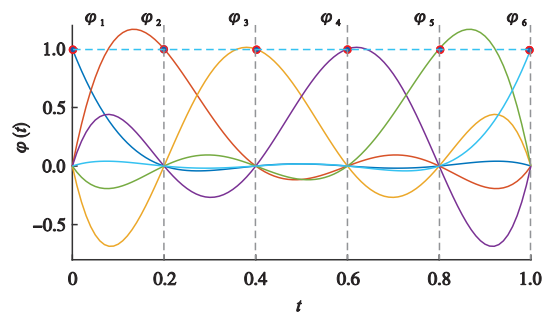


图1 形函数随时间的变化 ($n_0 = n_1 = 2$)
Fig. 1 Variation of shape functions with time for $n_0 = n_1 = 2$

由于本文形函数的多样性, 目前给出 $\sum \varphi_i = 1$ 的一般性理论证明似较为困难。为此在计算中对这一性质进行了数值检验, 即对所有使用的形函数, 随机选取时间段和时段内的时间点并计算 $\sum \varphi_i$ 。图2给出了在时段 $[0, 1]$ 上取30个随机时间点, 不同形函数的 $\sum \varphi_i$ 的计算结果, 均满足 $\sum \varphi_i = 1$ 。

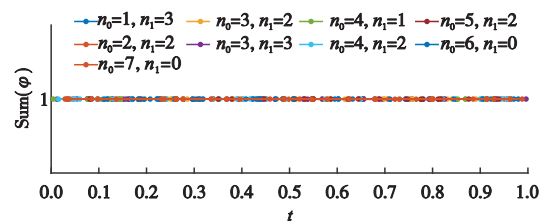


图2 $\sum \varphi_i$ 在时段 $[0, 1]$ 上随机时间点的变化
Fig. 2 Variation of $\sum \varphi_i$ at random time points in time period $[0, 1]$

4 数值算例

算例 1 和算例 2 考虑单自由度系统,对不同形式荷载作用下的常/变刚度、质量动力问题进行求解,算例 3 对一个二维齿轮状结构进行了动力响应分析。

在算例 3 中,为更简明地验证和分析算法的有效性,假定所有变量和参数均为无量纲。以 G1-TFE,G2-TFE,W-TFE 分别代表式(13)、式(15)和式(24)对应的时域有限元方法。

4.1 单自由度系统受迫振动

计算参数: $M=1, C=0, K=1, u(0)=\dot{u}(0)=0, T=20$, 荷载由式(41)给出。

$$f(t) = 0.02t^2 - 0.002t^3 - 0.2t - 2 \quad (41)$$

解析解为

$$u(t) = 2.04\cos t + 0.188\sin t - 0.002t^3 + 0.02t^2 - 0.188t - 2.04 \quad (42)$$

采用全局误差范数^[24]对计算精度进行评估:

$$E_{dis} = \sqrt{\sum_{i=1}^N [u_i - u_{i,r}]^2 / \sum_{i=1}^N u_{i,r}^2} \times 100\% \quad (43)$$

$$E_{vel} = \sqrt{\sum_{i=1}^N [v_i - v_{i,r}]^2 / \sum_{i=1}^N v_{i,r}^2} \times 100\% \quad (44)$$

式中 u_i 和 v_i 为第 i 个时间节点的位移和速度数值解, $u_{i,r}$ 和 $v_{i,r}$ 代表与此对应的解析解, N 为时段 $[0, T]$ 的时间节点总数。

表 1 给出中心差分法和 Newmark 法在不同步长下,计算得位移解的全局误差范数对比,随步长的增大,这两种方法计算精度显著降低。本文方法取不同步长和形函数时计算结果的比较列入表 2。

表 1 不同 Δt 下 Central 和 Newmark 的 E_{dis} 比较
Tab.1 Comparison of error norms given by Central and Newmark using different Δt

Method	Δt	0.5	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Central	E_{dis}	8.70	3.21	1.64	0.83	0.34	0.17
Newmark	E_{dis}	10.19	3.05	1.34	0.62	0.24	0.12

以上对比表明,三种时域有限元方法取 $\Delta t = 4, n_0 = 4, n_1 = 2$, 与步长为 $\Delta t = 0.01$ 的 Newmark 和中心差分法相比,计算精度更高;当 $\Delta t = 4$ 时,增加三角函数占比 / 当 $\Delta t = 1$ 时增加多项式函数占比,精度提高更明显;在相同步长和形函数下,G2-TFE 和 W-TFE 计算误差小于 G1-TFE,其中 G2-TFE 的计算误差小于 W-TFE。

