

DOI: 10.7511/jslx20230408001

激波数值稳定的低耗散修正 HLLEM 格式与应用

胡立军*, 李斌, 黄泓兴

(衡阳师范学院 数学与统计学院, 衡阳 421002)

摘要: 在航空航天领域, 含强激波的可压缩流动问题的数值模拟具有重要的科学工程意义。许多流行的数值通量格式(如 CFD 工业软件中普遍使用的 Roe 格式)在计算强激波时会出现不同形式的数值不稳定现象, 这些非物理现象极大地影响了模拟结果的可靠性。本文采用平衡对流耗散与声耗散的方法来增强格式的激波数值稳定性, 通过简单修改波速的计算将其应用到 HLLEM 通量格式上。不同于传统上通过增加数值耗散的方法来消除格式的激波数值不稳定性, 本文采用的策略不仅简单而且还能局部减少格式对非线性波的数值耗散。此外, 采用 THINC 重构结合 BVD 算法来进一步减少数值耗散项中网格界面两侧的密度差, 从而提高格式对于线性波的分辨率。稳定性分析证明了平衡对流耗散与声耗散可以有效地消除激波数值失稳现象。一系列经典的数值实验验证了构造的激波捕捉格式的高分辨率和强稳定性。

关键词: 三维欧拉方程组; HLLEM 格式; 激波数值不稳定性; 声耗散; 高分辨率

中图分类号: O354; O241.82

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2024)05-0921-08

1 引言

高超声速流动问题的数值计算广泛应用于航空航天领域, 如高超声速再入飞行器的气动热预测以及超燃冲压发动机中的高超声速湍流燃烧等。由于涉及激波、边界层、黏性以及湍流之间的相互作用, 高超声速的流场结构异常复杂。精确模拟这类流动问题要求数值格式同时具有高分辨率和强稳定性等特点。

近几十年, 基于有限体积框架下的 Godunov 型激波捕捉格式由于良好的守恒性和网格适应性, 已经成为了计算可压缩流动的一类典型的数值方法。根据其对接触间断和剪切波的分辨能力, 可将其分成两类。一类是非全波格式, 如 Rusanov 格式^[1]、HLL 格式^[2]和 HLL-CPS 格式^[3]等。这些非全波格式在计算中可以得到数值稳定的激波解, 但是过高的数值耗散使得其不能准确地捕捉接触间断或者剪切波。另一类是全波格式, 如 Roe 格式^[4]、HLLC 格式^[5]和 HLLEM 格式^[6]等, 其能够准确地捕捉接触间断和剪切波。但是, 在计算多维

强激波时遭遇的激波数值失稳现象严重地影响了格式的应用, 如在高超声速再入飞行器的气动热计算时, 非物理的激波数值失稳现象会影响传热预测的精度, 从而影响飞行器热防护系统的设计。因此, 激波数值失稳现象已经成为了低耗散 Godunov 型激波捕捉格式亟待解决的问题之一^[7]。

研究人员主要提出了五种策略来消除激波数值不稳定性, 即根据当地流场在耗散型格式和低耗散型格式之间进行切换的混合格式^[8-10]; 添加格式的剪切黏性^[11]; 引入人工黏性项^[12]; 控制格式自身的耗散机制^[13-15]; 利用格式的多维耗散来提高其激波数值稳定性。根据实现途径, 具体包括构造旋转黎曼求解器^[16], 求解角点处的多维黎曼问题来构造真正多维的通量格式^[17,18], 利用法向速度重构来实现格式的多维耗散^[19]。

以上方法在某种程度上改善了格式的激波数值失稳现象, 但也存在一些不足, 混合格式的效果很大程度上取决于开关函数; 对于某些算例添加剪切黏性并不能完全抑制激波失稳现象; 人工黏性的添加依赖黏性通量和网格大小; 耗散控制技术的效

收稿日期: 2023-04-08; 修改稿收到日期: 2023-05-12.

基金项目: 湖南省自然科学基金(2021JJ40009); 湖南省教育厅优秀青年项目(21B0626); 湖南省双一流应用特色学科项目(湘教通[2018]469号); 湖南省重点实验室项目(2016TP1020)资助.

作者简介: 胡立军* (1985-), 男, 博士, 副教授(E-mail: hujun@lsec.cc.ac.cn).

引用本文: 胡立军, 李斌, 黄泓兴. 激波数值稳定的低耗散修正 HLLEM 格式与应用[J]. 计算力学学报, 2024, 41(5): 921-928.

HU Li-jun, LI Bin, HUANG Hong-xing. A low-dissipation modified HLLEM scheme with numerical stability for shock waves and its application[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2024, 41(5): 921-928.

