

DOI: 10.7511/jslx20230705002

# 基于传递矩阵法的 Timoshenko 裂纹梁 自振特性分析

王亚波, 马乾璞\*, 吴宗欢

(长安大学 建筑工程学院, 西安 710061)

**摘要:** 首先基于传递矩阵法, 将裂纹截面假定一无质量扭转弹簧, 通过扭转弹簧建立起各段子梁在裂纹截面处的矩阵传递关系, 推导出含任意裂纹 Timoshenko 梁及无裂纹 Timoshenko 梁的传递矩阵, 引入边界条件简化矩阵方程, 并利用 Matlab 对方程进行求解。其次讨论了裂纹位置和相对深度对单裂纹简支梁自振频率的影响, 与文献结果进行对比, 误差最多不超过 1%; 然后通过 ABAQUS 建立悬臂梁及两端固支梁有限元模型, 分析相对裂纹深度对自振频率的影响, 计算结果与有限元结果进行对比, 误差不超过 3.86%; 最后研究了不同跨高比下相对裂纹深度对 Timoshenko 简支梁自振频率的影响, 计算结果与文献最大误差为 4.56%, 验证了本文方法的有效性及适用性。

**关键词:** 传递矩阵法; Timoshenko 裂纹梁; 自振频率; Matlab; ABAQUS

**中图分类号:** TB53; O327

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1007-4708(2024)05-0909-06

## 1 引言

梁作为工程中的重要构件, 广泛应用于航空航天、土木和机械等领域。裂纹是构件常见的损伤形式之一, 其存在会对结构的自振特性产生影响, 严重时会导致构件破坏。因此针对裂纹对构件自振特性的影响展开研究很有必要, 此类问题也引起学者们的广泛关注。Chondros 等<sup>[1]</sup>提出了用一等效扭转弹簧模拟裂纹截面并证明了其可行性。Euler-Bernoulli 梁方面, 文献[2-4]基于传递矩阵法推导出含单裂纹简支梁及悬臂梁的频率方程, 并建立了迭代算法对方程进行求解, 研究了裂纹位置及深度对自振频率的影响。文献[5-7]基于传递矩阵法推导出含多裂纹梁频率方程, 讨论了裂纹数量、位置及深度对自振频率的影响, 通过与文献对比证明了方法的有效性, 但有限元模拟方面涉及较少。

Timoshenko 梁方面, 文献[8]基于传递矩阵法研究了具有任意数量中间柔性约束的 Timoshenko 梁自由振动问题。文献[9]基于 Euler-Ber-

noulli 梁及 Timoshenko 梁的公式, 利用能量法评估裂纹大小及位置对固有频率的影响。文献[10]基于传递矩阵法推导出单裂纹梁频率方程, 分析了相对裂纹深度及不同细长比对自振频率的影响, 并与文献进行了对比。文献[11]基于广义 Delta 函数推导出含任意裂纹梁解析解, 讨论了裂纹深度及数量对裂纹梁自振频率的影响。

通过上述文献可知, 学者们对于 Euler-Bernoulli 梁方面做出了大量的研究, 但是由于 Timoshenko 梁是在 Euler-Bernoulli 梁的基础上考虑了剪切变形及转动惯量的影响, 涉及公式更加复杂, 对于含裂纹 Timoshenko 梁方面研究较少。基于传递矩阵法, 本文将裂纹截面假定一无质量扭转弹簧, 使得裂纹的影响简化为点传递矩阵中的一个额外刚度项, 通过扭转弹簧将各段子梁联系起来, 并以相对裂纹深度及材料特性组成的函数作为弹簧的柔度, 推导出含任意裂纹 Timoshenko 梁频率方程, 引入边界条件对方程进行简化, 通过 Matlab 对方程进行求解。并以单裂纹梁为例, 讨论了裂纹位

收稿日期: 2023-07-05; 修改稿收到日期: 2024-00-00.

基金项目: 国家自然科学基金(51208041); 陕西省自然科学基金(2020SF-382; 2014JM2-5080); 长安大学教学改革研究项目(20211822; 300103292815)资助。

作者简介: 马乾璞\* (1982-), 男, 博士, 副教授(E-mail: mqy@chd.edu.cn).