表 2 不同形函数和 Δt 下本文方法误差范数比较

Tab.2 Comparison of error norms given by proposed methods using different shape function and Δt

Method	Δt	G1-TFE		G2-TFE		W-TFE	
		4	1	4	1	4	1
(3,2)	E_{dis}	0.106	0.084	0.047	0.012	0.084	0.014
	E_{vel}	0.485	0.300	0.161	0.049	0.340	0.053
(4,2)	E_{dis}	0.017	0.003	0.006	0.000	0.012	0.000
	E_{vel}	0.063	0.012	0.024	0.002	0.042	0.002
(3,3)	E_{dis}	0.011	0.011	0.007	0.001	0.007	0.001
	E_{vel}	0.049	0.038	0.025	0.004	0.029	0.005

4.2 变刚度、变质量问题

计算参数: $M = e^{-at}, C = 0.2\pi, K = 4\pi^2(1 - \beta e^{-t})f(t) = 10\sin\pi t, u(0) = 0.2, \dot{u}(0) = 0$ 。

考虑变刚度系统($\alpha=0, \beta=1$),取 $n_0=4, n_1=2, \Delta t=0.1$,在不同时刻($t=2,4,6,8,10$),比较本文解与收敛的 Newmark 法解,相对误差均在 1% 以内。

对于变质量系统($\alpha=1, \beta=0$),因 Gurtin 泛函涉及质量矩阵的卷积,式(13)和式(15)不再适用,因此采用 W-TFE 求解该问题。取 $n_0=4, n_1=2, \Delta t=0.2$,在不同时刻($t=1,2,3,4,5,6$),比较本文解与收敛的 Newmark 法解,位移、速度解的最大相对误差分别为 0.011% 和 0.013%。

4.3 二维齿轮状结构的动力响应分析

图 3(a)为一个二维齿轮状结构及相关边界条件的示意图,采用多边形比例边界有限单元^[25]进行空间离散,空间节点个数为 2112,最大总体自由度为 50688,比例边界有限单元网格如图 3(b)所示。

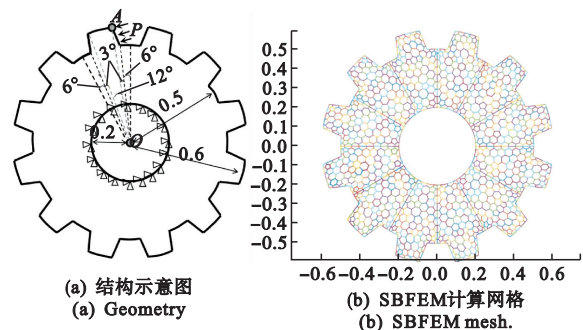


图 3 二维齿轮状结构
Fig.3 A 2D gear-shaped structure

计算参数: $E=2 \times 10^{11}, \rho=7850, \nu=0.3$,阶跃均布荷载为 $p=10^8$ 。以收敛的时域分段自适应比例边界有限元方法(TPAA-SBFEM)^[26](空间网格相同)和收敛的 ABAQUS 解为参考(节点数 14456, $\Delta t=10^{-7}$)。在 $t=t_k$ 时刻,采用式(45)对计

算精度进行评估

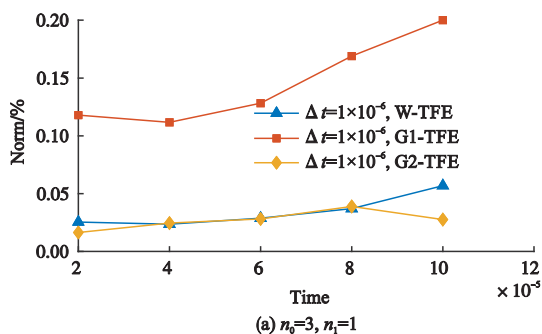
$$\alpha_{t=t_k} = \frac{\|\{\bar{u}_p\}_k - \{\bar{u}_r\}_k\|_2}{\|\{\bar{u}_p\}_k\|_2} \times 100\% \quad (45)$$