果取决于经验参数的选取;旋转格式在每个界面需计算两次数值通量;角点通量模型的复杂性限制了其在三维流动问题中的应用;法向速度重构技术无法突破二阶精度的局限。最近,Fleischmann 等^[20]通过简单修改 Roe 格式的波速来平衡对流耗散与声耗散,从而采用了一种减少格式整体耗散的方法抑制了 Roe 格式的激波数值失稳行为。本文将该方法应用于 HLLEM 格式来消除其激波数值失稳现象。与 Roe 格式相比,HLLEM 格式效率更高且不会出现声速点故障和膨胀激波^[21]。此外,在重构中采用 BVD 原则以减少数值耗散项中网格界面两侧的密度差,以提高格式对于接触间断的分辨率。本文致力于构造激波数值稳定的低耗散格式,并且通过一系列经典的数值实验来验证格式的高分辨率和强稳定性。

2 背景知识

2.1 控制方程组

考虑三维无黏欧拉方程组

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{U})}{\partial z} = \mathbf{0} \quad (1)$$

式中

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E \end{bmatrix}, \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(E + p) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ v(E + p) \end{bmatrix}, \mathbf{H}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + p \\ w(E + p) \end{bmatrix} \quad (2)$$

ρ 为密度, u, v 和 w 为流体沿三个方向的速度分量, p 为压力, E 为总能。利用理想气体状态方程来封闭方程组(1)

$$p = (\gamma - 1)[E - 0.5\rho(u^2 + v^2 + w^2)] \quad (3)$$

比热容 γ 取 1.4。

采用有限体积法对方程组(1)进行空间离散

$$\frac{d\mathbf{U}_{i,j,k}}{dt} = -\frac{1}{\Delta x}(\mathbf{F}_{i+1/2,j,k} - \mathbf{F}_{i-1/2,j,k}) - \frac{1}{\Delta y}(\mathbf{G}_{i,j+1/2,k} - \mathbf{G}_{i,j-1/2,k}) - \frac{1}{\Delta z}(\mathbf{H}_{i,j,k+1/2} - \mathbf{H}_{i,j,k-1/2}) \quad (4)$$

式中 $\mathbf{U}_{i,j,k}$ 为守恒向量 \mathbf{U} 在网格单元 (i, j, k) 的平均值, $\mathbf{F}_{i+1/2,j,k}$, $\mathbf{G}_{i,j+1/2,k}$ 和 $\mathbf{H}_{i,j,k+1/2}$ 为三个方向的数值通量。本文采用强保稳的二阶龙格-库塔格

式^[22]求解 ODE 系统式(4)。

2.2 HLLEM 格式

在 Godunov 方法中,通过求解界面两侧两个常数状态构成的局部黎曼问题来计算数值通量。本文讨论的 HLLEM 格式的数值通量可表示为^[6]

$$\mathbf{F}_{1/2}^{\text{HLLEM}} = \frac{S_R \mathbf{F}_L - S_L \mathbf{F}_R}{S_R - S_L} + \frac{S_L S_R}{S_R - S_L} (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L) - \frac{S_L S_R}{S_R - S_L} (\delta_2 \alpha_2 \mathbf{R}_2 + \delta_3 \alpha_3 \mathbf{R}_3 + \delta_4 \alpha_4 \mathbf{R}_4) \quad (5)$$

式中

$$S_L = \min(0, u_L - a_L, \bar{u} - \bar{a})$$

$$S_R = \max(0, u_R + a_R, \bar{u} + \bar{a}) \quad (6)$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \\ (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)/2 \end{bmatrix}, \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \bar{v} \end{bmatrix}, \mathbf{R}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \bar{w} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_2 = \Delta \rho - \Delta p / \bar{a}^2, \alpha_3 = \bar{\rho} \Delta v, \alpha_4 = \bar{\rho} \Delta w$$

$$\delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = \bar{a} / (\bar{a} + |\bar{u}|) \quad (7)$$

式中 $a = \sqrt{\gamma p / \rho}$ 为声速, \bar{q} 为 Roe 平均量。

HLLEM 格式能够准确地捕捉接触间断和剪切波,并且不会遭遇声速点故障和膨胀激波问题。但是在计算多维强激波时出现的非物理数值失稳现象严重限制了其在高超声速流动问题中的应用。

3 激波稳定的低耗散格式的构造

3.1 改进的 HLLEM 通量

渐近分析表明,低耗散 Godunov 型格式在马赫数趋近于零时,声耗散会远大于对流耗散,两者失衡导致的压力波动会诱发激波失稳现象^[20,23]。稳定性分析表明,激波数值失稳现象只与横向通量的计算有关^[9,10,13,15],由于横向的马赫数趋近于零,与渐近分析的结论相吻合。为了消除 HLLEM 格式的激波数值不稳定性,采用文献[20]的策略来平衡低马赫数极限情形下的声耗散和对流耗散。为此,HLLEM 通量表达式(5)改写为

$$\mathbf{F}_{1/2}^{\text{HLLEM}} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R) + \mathbf{D}_{1/2} \quad (8)$$

式中 右端第一项为中心差分通量,数值耗散项 $\mathbf{D}_{1/2}$ 可表示为

$$\mathbf{D}_{1/2} = -\frac{S_L + S_R}{2(S_R - S_L)}(\mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L) + \frac{S_L S_R}{S_R - S_L} \times (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L - \delta_2 \alpha_2 \mathbf{R}_2 - \delta_3 \alpha_3 \mathbf{R}_3 - \delta_4 \alpha_4 \mathbf{R}_4) \quad (9)$$

对流耗散与特征值 $|u|$ 成正比,而声耗散与特征值 $|u \pm a|$ 成正比。虽然,式(9)没有显式给出对

流耗散项,但是声耗散与声波波速 S_L 和 S_R 成比例。可以通过减少声耗散或者增加对流耗散的方法来实现两者的平衡。为了减少格式整体的数值耗散,本文采用前一种方法来改善格式的激波数值稳定性。为此,只需简单地将波速式(6)修改为

$$\begin{aligned} S'_L &= \min(0, u_L - a'_L, \bar{u} - \bar{a}') \\ S'_R &= \max(0, u_R + a'_R, \bar{u} + \bar{a}') \end{aligned} \quad (10)$$

