

DOI: 10.7511/jslx20230301002

# 缆线在铅垂面内弯曲的大变形曲线微分方程及其数值解法

李立新\*, 王猛, 张巍

(浙江大学 机械设计研究所, 杭州 310058)

**摘要:** 针对民用与工业应用中经常用到的自然弯曲的软管和柔缆, 归纳出5个共同特点, 作为本文研究缆线的基本假设。从这些假设出发, 根据受力和应力分析, 首次推导了缆线在铅垂面内弯曲的大变形曲线方程。列出了多种端部约束条件下相对应的求解大变形曲线的方程组。证明了悬链线与纯弯曲线都是本文的特例。提出了获得数值解的递进法, 并针对两端夹持约束的情形给出了具体算例。说明了存在多解的原因以及比较不同解稳定性的方法。

**关键词:** 缆线; 大变形曲线; 铅垂面内弯曲; 泛函极值; 数值方法

**中图分类号:** TH123+.1; O176.1

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1007-4708(2024)05-0970-07

## 1 引言

在民用与工业应用中, 特别是伺服装置中, 常见到自然弯曲的软管和柔缆, 如图1所示。在使用过程中, 其两个端点之间的相对位置保持不变; 有的两个端点之间的相对位置会在一定的范围内往复变化; 有的则因软管内充气或柔缆内通电而改变其弯曲刚度。这些弯曲的软管和柔缆, 其共同特点是, (1) 只在两端有约束作用, 中间部分仅受重力作用; (2) 应变不大, 处于弹性范围; (3) 变形很大, 小变形假设不再适用; (4) 只受弯曲和拉伸作用; (5) 弯曲仅发生在铅垂面内。本文研究将满足这5个特点的软管和柔缆简称缆线。

在实际应用中, 缆线通常是用多种材料复合而成的, 国内外针对缆线的截面特性均有大量的研究<sup>[1-4]</sup>, 其抗弯刚度  $EI$  和抗拉刚度  $EA$  一般需要通过实验进行测定, 也有学者尝试使用有限元模型计算不同种类缆线的抗弯刚度与抗拉刚度<sup>[5-7]</sup>。大量实验测试表明<sup>[8-11]</sup>, 在小应变或弹性范围内, 对给定型制的缆线而言, 其抗弯刚度  $EI$  和抗拉刚度  $EA$  均可视为常数。因而, 单从计算受力大小和大变形曲线的形状来说, 材料力学中关于弹性梁的平

面弯曲理论和关于弹性杆的拉伸变形理论均可应用于缆线分析。但梁在各种约束条件下的挠曲线方程<sup>[12]</sup>并不能直接应用, 因为那是在小变形条件下推导出来的。



图1 民用与工业应用中的软管和柔缆  
Fig. 1 Hoses and flexures for civil and industrial applications

在大变形条件下, 林晓波等<sup>[13]</sup>借助有限元软件进行了海底电缆弯曲特性的研究; 杨敏冬等<sup>[14]</sup>采用非线性有限元方法研究海洋系泊缆在重力等作用下的静态平衡位形; 林超等<sup>[15]</sup>针对大变形的

收稿日期: 2023-03-10; 修改稿收到日期: 2023-06-15.

作者简介: 李立新\* (1967-), 男, 博士, 副教授 (E-mail: lilixin@zju.edu.cn)

引用本文: 李立新, 王猛, 张巍. 缆线在铅垂面内弯曲的大变形曲线微分方程及其数值解法[J]. 计算力学学报, 2024, 41(5): 970-976.  
LI Li-xin, WANG Meng, ZHANG Wei. Differential equation of large deformation curve for cables bending in vertical plane and its numerical solution method[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2024, 41(5): 970-976.

海洋系泊缆采用柔性杆模型建立运动方程,运动方程离散后,使用有限元方法研究了系泊缆的平衡位形与张力分布。但考虑重力环境的针对平面弯曲和拉伸形变的大变形曲线,迄今为止,只有采用有限元分析的方法获得<sup>[16,17]</sup>针对具体问题的结果。当然,采用商品化的有限元分析软件,在设置大变形选项之后,一般都可以针对具体问题获得一个具体的结果。但纯粹根据理论分析推导出来的描述大变形曲线的方程,仅发现了两个特殊解。第一个解是悬链线,1690年由伽利略误当抛物线研究后,1691年由惠根斯和伯努利分别给出。其实际对应于两端均为位置固定但角度自由的约束,并且为  $EI=0, EA=\infty$  的理想情形。第二个方程是纯弯曲线,由文献<sup>[18]</sup>给出,其相当于假设  $EA=\infty$ ,并且忽略了重力影响的理想情形。本文目的在于从前述5个关于缆线的基本假设出发,经由单纯的理论推导,得出一个通用的大变形曲线的微分方程,为相关领域的设计及预测提供帮助。