式中 $\{\bar{u}_p\}_k$ 和 $\{\bar{u}_r\}_k$ 分别为 $t=t_k$ 时刻本文解和 TPAA-SBFEM 解的位移向量。

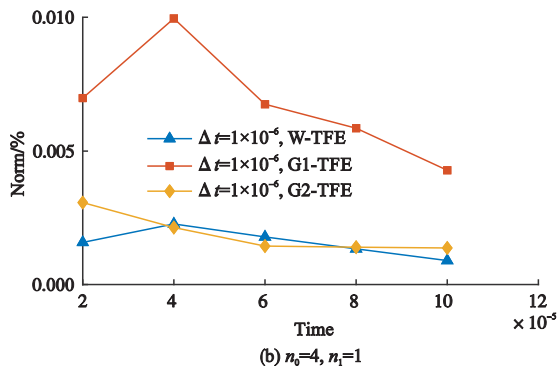
不同方法计算得到点 A 的 x 方向位移响应的比较如图 4 所示。时域有限元法采用不同形函数, 在不同时刻下的误差范数对比如图 5 所示。计算结果表明, 当计算规模较大时, 本文方法也可得到满意的结果。时域有限元方法的计算结果与 TPAA-SBFEM 和 ABAQUS 的数值结果都能较好吻合, 图 5 中位移解的全局误差范数都小于 0.2%。

4.4 W-TFE 和 G2-TFE 方法的稳定性分析

在式(19)和式(28)两端对 U_0 求导, 可得误差



(a) $n_0=3, n_1=1$

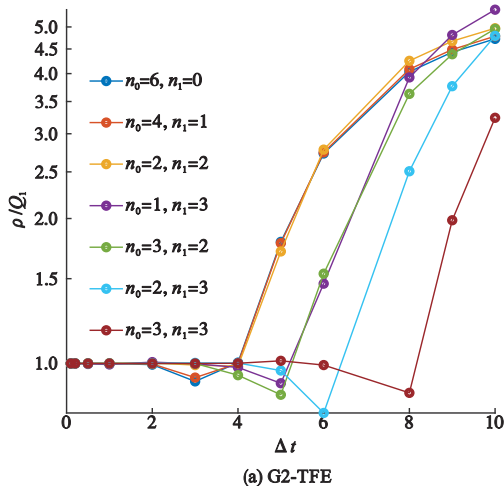


(b) $n_0=4, n_1=1$

图 5 不同方法的误差范数对比
Fig. 5 Comparisons of error norms given by different methods

通过一个单自由度无阻尼自由振动问题, 由式(47)对算法的稳定性进行数值分析。计算参数为 $M=1, K=4, C=0, \dot{u}(0)=0, u(0)=1$, 解析解为 $u(t) = \cos 2t$ 。

对于不同形函数, 图 6 中分别给出了 G2-TFE



(a) G2-TFE

传递矩阵 Q

$$Q = \frac{\Delta U_n}{\Delta U_0} \quad (46)$$

当 Q 的谱半径 $\rho(Q)$ 满足^[12]

$$\rho(Q) = \max(|\lambda(Q)|) \leq 1 \quad (47)$$

算法稳定, 其中 $\lambda(Q)$ 为误差传递矩阵的特征值。

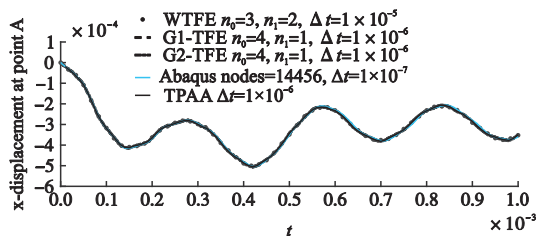
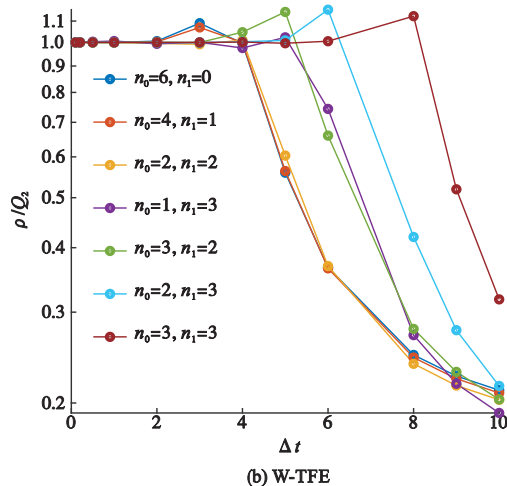