引用本文: 王亚波, 马乾璞, 吴宗欢. 基于传递矩阵法的 Timoshenko 裂纹梁自振特性分析[J]. 计算力学学报, 2024, 41(5): 909-914.  
WANG Ya-bo, MA Qian-ying, WU Zong-huan. Analysis of natural vibration characteristics of Timoshenko cracked beam based on transfer matrix method[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2024, 41(5): 909-914.

置、深度对简支梁、悬臂梁、两端固支梁自振频率的影响以及不同跨高比下裂纹深度对自振频率的影响,将计算结果与文献结果及有限元结果进行对比以验证本文方法的有效性。

## 2 传递矩阵

### 2.1 含 $n-1$ 条 Timoshenko 裂纹梁传递矩阵

多裂纹 Timoshenko 梁模型如图 1 所示。

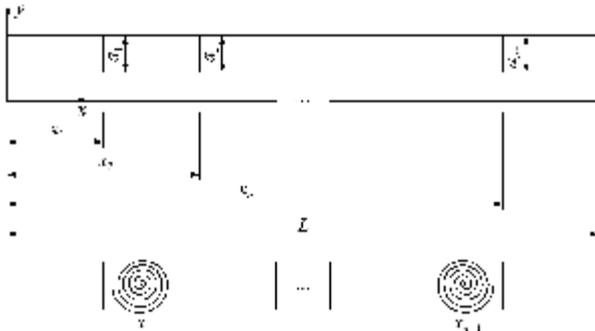


图 1 多裂纹 Timoshenko 梁模型  
Fig. 1 Multi-crack Timoshenko beam model

$$q = \sqrt{\frac{\rho I \beta^4}{2m} + \frac{m\omega^2}{2kAG} + \frac{\sqrt{(\rho I \beta^4 kAG + m^2\omega^2)^2 - 4m^2kAG\beta^4(\omega^2\rho I - kAG)}}{2mkAG}}$$

$$p = \sqrt{-\left(\frac{\rho I \beta^4}{2m} + \frac{m\omega^2}{2kAG}\right) + \frac{\sqrt{(\rho I \beta^4 kAG + m^2\omega^2)^2 - 4m^2kAG\beta^4(\omega^2\rho I - kAG)}}{2mkAG}}$$

可知挠度  $U(x)$ 、转角  $\theta(x)$ 、弯矩  $M(x)$  和剪力  $Q(x)$  满足下列关系

$$\begin{cases} \theta(x) = dU(x)/dx - Q(x)/(kAG) \\ M(x) = -EI(d\theta(x)/dx) \\ Q(x) = (dM(x)/dx) - \rho I \omega^2 \theta(x) \end{cases} \quad (5)$$

将式(4)代入式(5)得

$$D(x) = S(x) P_i \quad (6)$$

式中  $D(x) = [U(x) \ \theta(x) \ M(x) \ Q(x)]^T$

$$P_i = [C_{4i-3} \ C_{4i-2} \ C_{4i-1} \ C_{4i}]^T \quad (i = 1, 2, \dots)$$

场传递矩阵

$$S(x) = \begin{bmatrix} \cos qx & \sin qx \\ (-q - \lambda_1) \sin qx & (q + \lambda_1) \cos qx \\ EI \lambda_3 \cos qx & EI \lambda_3 \sin qx \\ kAG \lambda_1 \sin qx & -kAG \lambda_1 \cos qx \\ \cosh px & \sinh px \\ (p - \lambda_2) \sinh px & (p - \lambda_2) \cosh px \\ EI \lambda_4 \cosh px & EI \lambda_4 \sinh px \\ kAG \lambda_2 \sinh px & kAG \lambda_2 \cosh px \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = \frac{-EIq\lambda_3 + \rho I \omega^2 q}{kAG - \rho I \omega^2}, \lambda_2 = \frac{EI p \lambda_4 - \rho I \omega^2 p}{kAG - \rho I \omega^2}$$

$$\lambda_3 = q^2 - \frac{m\omega^2}{kAG}, \lambda_4 = -p^2 - \frac{m\omega^2}{kAG}$$