## 2 大变形曲线的微分方程

在材料力学中,将梁的轴线弯曲成一条位于纵向对称平面内的平面曲线,称为平面弯曲。此平面曲线称为挠曲线,表示梁的弯曲变形。挠曲线的曲率满足<sup>[12]</sup>

$$\kappa = M/(EI) \quad (1)$$

式中  $M$  为弯矩,  $EI$  为梁的抗弯刚度。

当平面弯曲的梁同时受到轴向载荷时,挠曲线产生的拉伸应变满足<sup>[12]</sup>

$$\bar{\epsilon} = N/(EA) \quad (2)$$

式中  $N$  为拉力,  $EA$  称为梁的抗拉刚度。

在材料力学中研究梁的平面弯曲时,一般满足小变形假设,此时挠曲线接近直线( $x$ 轴),挠曲线的曲率可以用挠度  $y$  对  $x$  的二阶导数近似代替,挠曲线的微分方程为<sup>[12]</sup>

$$M(x)/(EI) = d^2y/(dx^2) \quad (3)$$

在本文讨论的情形,虽然应变不大,变形依然是弹性的,但小变形假设不再成立,挠曲线不能视为近似直线,方程(3)不再适用。在这种情形下,挠度的定义也不再适用。因此,本文不再使用挠曲线这个名称,而是改称为大变形曲线。

下面讨论仅在起点和终点两处受到约束的重力环境下的缆线,在铅垂面内发生平面弯曲和拉伸变形时的大变形曲线。

图2所示为一段自然长度为  $L_0$  的缆线的大变形曲线,从起点  $(x_0, y_0)$  到终点  $(x_1, y_1)$  的实际长

度为  $L$ 。为了研究大变形曲线的形状,选取从起点算起的缆线的自然长度  $s_0$  作为曲线坐标。现在假设在曲线坐标  $s_0$  处将大变形曲线一分为二,并设前段曲线的实际长度为  $s$ ,分点坐标为  $(x, y)$ ,分点处曲线的切线方向与  $x$  轴的夹角为  $\alpha$ ,其所受的由后段缆线施加的弯矩、拉力和剪力分别为  $M$ (逆时针)、 $N$  和  $F$ ( $N$  顺时针转过  $90^\circ$ )。再假设前段缆线在起点处的切线方向与  $x$  轴的夹角为  $\alpha_0$ ,其所受的约束反力包括弯矩、拉力和剪力分别为  $M_0$ (顺时针)、 $N_0$  和  $F_0$ ( $N_0$  顺时针转过  $90^\circ$ );后段缆线在终点处的切线方向与  $x$  轴的夹角为  $\alpha_1$ ,其所受的约束反力包括弯矩、拉力和剪力分别为  $M_1$ (逆时针)、 $N_1$  和  $F_1$ ( $N_1$  顺时针转过  $90^\circ$ )。则曲线的参数方程可以表示为

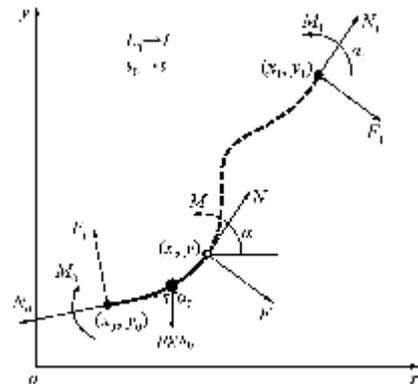


图2 平面弯曲缆线的大变形曲线  
Fig. 2 Large deformation curve of a flat bending cable

$$\begin{cases} s = s(s_0) \\ \alpha = \alpha(s_0) \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = x(s_0) = x_0 + \int_0^{s_0} \dot{s} \cos \alpha ds_0 \\ y = y(s_0) = y_0 + \int_0^{s_0} \dot{s} \sin \alpha ds_0 \end{cases} \quad (4)$$

大变形曲线的曲率为

$$\kappa = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha/ds_0}{ds/ds_0} = \frac{\dot{\alpha}}{\dot{s}} \quad (5)$$

代入式(1),有  $M = EI \dot{\alpha} \dot{s}^{-1}$  (6)

从而  $\frac{dM}{ds} = \frac{dM}{\dot{s} ds_0} = EI [\ddot{\alpha} \dot{s}^{-2} - \dot{\alpha} \ddot{s} \dot{s}^{-3}]$  (7)

取图2的前段曲线,其受力平衡方程为

$$\begin{cases} N = N_0 \cos(\alpha - \alpha_0) - F_0 \sin(\alpha - \alpha_0) + g\rho s_0 \sin \alpha \\ F = N_0 \sin(\alpha - \alpha_0) + F_0 \cos(\alpha - \alpha_0) - g\rho s_0 \cos \alpha \end{cases} \quad (8)$$

式中  $g\rho$  为缆线单位长度的重量。

根据式(2),有

$$N/(EA) = \bar{\epsilon} = (ds - ds_0)/ds_0 = \dot{s} - 1 \quad (9)$$

结合式(8)的第一式,可得

$$\begin{cases} \dot{s} = 1 + [N_0 \cos(\alpha - \alpha_0) - F_0 \sin(\alpha - \alpha_0) + g\rho s_0 \sin \alpha]/(EA) \\ \dot{s} = [-N_0 \dot{\alpha} \sin(\alpha - \alpha_0) - F_0 \dot{\alpha} \cos(\alpha - \alpha_0) + g\rho(\sin \alpha + s_0 \dot{\alpha} \cos \alpha)]/(EA) \end{cases} \quad (10)$$