图 4 不同方法计算得点 A 处 u_x 随时间变化对比

Fig. 4 Comparison of the variation of u_x at point A with time given by different methods

和 W-TFE 误差传递矩阵的谱半径随 Δt 的变化, 由此可以看到两种算法均为条件稳定。数值验证表明, 当 $\rho(Q) > 1$ 时两种方法位移解的误差都会随时间增长逐渐放大。

此算例无外荷载作用, 由式(22, 31), $k\Delta t$ 时刻



(b) W-TFE

图 6 谱半径随步长变化
Fig. 6 Variation of $\rho(Q)$ with Δt

的位移和速度解可式(48)给出

$$U(k\Delta t) = Q^k U_0 \quad (48)$$

表3给出由逐段递推、式(48)在 $T=10^4$ 的计算结果与计算时间的比较。结果表明,与时段递推计算相比,采用式(48)可显著提高计算效率。

表3 不同方法位移、速度解与计算时间的对比
Tab.3 Comparison of displacement, velocity and computing time with different methods

Method	Δt	u	v	CPU/s
Exact	—	0.8132	-1.1640	—
Newmark	0.0002	0.8134	-1.1635	2.1703
W-TFE	0.1, $n_0=4, n_1=2$	0.8134	-1.1643	0.8830
G2-TFE	0.2, $n_0=5, n_1=1$	0.8134	-1.1631	0.4628
W-TFE(Q^k)	0.1, $n_0=4, n_1=2$	0.8134	-1.1643	0.0192
G2-TFE(Q^k)	0.2, $n_0=5, n_1=1$	0.8134	-1.1631	0.0129

4.5 计算结果分析

(1)表2及算例2的计算结果及比对表明,在本文的时域有限元框架下,采用以三角函数和多项式基函数混合构成的形函数,可准确有效地求解不同形式载荷下的常/变质量和刚度动力问题。

(2)形函数的构成是影响计算精度的主要因素,由于构成的多样性以及具体问题的不同,构成相关的计算精度的一般性讨论较为困难,应结合具体问题做进一步研究。算例1表明,通过增加三角函数项或多项式占比都可提高计算精度。

(3)三种时间有限元方法在步长较小时,计算精度相当;而步长偏大时,基于一阶动力方程的G2-TFE和W-TFE计算精度要高于基于二阶动力方程的G1-TFE,且G2-TFE和W-TFE相比,G2-TFE的计算精度往往更高,如表2所示。

(4)由于混合形函数具有多种形式,因此很难给出判定算法稳定性的解析表达。当形函数形式、计算步长及相关计算参数给定,可通过数值计算,由式(47)对G2-TFE和W-TFE的条件稳定性进行分析。

5 结论

本文提出了一种新的求解动力问题的时域有限元方法,主要结论如下。

(1)提出一种基于多项式和三角函数的混合形函数及其构造方法,结合Gurtin变分原理和加权余量法,建立了相应的时域有限元方程,从而为描述变量的时变特性提供了更灵活和多样性的选择。

(2)对基于一阶动力方程的时域有限元方法W-TFE和G2-TFE,提出了一种算法稳定性的分

析方法。

(3)基于一阶动力方程,给出了两种无需逐段递推的计算格式,可通过初始条件直接计算得到某时刻的位移与速度响应。

(4)将时域有限元方法与比例边界有限元方法相结合,可对一般二维弹性动力问题进行求解,但总体求解自由度会随时段内插值点的个数增加而增加,因此应考虑相应的降阶计算方法。

可从以下方面继续深化和扩展本文的研究工作。(1)进一步深化对时间有限元形函数的研究,如引入其他形式的基函数,以更精细地描述变量的时变特性,并兼顾计算精度与计算效率。(2)探讨将所提方法用于非线性动力问题^[37]及其他时域相关问题的求解,如粘弹性、瞬态热传导问题等,关键在于如何构建相应的时域有限元求解模型。

参考文献(References):