式中

$$\begin{aligned} a'_L &= \min(\phi |u_L|, a_L) \\ a'_R &= \max(\phi |u_R|, a_R) \\ \bar{a}'_L &= \min(\phi |\bar{u}|, \bar{a}) \end{aligned} \quad (11)$$

计算中推荐参数 ϕ 取 10,即当前界面两侧的法向马赫数小于 0.1 时,采用上述修正的波速。本文将上述修改波速的通量命名为 HLLEM-M(Modified HLLEM)通量。

3.2 稳定性分析

将文献[24]的矩阵稳定性分析方法推广到三维情形来证明波速修正的有效性。计算区域 $[0, 1] \times [0, 0.2] \times [0, 0.2]$ 均匀划分成 $30 \times 6 \times 6$ 个网格单元。马赫数 $M_0 = 10$ 的稳态正激波位于 x 方向指标为 $i = 15$ 和 $i = 16$ 的网格单元共享的界面处。激波左侧 ($i \leq 15$) 和右侧 ($i > 15$) 的初始状态值为

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_L^0 &= \left(1, 1, 0, 0, \frac{1}{\gamma(\gamma-1)M_0^2} + \frac{1}{2}\right)^T \\ \mathbf{U}_R^0 &= \left(f(M_0), 1, 0, 0, \frac{g(M_0)}{\gamma(\gamma-1)M_0^2} + \frac{1}{2f(M_0)}\right)^T \\ f(M_0) &= \frac{\rho_R}{\rho_L} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{M_0^2} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{-1} \\ g(M_0) &= \frac{p_R}{p_L} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_0^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \end{aligned} \quad (12)$$

在初始流场中加入如下的随机数值小扰动,其演化行为可以作为格式的稳定性判定标准,即

$$\hat{\mathbf{U}}_{i,j,k}^0 = (1 + \beta_{i,j,k} \times 10^{-14}) \times \mathbf{U}_{i,j,k}^0 \quad (13)$$

式中 $\beta_{i,j,k}$ 为取值范围为 $-0.5 \sim 0.5$ 的随机数。为了研究小扰动的演化行为,将流场展开为

$$\mathbf{U}_m = \mathbf{U}_m^0 + \delta \mathbf{U}_m \quad (14)$$

式中 m 为网格单元的全局指标, \mathbf{U}_m^0 和 $\delta \mathbf{U}_m$ 分别为稳态均值和误差。在网格 m 和 k 共享的界面处,数值通量可以线性化为

$$\begin{aligned} \Phi_{mk}(\mathbf{U}_m, \mathbf{U}_k) &= \Phi_{mk}(\mathbf{U}_m^0, \mathbf{U}_k^0) + (\partial \Phi_{mk} / \partial \mathbf{U}_m) \delta \mathbf{U}_m + \\ & \quad (\partial \Phi_{mk} / \partial \mathbf{U}_k) \delta \mathbf{U}_k \end{aligned} \quad (15)$$

将式(14,15)代入式(4),可以得到所有网格单元的数值扰动随时间演化的矩阵形式,即

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{U}_1 \\ \vdots \\ \delta \mathbf{U}_q \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{U}_1 \\ \vdots \\ \delta \mathbf{U}_q \end{pmatrix} \quad (16)$$

式中 \mathbf{S} 为由具体的通量函数确定的稳定性矩阵。ODE 系统式(16)的解为

$$\begin{pmatrix} \delta \mathbf{U}_1 \\ \vdots \\ \delta \mathbf{U}_q \end{pmatrix} (t) = e^{\mathbf{S}t} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{U}_1 \\ \vdots \\ \delta \mathbf{U}_q \end{pmatrix}_{t=0} \quad (17)$$

如果矩阵 \mathbf{S} 的全体特征值的实部均小于 0,即 $\max(\text{Re}(\lambda(\mathbf{S}))) < 0$, 则扰动增长有界,对应的格式数值稳定。两种格式的稳定性矩阵的特征值分布如图 1 所示。可以看出,HLLEM-M 格式的全体特征值的实部均小于 0,意味着其能指数级衰减随机的数值扰动。HLLEM 格式有多个具有正实部的特征值,意味着其会使扰动呈指数级增长。图 2 所示的密度也证明了 HLLEM-M 格式的稳定性。