利用材料力学的公式<sup>[12]</sup>

$$dM/ds = F \quad (11)$$

并代入式(7)和式(8)的第二式,可得

$$EI[\ddot{\alpha}\dot{s}^{-2} - \dot{\alpha}\ddot{s}\dot{s}^{-3}] = N_0 \sin(\alpha - \alpha_0) + F_0 \cos(\alpha - \alpha_0) - g\rho s_0 \cos\alpha \quad (12)$$

从而有

$$\ddot{\alpha} = \dot{\alpha}\dot{s}^{-1} + [N_0 \sin(\alpha - \alpha_0) + F_0 \cos(\alpha - \alpha_0) - g\rho s_0 \cos\alpha]\dot{s}^2/(EI) \quad (13)$$

将式(10)代入式(13),可得

$$\ddot{\alpha} = \ddot{\alpha}(s_0; \alpha, \dot{\alpha}; \alpha_0, N_0, F_0) \quad (14)$$

这是缆线在铅垂面内弯曲的大变形曲线方程。

是一个以  $s_0$  为自变量的二阶微分方程,其中  $\alpha_0$ ,  $N_0$  和  $F_0$  都是常数,在不同的约束条件下,其可能是给定的,也可能是待定的。

### 3 大变形曲线微分方程的求解

求解微分方程(14)所需的初始条件为

$$\begin{cases} \alpha|_{s_0=0} = \alpha_0 \\ \dot{\alpha}|_{s_0=0} = \dot{\alpha}_0 \end{cases} \quad (15)$$

式中  $\dot{\alpha}_0$  为常数,在不同的约束条件下,可能是给定的,也可能是待定的。

引入初始条件(15)之后,从方程(14)可以解出

$$\begin{cases} \alpha = \alpha(s_0; \alpha_0, \dot{\alpha}_0, N_0, F_0) \\ \dot{\alpha} = \dot{\alpha}(s_0; \alpha_0, \dot{\alpha}_0, N_0, F_0) \\ \dot{s} = \dot{s}(s_0; \alpha_0, \dot{\alpha}_0, N_0, F_0) \end{cases} \quad (16)$$

当缆线的两端均为夹持约束(即位置和切线方向都给定)时,  $\alpha_0$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $x_1$  和  $y_1$  是给定的,而  $\dot{\alpha}_0$ ,  $N_0$  和  $F_0$  是待定的。这三个待定的常数满足方程组(为了区分,未知量加下划线表示,下同)

$$\begin{cases} \alpha(s_0; \alpha_0, \dot{\alpha}_0, N_0, F_0)|_{s_0=L_0} = \alpha_1 \\ x_0 + \int_0^{L_0} [\dot{s}(s_0; \alpha_0, \dot{\alpha}_0, N_0, F_0) \cos\alpha] ds_0 = x_1 \\ y_0 + \int_0^{L_0} [\dot{s}(s_0; \alpha_0, \dot{\alpha}_0, N_0, F_0) \sin\alpha] ds_0 = y_1 \end{cases} \quad (17)$$

于是,微分方程(14)的求解问题转变成了一个非线性方程组(17)的求解问题,而微分方程(14)的解则用来构造方程组(17)的各个方程。本文将方程组(17)称为求解大变形曲线的方程组。

### 4 其他约束形式的方程组

除两端都是夹持约束的情形外,还有其他各种可能的约束形式。

(1) 当缆线的两端均为位置固定但角度自由的约束时,这相当于将两端均安装在各自的铰链上,从而在两端的  $M=0$ ,再根据式(1,5)可知相应的  $\dot{\alpha}=0$ 。因此,  $\dot{\alpha}_0=0$ ,  $\dot{\alpha}_1=0$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $x_1$  和  $y_1$  是给

定的,而  $\alpha_0$ ,  $N_0$  和  $F_0$  是待定的。此时,求解大变形曲线的方程组为

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(s_0; \alpha_0, \dot{\alpha}_0, N_0, F_0)|_{s_0=L_0} = 0 \\ x_0 + \int_0^{L_0} [\dot{s}(s_0; \alpha_0, \dot{\alpha}_0, N_0, F_0) \cos\alpha] ds_0 = x_1 \\ y_0 + \int_0^{L_0} [\dot{s}(s_0; \alpha_0, \dot{\alpha}_0, N_0, F_0) \sin\alpha] ds_0 = y_1 \end{cases} \quad (18)$$

(2) 起点为夹持约束,终点为位置固定但角度自由的约束,这相当于将终点安装在一个铰链上。因此,  $\dot{\alpha}_1=0$ ,  $\alpha_0$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $x_1$  和  $y_1$  是给定的,而  $\dot{\alpha}_0$ ,  $N_0$  和  $F_0$  是待定的。此时,求解大变形曲线的方程组为