- [1] Gurtin M E. Variational principles for linear elastodynamics[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1964, **16**(1):34-50.
- [2] Argyris J H, Scharpf D W. Finite elements in time and space [J]. *Nuclear Engineering and Design*, 1969, **10**(4):456-464.
- [3] 蔡承文, 辉 毅, 刘明杰. 结构动响应的样条插值加权残量算法[J]. *上海力学*, 1991, **12**(2):53-61. (CAI Cheng-wen, YUN Fu, LIU Ming-jie. An algorithm for the dynamic response of structures based upon the spline interpolation and weighted residuals method [J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 1991, **12**(2):53-61. (in Chinese))
- [4] Subbaraj K, Dokainish M A. A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics—II. Implicit methods[J]. *Computers & Structures*, 1989, **32**(6):1387-1401.
- [5] Newmark N M. A method of computation for structural dynamics[J]. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 1959, **85**(3):67-94.
- [6] 于开平, 邹经湘. 时间域有限元法[J]. *力学进展*, 1998, **28**(4):8. (YU Kai-ping, ZOU Jing-xiang. The finite element methods in time domain[J]. *Advances in Mechanics*, 1998, **28**(4):8. (in Chinese))
- [7] 赵振峰, 刘迎曦. 时域内有限元离散方法的探讨[J]. *工程力学*, 1989, **6**(3):1-9. (ZHAO Zhen-feng, LIU Ying-xi. The research of finite element discretization technique in time domain[J]. *Engineering Mechanics*, 1989, **6**(3):1-9. (in Chinese))
- [8] 马立明, 何玉教. 应用Gurtin变分原理计算动力响应的单步时间元法[J]. *工程力学*, 1995, **12**(1):1-6.

- (MA Li-ming, He Yu-ao. A single-step time element method for dynamic response by Gurtin variational principle[J]. *Engineering Mechanics*, 1995, **12**(1): 1-6. (in Chinese))
- [9] 刘铁林, 吕和祥, 赵金城. 基于位移型 Gurtin 变分原理计算动力响应的逐步积分法[J]. *计算力学学报*, 1999, **16**(2): 151-156. (LIU Tie-lin, LÜ He-xiang, ZHAO Jin-cheng. A step-by-step integration method for dynamic response by gurtin variational principle [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 1999, **16**(2): 151-156. (in Chinese))
- [10] 宋立娜, 李勇军. 一种基于位移型 Gurtin 变分原理的逐步积分法[J]. *辽宁工学院学报*, 2006, **26**(1): 56-59. (SONG Li-na, LI Yong-jun. Step-by-step integration method based on Gurtin variational principle of displacement model [J]. *Journal of Liaoning University of Technology*, 2006, **26**(1): 56-59. (in Chinese))
- [11] 罗志国, 余慧, 黄伟江, 等. 基于简化 Gurtin 型变分原理的平面问题动力响应分析[A]. 第九届全国结构工程学术会议[C]. (LUO Zhi-guo, YU Hui, HUANG Wei-jiang, et al. Dynamic response analysis of plane problems based on simplified Gurtin variational principle[A]. 9th National Conference on Structural Engineering[C]. 2000. (in Chinese))
- [12] 隋永枫, 高 强, 钟万勰. 陀螺系统时间有限元方法[J]. *振动与冲击*, 2012, **31**(13): 95-98. (SUI Yong-feng, GAO Qiang, ZHONG Wan-xie. Time domain finite element method for gyroscopic systems[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2012, **31**(13): 95-98. (in Chinese))
- [13] 朱 宝, 高 强, 钟万勰. 三维时间-空间混和有限元[J]. *计算力学学报*, 2013, **30**(3): 331-335. (ZHU Bao, GAO Qiang, ZHONG Wan-xie. Three dimension harmony element method for time and space domain [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2013, **30**(3): 331-335. (in Chinese))
- [14] Nguyen T X, Tran L T. *A High-Order Time Finite Element Method Applied to Structural Dynamics Problems*[M]. Singapore: Springer, 2021.
- [15] French D, Peterson T. A continuous space-time finite element method for the wave equation[J]. *Mathematics of Computation*, 1996, **65**(214): 491-506.
- [16] 袁晓彬, 董江峰, 邱慈长, 等. 结构动力响应的时间有限元全域算法[J]. *应用力学学报*, 2010, **27**(3): 579-583. (YUAN Xiao-bin, DONG Jiang-feng, QIU Ci-chang, et al. A new universal algorithm based on time FEM for dynamic response[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2010, **27**(3): 579-583. (in Chinese))
- [17] 袁 全, 袁 驹. 运动方程一阶方程组格式的线性时域有限元及其 EEP 超收敛计算[J]. *工程力学*, 2021, **38**(S1): 14-20. (YUAN Quan, YUAN Si. A linear finite element and its EEP super-convergent solution for first order odes converted from motion equations [J]. *Engineering Mechanics*, 2021, **38**(S1): 14-20. (in Chinese))
- [18] 郭 攀, 武文华, 吴志刚. 基于时域间断有限元方法的生物组织非傅立叶热行为数值分析[J]. *计算力学学报*, 2013, **30**(4): 538-542. (GUO Pan, WU Wen-hua, WU Zhi-gang. Numerical analysis for non-fourier thermal behavior of biological tissue by time discontinuous galerkin finite element method [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2013, **30**(4): 538-542. (in Chinese))
- [19] 张亚辉, 林家浩. *结构动力学基础*[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2007. (ZHANG Ya-hui, LIN Jia-hao. *Fundamentals of Structural Dynamics* [M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2007. (in Chinese))
- [20] Wang P L, Peng J S, Zhang J Y. Semianalytic approach based on convolution-type variational principle and its applications to heat transfer[J]. *Journal of Tianjin Institute of Technology*, 1998, **14**(7): 49-54.
- [21] 徐次达. *固体力学加权残值法*[M]. 上海: 同济大学出版社, 1987. (XU Ci-da. *Weighted Residual Method of Solid Mechanics* [M]. Shanghai: Tongji University Press, 1987. (in Chinese))
- [22] He Y Q, Yang H T, Deeks A J. Use of Fourier shape functions in the scaled boundary method[J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2014, **41**: 152-159.
- [23] 王勰成. *有限单元法*[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003. (WANG Xu-cheng. *Finite Element Method* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003. (in Chinese))
- [24] Li J Z, Yu K P, He H N. A second-order accurate three sub-step composite algorithm for structural dynamics [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2020, **77**: 1391-1412.
- [25] Song C M. The scaled boundary finite element method in structural dynamics[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2009, **77**(8): 1139-1171.
- [26] Yu Y Q, He Y Q, Yang H T. An adaptive recursive SBFE algorithm for the dynamic analysis of Viscoelastic problems [J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2021, **128**: 171-187.