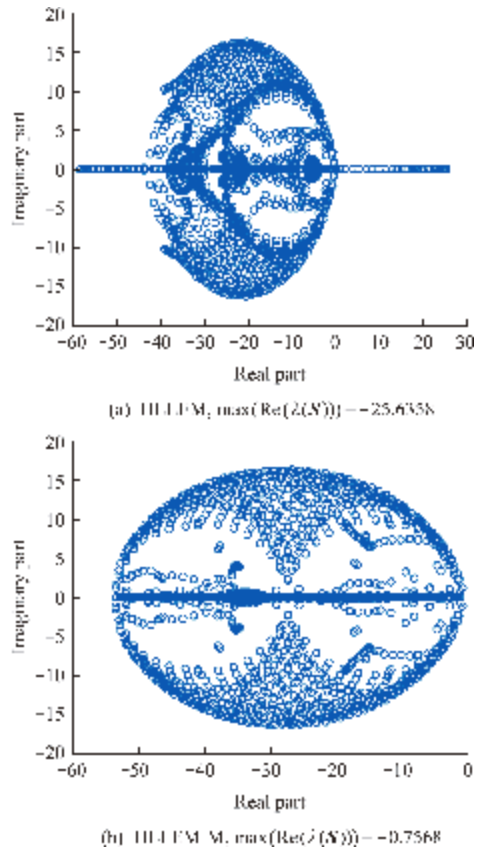


图 1 稳定性矩阵的特征值分布
Fig. 1 Eigenvalues' distribution of the stability matrix

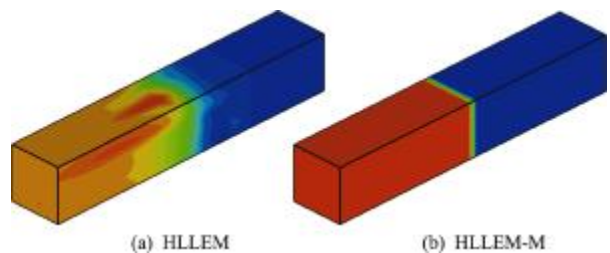


图 2 三维稳态正激波问题的密度
Fig. 2 Density plots of the 3D steady normal shock problem

3.3 改善接触间断的分辨率

为了提高格式对接触间断的分辨率,应尽量减少数值耗散项 $\mathbf{D}_{1/2}$ 中两侧的密度差 $|\rho_R - \rho_L|$ 。为此,采用 THINC 函数重构 $\mathbf{D}_{1/2}$ 中界面两侧的密度值 $\rho_{L/R}^T$ [25]

$$\begin{aligned} \rho_{i-1/2,R}^T &= \bar{\rho}_{\min} + \frac{\Delta\rho}{2}(1 + \chi A) \\ \rho_{i+1/2,L}^T &= \bar{\rho}_{\min} + \frac{\Delta\rho}{2} \left[1 + \chi \frac{\tanh(\alpha) + A}{1 + A \tanh(\alpha)} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

式中

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{\min} &= \min(\rho_{i-1}, \rho_{i+1}), \Delta\rho = |\rho_{i+1} - \rho_{i-1}| \\ \chi &= \text{sgn}(\rho_{i+1} - \rho_{i-1}), A = \frac{B - \cosh(\alpha)}{\sinh(\alpha)} \\ B &= \exp \left[\chi \alpha \left(2 \frac{\rho_i - \bar{\rho}_{\min} + \epsilon}{\Delta\rho + \epsilon} - 1 \right) \right], \epsilon = 10^{-20} \end{aligned} \quad (19)$$

参数 α 用于控制间断的厚度,其值越大耗散越小,但是过大的 α 会导致界面褶皱 [15]。根据经验,1.2~1.6 的 α 值能给出满意的数值解,本文仅展示 α 取 1.5 的数值结果。

另一方面,可以利用多项式重构(如 WENO 和 MUSCL 重构)来获得界面两侧的密度值 $\rho_{L/R}^P$,本文采用二阶 MUSCL 格式进行多项式重构。为了进一步减少 $\mathbf{D}_{1/2}$ 中两侧的密度差,采用 BVD 算法来选择 $\mathbf{D}_{1/2}$ 的密度值,使其满足 [26]

$$\begin{aligned} |\rho_R - \rho_L| &= \min(|\rho_R^P - \rho_L^P|, |\rho_R^P - \rho_L^T|, |\rho_R^T - \rho_L^P|, \\ &|\rho_R^T - \rho_L^T|) \end{aligned} \quad (20)$$

至此,基于 HLLEM 通量构造的一种激波数值稳定的低耗散格式(命名为 LD-HLLEM-M)的构造已经完成。

4 数值结果和分析

比较原始的 HLLEM 格式和 LD-HLLEM-M 格式在一些经典的 1D, 2D 和 3D 算例的表现。所有算例中,本文展示利用二阶 MUSCL 重构 [27] 获得二阶空间精度的数值结果。计算 1D, 2D 和 3D 算例时 CFL 数分别取 0.9, 0.5 和 0.3。

4.1 一维爆炸波问题

该问题涉及多个激波、接触间断和稀疏波的相互作用,计算该问题来评估格式的分辨率和鲁棒性。区域 $[0, 1]$ 均匀划分为 500 个网格单元,初始条件为

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1, 0, 1000) & (0 \leq x \leq 0.1) \\ (1, 0, 0.01) & (0.1 < x \leq 0.9) \\ (1, 0, 100) & (0.9 < x \leq 1) \end{cases} \quad (21)$$

$t = 0.038$ 时刻的密度分布如图 3 所示。可以看

出,相比于原始的 HLLEM 格式,LD-HLLEM-M 格式在捕捉不同波系时都表现出了更高的分辨率。

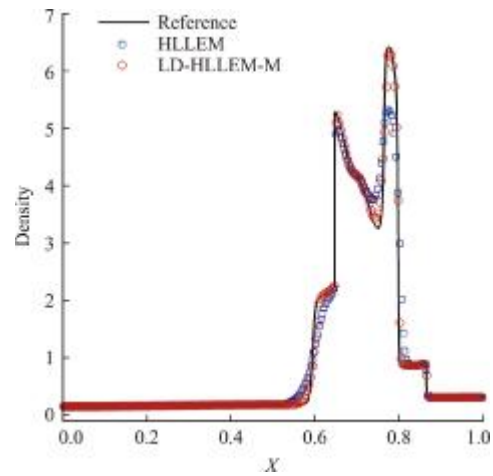


图3 一维爆炸波问题的密度分布
Fig. 3 Density distribution of the 1D blast wave problem

4.2 激波-熵波交互问题

由于涉及激波和低频熵波的相互作用,该算例经常用来检验格式捕捉高频波的能力。区域 $[-5, 5]$ 均匀划分为 1000 个网格单元,初始条件为

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1.5157, 0.52335, 1.805) & (-5 \leq x \leq -4.5) \\ (1 + 0.1 \sin(20x), 0, 1) & (-4.5 < x \leq 5) \end{cases} \quad (22)$$