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(s_0; \alpha_0, \dot{\alpha}_0, N_0, F_0)|_{s_0=L_0} = 0 \\ x_0 + \int_0^{L_0} [\dot{s}(s_0; \alpha_0, \dot{\alpha}_0, N_0, F_0) \cos\alpha] ds_0 = x_1 \\ y_0 + \int_0^{L_0} [\dot{s}(s_0; \alpha_0, \dot{\alpha}_0, N_0, F_0) \sin\alpha] ds_0 = y_1 \end{cases} \quad (19)$$

(3) 起点为位置固定但角度自由的约束,这相当于将起点安装在一个铰链上,终点为夹持约束。因此,  $\dot{\alpha}_0=0$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $x_1$ ,  $y_1$  和  $\alpha_1$  是给定的,而  $\alpha_0$ ,  $N_0$  和  $F_0$  是待定的。此时,求解大变形曲线的方程组为

$$\begin{cases} \alpha(s_0; \alpha_0, \dot{\alpha}_0, N_0, F_0)|_{s_0=L_0} = \alpha_1 \\ x_0 + \int_0^{L_0} [\dot{s}(s_0; \alpha_0, \dot{\alpha}_0, N_0, F_0) \cos\alpha] ds_0 = x_1 \\ y_0 + \int_0^{L_0} [\dot{s}(s_0; \alpha_0, \dot{\alpha}_0, N_0, F_0) \sin\alpha] ds_0 = y_1 \end{cases} \quad (20)$$

(4) 起点为夹持约束,终点为滑动约束,这相当于将终点安装在一个夹持的滑块上,因而  $F_1$  与  $N_1$  在导轨方向上的分力之和为零。因此,  $\alpha_0$ ,  $x_0$ ,  $y_0$  和  $\alpha_1$  是给定的,而  $\dot{\alpha}_0$ ,  $N_0$  和  $F_0$ ,  $x_1$  和  $y_1$  是待定的,同时,点  $(x_1, y_1)$  约束在过点  $(x_2, y_2)$  且对  $x$  轴偏角为  $\beta_1$  的直线上。此时,求解大变形曲线的方程组为

$$\begin{cases} \alpha(s_0; \alpha_0, \dot{\alpha}_0, N_0, F_0)|_{s_0=L_0} = \alpha_1 \\ x_0 + \int_0^{L_0} [\dot{s}(s_0; \alpha_0, \dot{\alpha}_0, N_0, F_0) \cos\alpha] ds_0 = x_1 \\ y_0 + \int_0^{L_0} [\dot{s}(s_0; \alpha_0, \dot{\alpha}_0, N_0, F_0) \sin\alpha] ds_0 = y_1 \\ y_1 - y_2 = (x_1 - x_2) \tan\beta_1 \\ \cos(\alpha_1 - \beta_1) N(s_0; \alpha_0, \dot{\alpha}_0, N_0, F_0) \Big|_{\substack{s_0=L_0 \\ \alpha=\alpha_1}} + \\ \sin(\alpha_1 - \beta_1) F(s_0; \alpha_0, \dot{\alpha}_0, N_0, F_0) \Big|_{\substack{s_0=L_0 \\ \alpha=\alpha_1}} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

(5) 起点为滑动约束,这相当于将起点安装在一个夹持的滑块上,因而  $F_0$  与  $N_0$  在导轨方向上的分力之和为零,终点为夹持约束。因此,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $x_1$  和  $y_1$  是给定的,而  $\dot{\alpha}_0$ ,  $N_0$  和  $F_0$ ,  $x_0$  和  $y_0$  是待定的,同时,点  $(x_0, y_0)$  约束在过点  $(x_2, y_2)$  且对  $x$  轴偏

角为  $b_0$  的直线上。此时,求解大变形曲线的方程组为

$$\begin{cases} \alpha(s_0; \alpha_0, \dot{\alpha}_0, N_0, F_0)|_{s_0=L_0} = \alpha_1 \\ x_0 + \int_0^{L_0} [\dot{s}(s_0; \alpha_0, \dot{\alpha}_0, N_0, F_0) \cos \alpha] ds_0 = x_1 \\ y_0 + \int_0^{L_0} [\dot{s}(s_0; \alpha_0, \dot{\alpha}_0, N_0, F_0) \sin \alpha] ds_0 = y_1 \\ y_0 - y_2 = (x_0 - x_2) \tan \beta_0 \\ \cos(\alpha_0 - \beta_0) N_0 + \sin(\alpha_0 - \beta_0) F_0 = 0 \end{cases} \quad (22)$$