Timoshenko 梁的自由振动控制微分方程为

$$m \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 W(x,t)}{\partial x^4} - \rho I \frac{\partial^4 W(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{m}{kAG} \left( \rho I \frac{\partial^4 W(x,t)}{\partial t^4} - EI \frac{\partial^4 W(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} \right) = 0 \quad (1)$$

式中  $m$  为单位长度梁的质量,  $W(x,t)$  为梁的横向位移,  $E$  为杨氏模量,  $I$  为截面惯性矩,  $\rho$  为材料密度,  $k$  为剪切系数,  $A$  为截面面积,  $G$  为剪切模量。

对于简谐振动

$$W(x,t) = U(x) e^{i\omega t} \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)得

$$\frac{d^4 U(x)}{dx^4} - \frac{m\omega^2}{EI} U(x) + \frac{\rho I \omega^2}{EI} \frac{d^2 U(x)}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{kAG} \left( \frac{\rho I \omega^2}{EI} U(x) + \frac{d^2 U(x)}{dx^2} \right) = 0 \quad (3)$$

解得  $U(x) = C_1 \cos qx + C_2 \sin qx +$

$$C_3 \cosh px + C_4 \sinh px \quad (4)$$

式中  $C_1 \sim C_4$  均为待定系数,  $\beta^4 = m\omega^2/EI$ ,

对于多裂纹 Timoshenko 梁,将裂纹所在截面视为一扭转弹簧,如图 1 所示,则  $n-1$  条裂纹将整段梁分为  $n$  段独立子梁 ( $x_n = L$ ),各段关系为

$$\begin{cases} U_1(x) = C_1 \cos qx + C_2 \sin qx + C_3 \cosh px + C_4 \sinh px & (0 < x < x_1) \\ U_2(x) = C_5 \cos qx + C_6 \sin qx + C_7 \cosh px + C_8 \sinh px & (x_1 < x < x_2) \\ \dots \\ U_n(x) = C_{4n-3} \cos qx + C_{4n-2} \sin qx + C_{4n-1} \cosh px + C_{4n} \sinh px & (x_{n-1} < x < x_n) \end{cases} \quad (7)$$

第  $i$  条裂纹处挠度  $U(x_i)$ 、弯矩  $M(x_i)$  和剪力  $Q(x_i)$  均连续,而转角  $\theta(x_i)$  不连续。基于文献[12]可知,第  $i$  段子梁与第  $i+1$  段子梁在该裂纹处转角关系为

$$\theta_{i+1}(x_i) - \theta_i(x_i) = -A_i M_i(x_i) \quad (8)$$

式中 扭转弹簧的柔度  $A_i = [6\pi(1-\nu^2)h/(EI)] \times f(\xi_i)$ ,  $\nu$  为泊松比,相对裂纹深度  $\xi_i = a_i/h$ , 柔度函数为

$$f(\xi_i) = 0.6272 \xi_i^2 - 1.04533 \xi_i^3 + 4.5948 \xi_i^4 - 9.9736 \xi_i^5 + 20.2948 \xi_i^6 - 33.0351 \xi_i^7 + 47.1063 \xi_i^8 - 40.7556 \xi_i^9 + 19.6 \xi_i^{10} \quad (9)$$

则两相邻段子梁于裂纹截面处关系为

$$D_{i+1}(x_i) = B_i D_i(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (10)$$

式中 点传递矩阵  $B_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -A_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

以前三段梁 ( $0 < x < x_1, x_1 < x < x_2, x_2 < x < x_3$ ) 为例,建立递推为

$$D_1(0) = S(0) P_1 \quad (11)$$

$$D_1(x_1) = S(x_1) P_1 \quad (12)$$

由式(11)求出  $P_1$ ,并将其代入式(12)可得

$$D_1(x_1) = S(x_1) [S(0)]^{-1} D_1(0) \quad (13)$$

$$D_2(x_1) = S(x_1) P_2 \quad (14)$$

$$D_2(x_2) = S(x_2) P_2 \quad (15)$$

联立式(14,15)可得

$$D_2(x_2) = S(x_2) [S(x_1)]^{-1} D_2(x_1) \quad (16)$$

$$D_3(x_2) = S(x_2) P_3 \quad (17)$$

$$D_3(x_3) = S(x_3) P_3 \quad (18)$$

同理可得

$$D_3(x_3) = S(x_3) [S(x_2)]^{-1} D_3(x_2) \quad (19)$$

.....