$t = 5$ 时刻的密度分布如图 4 所示。可以看出,相比于原始的 HLLEM 格式,LD-HLLEM-M 格式在捕捉高频熵波时表现出了更高的分辨率。

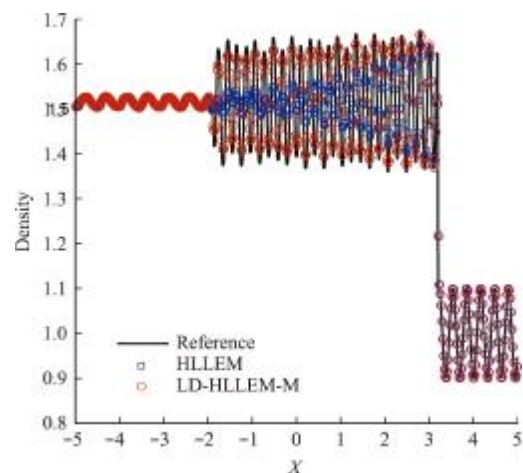


图4 激波-熵波交互问题的密度分布
Fig. 4 Density distribution of the shock-entropy wave interaction problem

4.3 2D 运动接触界面问题

该算例检验格式捕捉 2D 运动接触界面的能力。区域 $[0, 2] \times [0, 2]$ 均匀划分为 200×200 个网格单元,初始条件为

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (2, 1, 1, 1) & (\sqrt{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2} < 0.04) \\ (1, 1, 1, 1) & (\sqrt{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2} \geq 0.04) \end{cases} \quad (23)$$

在 $t=0.5$ 时刻,问题的精确解为

$$(\rho, u, v, p)_{t=0.5} = \begin{cases} (2, 1, 1, 1) & (\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} < 0.04) \\ (1, 1, 1, 1) & (\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \geq 0.04) \end{cases} \quad (24)$$

计算此问题时 LD-HLLEM-M 格式比 HLLEM 格式具有更小的数值耗散,如图 5 所示,前者捕捉到了更加清晰的接触界面。

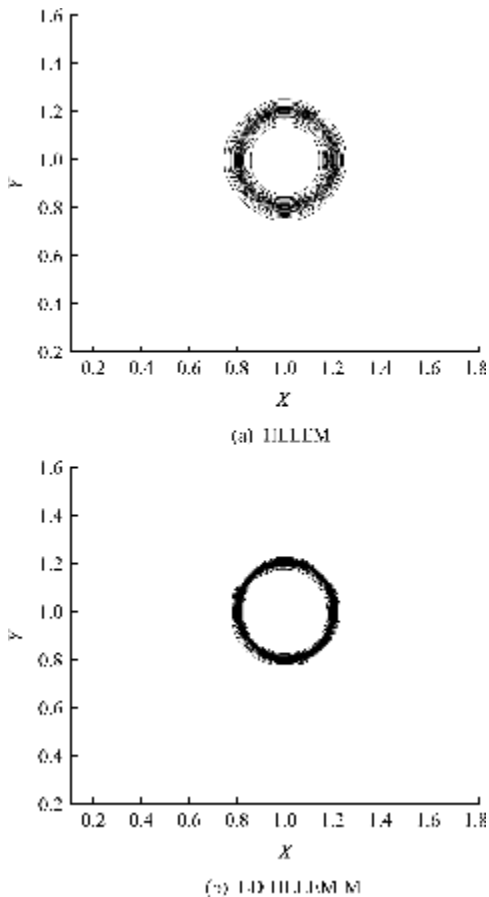


图 5 2D 运动接触界面问题的密度等值线
Fig. 5 Density contours of the 2D moving contact interface problem

4.4 Kelvin-Helmholtz 不稳定性问题

计算 Kelvin-Helmholtz 不稳定性问题来评估格式将线性扰动演化成二维湍流的能力。捕捉这种物理不稳定性的能力是格式精确模拟可压缩湍流的先决条件^[15]。区域 $[-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$ 均匀划分为 1024×1024 个网格单元,初始条件为

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (2, -0.5, 0.01\sin(2\pi x), 2.5) & (|y| \leq 0.25) \\ (1, 0.5, 0.01\sin(2\pi x), 2.5) & (|y| > 0.25) \end{cases} \quad (25)$$