(6) 起点为夹持约束,终点无约束,因而在终点的拉力、剪力与弯矩均为零。因此,  $\dot{\alpha}_1 = 0, \alpha_0, x_0, y_0, N_1 = 0$  和  $F_1 = 0$  是给定的,而  $\dot{\alpha}_0, \alpha_1, N_0$  和  $F_0$  是待定的。此时,求解大变形曲线的方程组为

$$\begin{cases} \alpha(s_0; \alpha_0, \dot{\alpha}_0, N_0, F_0)|_{s_0=L_0} = \alpha_1 \\ \dot{\alpha}(s_0; \alpha_0, \dot{\alpha}_0, N_0, F_0)|_{s_0=L_0} = 0 \\ N_0 \cos(\alpha_1 - \alpha_0) - F_0 \sin(\alpha_1 - \alpha_0) + g\rho L_0 \sin \alpha_1 = 0 \\ N_0 \sin(\alpha_1 - \alpha_0) + F_0 \cos(\alpha_1 - \alpha_0) - g\rho L_0 \cos \alpha_1 = 0 \end{cases} \quad (23)$$

(7) 其余各种不同约束及其组合方式,包括中间有一个位置限定在给定点处一个铰链上的情形,均可参照前述情形,列出相应的求解大变形曲线的方程组,不再赘述。

### 5 数值解法及实例

为了描述求解大变形曲线微分方程(14)的数值解法,以两端均为夹持约束,即方程组(17)为例进行说明,其 Matlab 程序如下。

```
function freeBending() %主函数
    global EI EA gr x0 y0 A0 x1 y1 A1 L0 ApNF0;
    ..... %各量赋值
    ApNF0=[Ap0, N0, F0]; %常数, N0 和 F0 赋初值
    ApNF0=fsolve(@findF, ApNF0); %求解(17)
    Ap0=ApNF0(1); N0=ApNF0(2); F0=ApNF0(3);
    %用解出的常数求解微分方程(14)
    T=odeset('RelTol', 1e-7);
    [s0, A]=ode45(@odefun, [0, L0], [A0, Ap0], T);
    ..... %输出结果
end
function zeroF=findF(F) %定义方程组(17)
    global EA gr x0 y0 x1 y1 A1 L0 A0 N0 F0;
    Ap0=F(1); N0=F(2); F0=F(3);
    %用迭代中最近更新的常数求解微分方程(14)
    T=odeset('RelTol', 1e-7);
    [s0, A]=ode45(@odefun, [0, L0], [A0, Ap0], T);
    cA=cos(A(:, 1)); sA=sin(A(:, 1));
    cA0=cos(A(:, 1) - A0); sA0=sin(A(:, 1) - A0);
    sp=1 + (N0 * cA0 - F0 * sA0 + gr * s0 * sA)/EA;
    x=x0 + cumtrapz(s0, sp * cA);
```

```
y=y0 + cumtrapz(s0, sp * sA);
zeroF=[
    A(end, 1) - A1;
    x(end) - x1;
    y(end) - y1;
];
end
function dAds0 = odefun(s0, A) %定义方程(14)
    global EI EA gr A0 N0 F0;
    cA=cos(A(1)); sA=sin(A(1));
    cA0=cos(A(1) - A0); sA0=sin(A(1) - A0);
    sp=1 + (N0 * cA0 - F0 * sA0 + gr * s0 * sA)/EA;
    spp=(-N0 * A(2) * sA0 - F0 * A(2) * cA0
    + gr * (sA + s0 * A(2) * cA))/EA;
    dAds0=[
    A(2);
    A(2) * spp/sp + (N0 * sA0 + F0 * cA0
    - gr * s0 * cA) * sp * sp/EI;
];
end
```

成功运行上述程序的关键是如何给全局变量 ApNF0 赋一个好的初值。如果无合适的初值,则可能找不到解。当这种情况出现时,本文的建议是先试着修改所给的已知参数以获得一个正确解,然后将给 ApNF0 赋初值的语句注释掉,再逐步修改相关参数直到给定参数为止,在这个过程中每次都用前次计算获得的 ApNF0 作为初值计算,称为递进法。

如文献[18]指出,在某些条件下,大变形曲线的解并不唯一,因为从本质上讲,这是一个非线性泛函的极值问题。此泛函可用缆线中的弹性势能与重力势能之和表示,即

$$\begin{aligned} W &= \iiint \frac{1}{2} E \epsilon^2 dV + \int_0^{L_0} g\rho(y - y_c) ds_0 = \\ &= \frac{E}{2} \iiint \epsilon^2 ds_0 dA + \int_0^{L_0} g\rho(y - y_c) ds_0 = \\ &= \frac{E}{2} \int_0^{L_0} \left( \iint_A \epsilon^2 dA \right) ds_0 + \int_0^{L_0} g\rho(y - y_c) ds_0 = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{L_0} \left[ E \iint_A \epsilon^2 dA + 2g\rho(y - y_c) \right] ds_0 \end{aligned} \quad (24)$$