Hybrid shape functions and Gurtin variational principle based on temporal finite element method for dynamic analysis

CHEN Feng-ling, HE Yi-qian, YU Yang, YANG Hai-tian*

(State Key Laboratory of Structural Analysis, Optimization and CAE Software for Industrial Equipment,
Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: A kind of hybrid shape functions are presented using polynomial and trigonometric base functions, and three temporal finite element models are developed utilizing Gurtin variational principle and weighted residual technique, such that variables can be characterized more flexibly to cope with more complex time varying loads. An error transfer formula is derived for the first-order temporal FE model, by which stability analysis can numerically be conducted when the shape functions, time step size, and the numbers of temporal nodes are determined. Various numerical examples with constant/variable stiffness and mass, and polynomial and harmonic excitations are provided to illustrate the efficiency of the proposed approaches, and impacts of different temporal FE models/shape functions, different numbers of interpolation points, and different step sizes, etc. are taken into account. Satisfactory results are achieved in comparison with analytical solutions, results from Newmark method, and Central difference method, etc.

Key words: dynamic analysis; hybrid shape functions; temporal finite element; gurtin variational principle; weighted residual method

(上接第 990 页)

Topology optimization method for structural configuration design containing heterogeneous outer surface layers

LI Ran, HU Jing-yu, LIU Shu-tian*

(State Key Laboratory of Structural Analysis, Optimization and CAE Software for
Industrial Equipment, Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: The harsh service environment requires the heterogeneous surface layer structure to meet the specific function while exhibiting lightweight characteristics. In other words, the outer surface of the structure can not be used as only a functional layer. It must also be involved in load transfer. Its influence should be considered when designing the structure. This paper proposes a topology optimization method for structural configuration design containing heterogeneous outer surface layers. Firstly, a structural surface layer modeling technique based on an erosion algorithm is used to construct an equivalent model of the heterogeneous surface layer structure through smooth filtering and discrete projecting. Second, the open/closed holes in the structure are identified by the nonlinear virtual temperature method, and based on this, the outer surface layer of the structure exposed to the working environment and the inner surface layer of the structure attached to the enclosed holes are distinguished. Finally, a topology optimization model for structures with heterogeneous outer surface layers is developed, and the sensitivity information of the objective function concerning the design variables is derived. Several numerical examples verify the effectiveness of the proposed method.

Key words: structures with heterogeneous surface layer; topology optimization; surface layer identification and description; virtual temperature method