$t=4$ 时刻的密度等值线如图 6 所示。可以看出,LD-HLLEM-M 格式得到了耗散更低的数值解,捕捉到了更多的小尺度涡流结构和更加精细的丝状结构。

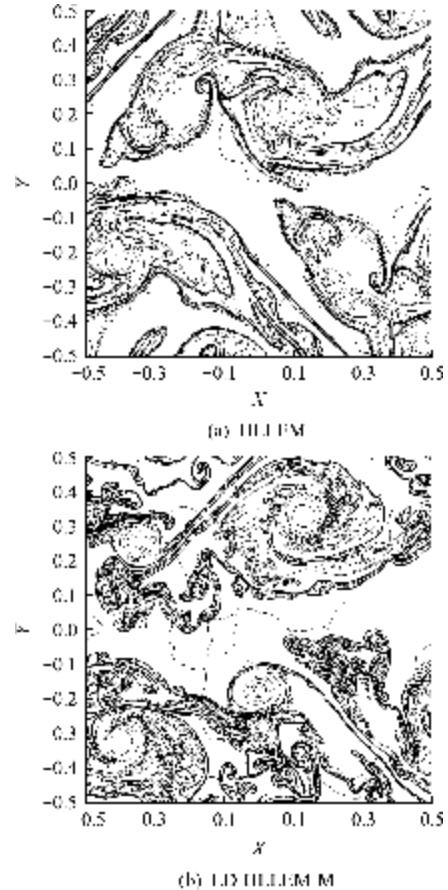


图 6 Kelvin-Helmholtz 不稳定性问题的密度等值线
Fig. 6 Density contours of the Kelvin-Helmholtz instability problem

4.5 双马赫反射问题

双马赫反射问题是检验格式激波数值稳定性的一个经典算例^[8]。区域 $[0, 4] \times [0, 1]$ 初始化为

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (8.8, 25\cos 30^\circ, -8.25\sin 30^\circ, 116.5) & (y > \sqrt{3}(x-1/6)) \\ (1.4, 0, 0, 1) & (y \leq \sqrt{3}(x-1/6)) \end{cases} \quad (26)$$

由于激波数值不稳定性会随着网格比 $\delta = \Delta y / \Delta x$ 的增加而愈发严重^[24],本文采用 720×720 的网格计算,对应一个大的网格比 $\delta = 4$ 。 $t=0.2$ 时刻的密度等值线如图 7 所示。可以看出,HLLEM 格式产生了明显的激波数值失稳现象,马赫杆严重弯

曲,而 LD-HLLEM-M 格式具有良好的数值稳定性,得到了清晰的激波结构。

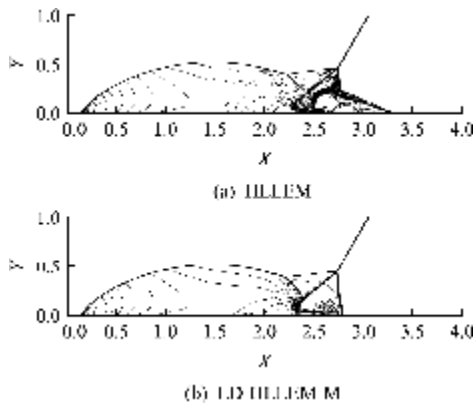


图7 双马赫反射问题的密度等值线
Fig. 7 Density contours of the double Mach reflection problem

4.6 3D 运动正激波问题

前面的算例充分证明了 LD-HLLEM-M 格式在捕捉接触间断时的高分辨率。接下来验证格式的激波数值稳定性。首先考虑简单的三维运动正激波问题,沿 x 方向运动的马赫数为 10 的正激波初始时位于 $x = 5$ 处,区域 $[0, 1500] \times [0, 20] \times [0, 20]$ 均匀划分成 $1500 \times 20 \times 20$ 个网格单元,初始条件为

$$(\rho, u, v, w, p) = \begin{cases} (8, 8.25, 0, 0, 116.5) & (0 \leq x < 5) \\ (1.4, 0, 0, 0, 1) & (5 \leq x \leq 1500) \end{cases} \quad (27)$$

流场的初始设置是一个 1D 的运动正激波,由于激波不稳定性的多维特性,计算中不会出现失稳现象。在原始的 2D 框架中,Quirk^[8] 通过在网格中心线上施加锯齿状的小扰动来引入二维效应。在当前的工作中,本文保持网格划分无任何扰动,而是在整个流场的初始分布上叠加 10^{-12} 量级的随机数值噪声来引入三维效应。 $t = 120$ 时刻的密度如图 8 所示,可以看出,HLLEM 格式产生了明显的激波数值失稳现象,而 LD-HLLEM-M 格式捕捉到了清晰的激波波阵面,具有良好的激波数值稳定性。

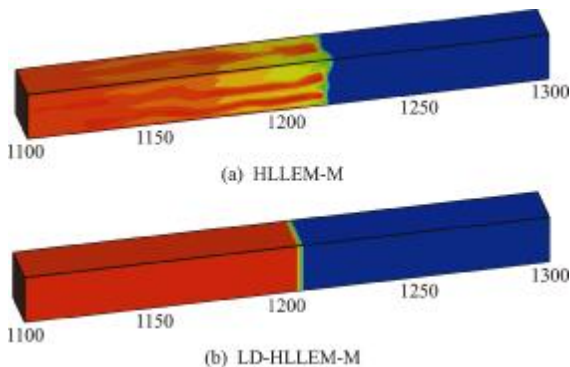


图8 3D 运动正激波问题的密度
Fig. 8 Density plots of the 3D moving normal shock problem

4.7 高超声速绕柱流问题

在模拟高超声速绕柱流问题出现的非物理的红玉(carbuncle)现象是一种最典型的激波数值失稳现象,因此该算例是评估格式激波数值稳定性的一个常规算例。在大多数文献中,该算例都是在二维框架下计算的,其计算区域和网格划分的详细描述可以参考文献[28]。本文通过在 z 方向叠加若干层网格单元将该算例推广到三维情形。计算中采用 $40 \times 160 \times 20$ 的六面体贴体网格,流场的初始条件为 $(\rho, u, v, w, p) = (1.4, 20, 0, 0, 1)$ 。 $t = 4$ 时刻的密度如图 9 所示。可以看出,HLLEM 格式在弓形激波波阵面的中间位置产生了明显的红玉现象,而 LD-HLLEM-M 格式具有良好的激波数值稳定性,得到了清晰稳定的弓形激波波阵面。