式中  $y_c$  为  $y_0$  与  $y_1$  的平均值,  $\epsilon$  为缆线截面内分布的正应变,并且

$$\begin{aligned} \iint_A \epsilon^2 dA &= \iint_A \left( \frac{M}{EI} y + \frac{N}{EA} \right)^2 dA = \frac{M^2}{E^2 I^2} \iint_A y^2 dA + \\ &+ 0 + \frac{N^2}{E^2 A^2} \iint_A dA = \frac{M^2}{E^2 I} + \frac{N^2}{E^2 A} \end{aligned} \quad (25)$$

考虑式(6,9),有

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{L_0} [EI \dot{\alpha}^2 s^{-2} + EA(s-1)^2 + 2g\rho y] ds_0 \quad (26)$$

式中 用来积分的三项分别代表弯曲、拉伸和重力产生的势能。在一般情形下,方程(14)有一个或两个势能最小的解,其他的解并不稳定。在这些不同的解中,用式(26)计算的值越小越稳定。而通过数值计算获得的特定解将取决于待定常数所赋的初值,或者递进法中历经的中间解。

### 6 特例与实例计算

(1) 悬链线。悬链线是 1691 年由惠根斯和伯努利分别给出,用来描述两端固定的链条在重力作用下自然形成的平面曲线。其常用方程为

$$y - y_0 = \frac{N_0}{\rho g} \cosh \left[ \frac{\rho g}{N_0} (x - x_0) \right] \quad (27)$$

式中  $x_0$  和  $y_0$  是悬链线最低点的坐标。从最低点到  $(x, y)$  的曲线长度为

$$s_0 = \frac{N_0}{\rho g} \sinh \left[ \frac{\rho g}{N_0} (x - x_0) \right] \quad (28)$$

由(27)可知

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx} = \sinh \left[ \frac{\rho g}{N_0} (x - x_0) \right] \quad (29)$$

代入(28)可得

$$\alpha = \arctan \frac{\rho g}{N_0} s_0 \quad (30)$$

另一方面,在式(8)第二式中令

$$\begin{cases} \alpha_0 = 0 \\ F_0 = 0 \end{cases} \quad (31)$$

可立即得到式(30),表明悬链线只是本文讨论的大变形曲线微分方程的一个特例,其对应于两端均为位置固定但角度自由的约束,并且  $EI=0, EA=\infty$  的理想情形。

(2) 纯弯曲线。假设  $EA=\infty$  并且  $gr=0$ , 则式(10)为

$$\begin{cases} \dot{s} = 1 \\ \dot{s} = 0 \end{cases} \quad (32)$$

此时式(13)为

$$EI\ddot{\alpha} = N_0 \sin(\alpha - \alpha_0) + F_0 \cos(\alpha - \alpha_0) \quad (33)$$

通过积分运算,可得

$$EI\dot{\alpha}^2 = EI\dot{\alpha}_0^2 + 2N_0 - 2N_0 \cos(\alpha - \alpha_0) + 2F_0 \sin(\alpha - \alpha_0) \quad (34)$$

对照可知,式(34)与文献[18]的方程(3.6)等价。

从式(34)可得

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\pm \sqrt{EI} d\alpha}{\sqrt{EI\dot{\alpha}_0^2 + 2N_0 - 2N_0 \cos(\alpha - \alpha_0) + 2F_0 \sin(\alpha - \alpha_0)}} = \Gamma(\alpha; \alpha_0, N_0, F_0) = s_0 \quad (35)$$

即大变形平面纯弯曲的曲线方程。其中符号  $\pm$  需根据具体问题中的曲率零点分段选取。

(3) 数值计算实例。考虑一段两端夹持固定的电缆,其参数为  $L_0=2000 \text{ mm}, EI=3 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{mm}^2, EA=2 \times 10^5 \text{ N}, g\rho=0.0245 \text{ N/mm}, x_0=y_0=0$ 。本文列出的参数大约相当于由弹性模量为 100 MPa 的匀质材料制成的、直径为 50 mm、每米质量为 2.5 kg 的缆线。

**算例 1**  $\alpha_0 = \alpha_1 = 90^\circ, x_1 = 0, y_1 = 1000 \text{ mm}$ 。

将  $A_p N F_0$  初值赋为  $[0, 100, 0]$  试算,可获得一个不稳定的解,即图 3 中间的一条 4 弯曲线,缆线总势能为 2054.2 Nmm(弯曲 99.52%,拉伸 0.48%,重力 0.00%)。将  $A_p N F_0$  初值赋为  $[0.001, 0, 0]$  得到图 3 中右凸曲线;将  $A_p N F_0$  初值赋为  $[-0.001, 0, 0]$  得到图 3 中左凸曲线。这两条曲线在理论上是完全对称的并且具有相同的势能。两条大变形曲线的总伸长量均为  $-2.0 \text{ mm}$ ,缆线总势能均为 342.8 Nmm(弯曲 100.00%,拉伸 0.08%,重力  $-0.08\%$ )。

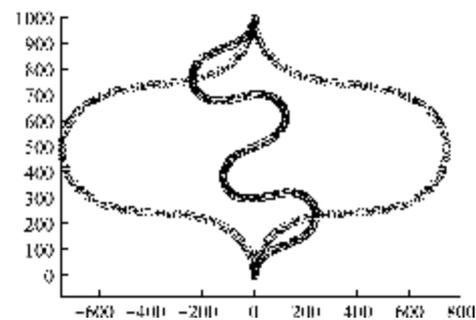


图 3 算例 1 的三个解  
Fig. 3 Three solutions of example 1

**算例 2**  $\alpha_0 = \alpha_1 = 0, x_1 = 1000 \text{ mm}, y_1 = 0$ 。

将  $A_p N F_0$  初值赋为  $[0, 0, 0]$ ,可得图 4 的上凸曲线,大变形曲线的总伸长量为  $-2.1 \text{ mm}$ ,缆线总势能为 361.3 Nmm(弯曲 94.87%,拉伸 0.09%,重力 5.04%)。很明显,这个问题还有一个更稳定的下凸曲线解,下面采用递进法获取,先将  $\alpha_0$  改为  $-30^\circ$ ,  $\alpha_1$  改为  $30^\circ$ ,可得一个下凸的中间解;再将给  $A_p N F_0$

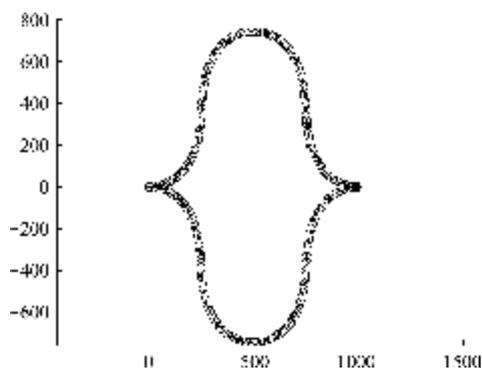


图 4 算例 2 的两个解  
Fig. 4 Two solutions of example 2

赋初值的语句注释掉,并将  $a_0$  与  $a_1$  改回 0 重新计算,可得图 4 中下凸的大变形曲线,大变形曲线的总伸长量为  $-1.9$  mm,缆线总势能均为  $324.7$  Nm(弯曲  $105.56\%$ ,拉伸  $0.08\%$ ,重力  $-5.64\%$ )。

## 7 结 论

针对民用与工业应用中常用的软管和柔缆,归纳了缆线的 5 条共同特征。以此为基础,经由单纯的理论推导,得出了缆线在铅垂面内弯曲形成的大变形曲线的微分方程。研究表明,悬链线与纯弯曲线都是这一方程的特例;在一般情况下,该方程存在多解,但不同解的稳定性不同;通过计算不同解相应的势能,可以对解的稳定性进行比较;通过数值计算获得的特定解取决于待定常数所赋的初值,或者递进法中历经的中间解。