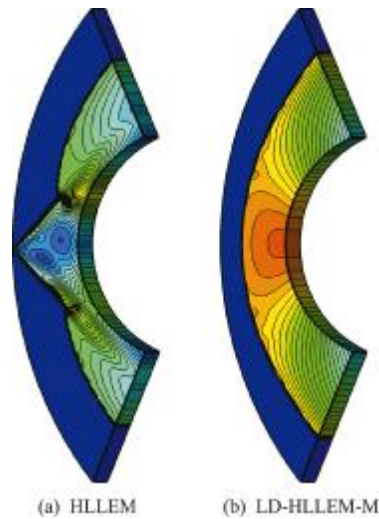


图9 高超声速绕柱流问题的密度
Fig. 9 Density plots of the hypersonic flows around a cylinder

4.8 高超声速后台阶激波衍射问题

该算例涉及马赫数为 5.09 的高超声速流绕过 90° 的台阶产生的激波衍射行为^[8]。许多低耗散的通量格式在计算该算例时会遭遇严重的激波数值失稳现象,因此其也是检验格式激波数值稳定性的一个常规算例。在原始设置中,该算例是在二维框架下进行计算的。通过在 z 方向叠加若干层网格单元本文将其简单地推广到三维情形。整个区域 $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 0.25]$ 均匀划分为 $320 \times 320 \times 80$ 个六面体单元,其中 $[0, 0.05] \times [0, 0.625] \times [0, 0.25]$ 为台阶所在的区域。整个计算区域的初始条件为 $(\rho, u, v, w, p) = (1.4, 0, 0, 0, 1)$ 。台阶上方的左侧边界($x = 0, z \in [0.625, 1]$)采用波后条件,其余边界均采用反射边界条件。 $t = 0.1561$ 时刻的密度如图 10 所示,可以看出,HLLEM 格式在正激波的顶部产生了明显的激波失稳现象,而

LD-HLLEM-M 格式有效地消除了不稳定现象,得到了清晰稳定的激波结构。

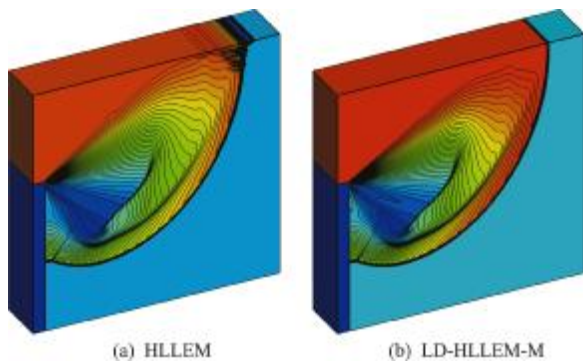


图 10 高超声速角流问题的密度

Fig. 10 Density plots of the hypersonic corner flow problem

5 结 论

许多流行的低耗散通量格式在计算多维强激波时会遭遇严重的数值不稳定现象,这极大地影响了数值模拟结果的可靠性。传统上通过添加数值耗散的方法来消除格式的激波数值不稳定性可能会影响格式的分辨率甚至带来收敛性问题。本文致力于在三维欧拉方程框架下构造一种具有良好激波稳定性的低耗散格式,主要工作包括,(1)通过简单的波速修正方法减少低马赫数极限情形下 HLLEM 格式的声耗散来增强格式的激波数值稳定性。相比于传统方法,该策略不仅简单而且还能局部减少格式对非线性波的数值耗散;(2)稳定性分析证明了局部减少声耗散的方法能够有效地增强格式的激波稳定性;(3)采用 THINC 重构结合 BVD 算法进一步减少数值耗散项中界面两侧的密度差,从而提高格式对于线性波的分辨率;(4)一系列典型的数值实验证明了格式的高分辨率和强稳定性。将构造的通量格式模块化后作为新的求解器嵌入到开源的 CFD 工业软件(如 OpenFOAM)计算一些复杂的高超声速流动问题,如黏性问题、多组分化学反应流和湍流燃烧等,值得未来进一步的研究。

参考文献(References):