## 参考文献(References):

- [1] 李伟民,郭海燕,牛建杰等. 海洋动态缆的截面布局及数值模拟研究[J]. 中国海洋大学学报(自然科学版), 2016, **46**(8): 131-136. (LI Wei-min, GUO Hai-yan, NIU Jian-jie, et al. The sectional layout and numerical simulation study of marine dynamic cables[J]. *Periodical of Ocean University of China*(Natural Science Edition), 2016, **46**(8): 131-136. (in Chinese))
- [2] 张旭,尹成群,吕安强,等. 光电复合海缆有限元建模与仿真[J]. 计算机仿真, 2013, **30**(2): 120-124, 147. (ZHANG Xu, YIN Cheng-qun, LÜ An-qiang, et al. Method of constructing finite element model and simulating of photoelectric composite submarine cable[J]. *Computer Simulation*, 2013, **30**(2): 120-124, 147. (in Chinese))
- [3] Xiang L, Wang H Y, Chen Y, et al. Modeling of multi-strand wire ropes subjected to axial tension and torsion loads [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2015, **58**: 233-246.
- [4] Frigerio M, Buehlmann P B, Buchheim J, et al. Analysis of the tensile response of a stranded conductor using a 3D finite element model [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2016, **106**: 176-183.
- [5] 李晓月,郭海燕,朱洋洋,等. 考虑填充钢管脐带缆拉伸行为的有限元分析[J]. 中国海洋大学学报(自然科学版), 2018, **48**(S1): 179-184. (LI Xiao-yue, GUO Hai-yan, ZHU Yang-yang, et al. Finite element analysis of filling on tensile behavior of steel tube umbilical cable[J]. *Periodical of Ocean University of China* (Natural Science Edition), 2018, **48**(S1): 179-184. (in Chinese))
- [6] 林晓波,卢志飞,甘纯,等. 光纤复合海底电缆扭转的有限元建模[J]. 光通信研究, 2016, **195**(3): 33-36. (LIN Xiao-bo, LU Zhi-fei, GAN Chun, et al. Finite element modeling of optical fiber composite submarine power cable twist[J]. *Study on Optical Communications*, 2016, **195**(3): 33-36. (in Chinese))
- [7] 肖能,阎军,卢青针,等. 钢管脐带缆拉伸行为的有限元分析[J]. 油气储运, 2012, **31**(3): 199-202, 246. (XIAO Neng, YAN Jun, LU Qing-zhen, et al. Finite element analysis of tensile behavior of steel tube umbilical cord[J]. *Oil & Gas Storage and Transportation*, 2012, **31**(3): 199-202, 246. (in Chinese))
- [8] 石涵,李阳,郭宏,等. 集束动态海底电缆截面机械性能分析[J]. 海洋工程装备与技术, 2020, **7**(2): 68-72. (SHI Han, LI Yang, GUO Hong, et al. Sectional mechanical properties analysis of dynamic bundled submarine cable[J]. *Ocean Engineering Equipment and Technology*, 2020, **7**(2): 68-72. (in Chinese))
- [9] 徐慧,张彩莹,罗延生,等. 海上漂浮输油软管拉伸与弯曲力学特性[J]. 油气储运, 2012, **31**(4): 279-282, 288. (XU Hui, ZHANG Cai-ying, LUO Yan-sheng, et al. Analysis of tensile and bending mechanical properties of offshore floating oil hose[J]. *Oil & Gas Storage and Transportation*, 2012, **31**(4): 279-282, 288. (in Chinese))
- [10] 高强,刘伟倡,巴光忠,等. 海洋水下输油橡胶软管弯曲刚度研究[J]. 石油矿场机械, 2021, **50**(5): 1-7. (GAO Qiang, LIU Wei-chang, BA Guang-zhou, et al. Research on bending rigidity of rubber hose for marine and underwater oil transportation [J]. *Oil Field Equipment*, 2021, **50**(5): 1-7. (in Chinese))
- [11] Vemula S S, Ji M S, Headings L M, et al. Analytical model for large deflection bending of helically stranded electrical wires[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2020, **170**: 105355.
- [12] 刘鸿文. 材料力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2011. (LIU Hong-wen. *Mechanics of Materials* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2011. (in Chinese))
- [13] 林晓波,吕安强,俞恩科,等. 单芯光纤复合海底电缆弯曲有限元建模[J]. 高压电器, 2017, **53**(9): 119-124. (LIN Xiao-bo, LÜ An-qiang, YU En-ke, et al. Finite element modeling of bending of single-core optical fiber composite submarine power cable[J]. *High Voltage Apparatus*, 2017, **53**(9): 119-124. (in Chinese))
- [14] 杨敏冬,滕斌,勾莹,等. 海洋系泊缆索非线性有限元静力分析[J]. 海洋工程, 2009, **27**(2): 14-20. (YANG Min-dong, TENG Bin, GOU Ying, et al. Static analysis of mooring lines using nonlinear finite ele-

- ment method [J]. *The Ocean Engineering*, 2009, **27**(2):14-20. (in Chinese))
- [15] 林 超, 郭海燕, 牛建杰, 等. 海洋动态缆截面设计和静态分析数值模拟研究[J]. 中国海洋大学学报(自然科学版), 2016, **46**(12):111-116. (LIN Chao, GUO Hai-yan, NIU Jian-jie, et al. Research on numeric simulation of umbilical on cross-section and static analysis [J]. *Periodical of Ocean University of China* (Natural Science Edition), 2016, **46**(12):111-116. (in Chinese))
- [16] 严 琨, 沈锐利. 基于细长梁单元的悬索桥主缆线形分析[J]. 计算力学学报, 2016, **33**(3):381-387. (YAN Kun, SHEN Rui-li, Study on main cable shape of suspension bridge based on slender beam element [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2016, **33**(3):381-387. (in Chinese))
- [17] 周 勇, 张 峰, 叶见曙, 等. 悬索桥空间主缆分析[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2009, **39**(1):101-105. (ZHOU Yong, ZHANG Feng, YE Jian-shu, et al. Analysis of spatial cable of suspension bridge [J]. *Journal of Southeast University* (Natural Science Edition), 2009, **39**(1):101-105. in Chinese))
- [18] Jairazbhoy V A, Petukhov P, Qu J M. Large deflection of thin plates in cylindrical bending-Non-unique solutions [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, **45**(11-12):3203-3218.

## Differential equation of large deformation curve for cables bending in vertical plane and its numerical solution method

LI Li-xin\* , WANG Meng, ZHANG Wei

(Institute of Mechanical Design Zhejiang University, Hangzhou 310058, China)

**Abstract:** For the natural bending hoses and flexible cables often used in civil and industrial applications, 5 common characteristics are summarized as the basic assumptions of the cables researched in this paper. Based on these assumptions and according to the force and stress analysis, the differential equation of the large deformation curve for cables bending in the vertical plane is derived for the first time. The corresponding equations for solving the large deformation curves under various end constraints are listed. It is proved that catenary and pure bending curves are special cases of this paper. A progressive method for obtaining numerical solutions is proposed with a specific example for the case of clamped-clamped boundary constraints. The reasons for the existence of multiple solutions are given and the method to compare the stability of different solutions is discussed.

**Key words:** cable; large deformation curve; bending in the vertical plane; functional extremum; numerical solutions method