- [1] Rusanov V V. The calculation of the interaction of non-stationary shock waves and obstacles[J]. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1962, **1**(2):304-320.
- [2] Harten A, Lax P D, van Leer B. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws[J]. *SIAM Review*, 1983, **25**(1):35-61.
- [3] Mandal J C, Panwar V. Robust HLL-type Riemann solver capable of resolving contact discontinuity[J]. *Computers & Fluids*, 2012, **63**:148-164.
- [4] Roe P L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1997, **135**(2):250-258.
- [5] Toro E F, Spruce M, Speares W. Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver[J]. *Shock Waves*, 1994, **4**(1):25-34.
- [6] Einfeldt B, Munz C D, Roe P L, et al. On Godunov-type methods near low densities[J]. *Journal of Computational Physics*, 1991, **92**(2):273-295.
- [7] Leer B. The development of numerical fluid mechanics and aerodynamics since the 1960s: US and Canada [M]. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [8] Quirk J J. A contribution to the great Riemann solver debate[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1994, **18**(6):555-574.
- [9] Kim S D, Lee B J, Lee H J, et al. Robust HLLC Riemann solver with weighted average flux scheme for strong shock[J]. *Journal of Computational Physics*, 2009, **228**(20):7634-7642.
- [10] 胡立军,袁礼.一种治愈强激波数值不稳定性的混合方法[J]. *应用数学和力学*, 2015, **36**(5):482-493. (HU Li-jun, YUAN Li. Analysis of numerical shock instability and a hybrid curing method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(5):482-493. (in Chinese))
- [11] Chen S S, Yan C, Lin B X, et al. Affordable shock-stable item for Godunov-type schemes against carbuncle phenomenon[J]. *Journal of Computational Physics*, 2018, **373**:662-672.
- [12] Rodionov A V. Simplified artificial viscosity approach for curing the shock instability [J]. *Computers & Fluids*, 2021, **219**:104873.
- [13] Xie W J, Li W, Li H, et al. On numerical instabilities of Godunov-type schemes for strong shocks[J]. *Journal of Computational Physics*, 2017, **350**:607-637.
- [14] Simon S, Mandal J C. A cure for numerical shock instability in HLLC Riemann solver using antidiffusion control[J]. *Computers & Fluids*, 2018, **174**:144-166.
- [15] Hu L J, Feng Z S. Development of a carbuncle-free and low-dissipation Roe-type scheme: Applications to multidimensional Euler flows[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations*, 2023, **116**:106798.
- [16] Ren Y X. A robust shock-capturing scheme based on rotated Riemann solvers[J]. *Computers & Fluids*, 2003, **32**(10):1379-1403.

- [17] Balsara D S. A two-dimensional HLLC Riemann solver for conservation laws; Application to Euler and magnetohydrodynamic flows[J]. *Journal of Computational Physics*, 2012, **231**(22): 7476-7503.
- [18] Hu L J, Feng S. An accurate and shock-stable genuinely multidimensional scheme for solving the Euler equations[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2021, **97**: 105738.
- [19] Chen Z Q, Huang X D, Ren Y X, et al. General procedure for Riemann solver to eliminate carbuncle and shock instability [J]. *AIAA Journal*, 2017, **55**(6): 2002-2015.
- [20] Fleischmann N, Adami S, Hu X Y, et al. A low dissipation method to cure the grid-aligned shock instability[J]. *Journal of Computational Physics*, 2020, **401**: 109004.
- [21] Kemm F. Heuristical and numerical considerations for the carbuncle phenomenon[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2018, **320**: 596-613.
- [22] Gottlieb S, Shu C W, Tadmor E. Strong stability-preserving high-order time discretization methods[J]. *SIAM Review*, 2001, **43**(1): 89-112.
- [23] Guillard H, Murrone A. On the behavior of upwind schemes in the low Mach number limit. Part II: Godunov type schemes[J]. *Computers & Fluids*, 2004, **33**(4): 655-675.
- [24] Dumbser M, Moschetta J M, Gressier J. A matrix stability analysis of the carbuncle phenomenon[J]. *Journal of Computational Physics*, 2004, **197**(2): 647-670.
- [25] Xiao F, Li S, Chen C G. Revisit to the THINC scheme: A simple algebraic VOF algorithm [J]. *Journal of Computational Physics*, 2011, **230**(19): 7086-7092.
- [26] Sun Z Y, Inaba S, Xiao F. Boundary Variation Diminishing (BVD) reconstruction: A new approach to improve Godunov schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 2016, **322**: 309-325.
- [27] van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method[J]. *Journal of Computational Physics*, 1979, **32**(1): 101-136.
- [28] Huang K B, Wu H, Yu H, et al. Cures for numerical shock instability in HLLC solver[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2011, **65**(9): 1026-1038.

A low-dissipation modified HLLEM scheme with numerical stability for shock waves and its application

HU Li-jun^{*}, LI Bin, HUANG Hong-xing

(College of Mathematics and Statistics, Hengyang Normal University, Hengyang 421002, China)

Abstract: In the field of aerospace engineering, the numerical simulation of compressible flows with strong shock waves has important scientific and engineering significance. Many popular flux schemes, such as the Roe scheme commonly used in industrial CFD software, will encounter different forms of instability while calculating strong shock waves. These nonphysical phenomena severely affect the reliability of simulation results. The method of balancing advective dissipation and acoustic dissipation is used to enhance the shock stability of the scheme, and it can be applied to the HLLEM scheme by simply modifying the calculation of wave speeds. Unlike traditional methods that increase numerical dissipation to eliminate the shock instability, the strategy adopted here is not only simple but also locally reduces the numerical dissipation for nonlinear waves. In addition, the THINC reconstruction and BVD algorithm are used to further reduce the density difference between two sides of the interface in the numerical dissipation term, so as to improve the resolution for linear waves. The stability analysis shows that the strategy of balancing the advective dissipation and the acoustic dissipation can effectively eliminate the numerical shock instability. A series of classical numerical experiments demonstrate the high resolution and strong stability of the shock-capturing scheme constructed here.

Key words: 3D Euler equations; HLLEM scheme; shock instability; acoustic dissipation; high resolution