则第  $i$  段传递为

$$D_i(x_i) = S(x_i) [S(x_{i-1})]^{-1} D_i(x_{i-1}) \quad (20)$$

按式(20)递推,结合式(10),可得总传递为

$$\begin{aligned} D_n(x_n) &= S(x_n) [S(x_{n-1})]^{-1} D_n(x_{n-1}) = \\ &= S(x_n) [S(x_{n-1})]^{-1} B_{n-1} D_{n-1}(x_{n-1}) = \\ &= S(x_n) [S(x_{n-1})]^{-1} B_{n-1} S(x_{n-1}) \times \\ &= [S(x_{n-2})]^{-1} D_{n-1}(x_{n-2}) \cdots = \\ &= S(x_n) [S(x_{n-1})]^{-1} B_{n-1} S(x_{n-1}) \times \\ &= [S(x_{n-2})]^{-1} B_{n-2} \cdots B_1 S(x_1) \times \\ &= [S(0)]^{-1} D_1(0) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \text{则 } T_c &= [T_{ij}]_{4 \times 4} = S(x_n) [S(x_{n-1})]^{-1} \times \\ &= B_{n-1} S(x_{n-1}) [S(x_{n-2})]^{-1} \times \\ &= B_{n-2} \cdots B_1 S(x_1) [S(0)]^{-1} \end{aligned}$$

即为含  $n-1$  条裂纹 Timoshenko 裂纹梁传递矩阵。

### 2.2 无裂纹 Timoshenko 梁传递矩阵

对于无裂纹 Timoshenko 梁,则不需考虑裂纹的影响,整段梁内挠度、转角、弯矩和剪力均连续,故只需要将含  $n-1$  条裂纹传递矩阵  $T_c$  的矩阵  $B_i$  令为单位阵  $E$  即可。其传递矩阵为  $T = T_c |_{B_i = E} = S(L) [S(0)]^{-1}$ 。

### 3 引入边界条件

针对于不同类型梁可引入各自边界条件来简

化方程组,从而将系数传递矩阵由原来的 4 阶转化为 2 阶,大大提升了运算效率。

#### 3.1 简支梁

由式(21)可知,含  $n-1$  条裂纹梁的矩阵传递关系为

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(0) \\ \theta_1(0) \\ M_1(0) \\ Q_1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_n(x_n) \\ \theta_n(x_n) \\ M_n(x_n) \\ Q_n(x_n) \end{bmatrix} \quad (22)$$

对于简支梁有

$$\begin{cases} U_1(0) = 0 \\ M_1(0) = 0 \\ U_n(x_n) = 0 \\ M_n(x_n) = 0 \end{cases} \quad (23)$$

联立式(22,23)可得

$$\begin{bmatrix} T_{12} & T_{14} \\ T_{32} & T_{34} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1(0) \\ Q_1(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

#### 3.2 悬臂梁 ( $x=0$ 处固定, $x=L$ 处自由)

$$\begin{cases} U_1(0) = 0 \\ \theta_1(0) = 0 \\ M_n(x_n) = 0 \\ Q_n(x_n) = 0 \end{cases} \quad (25)$$

同理可得

$$\begin{bmatrix} T_{33} & T_{34} \\ T_{43} & T_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1(0) \\ Q_1(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (26)$$

#### 3.3 两端固支梁

$$\begin{cases} U_1(0) = 0 \\ \theta_1(0) = 0 \\ U_n(x_n) = 0 \\ \theta_n(x_n) = 0 \end{cases} \quad (27)$$

同理可得

$$\begin{bmatrix} T_{13} & T_{14} \\ T_{23} & T_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1(0) \\ Q_1(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (28)$$

#### 3.4 一端固支一端简支梁 ( $x=0$ 处固定, $x=L$ 处铰接)

$$\begin{cases} U_1(0) = 0 \\ \theta_1(0) = 0 \\ U_n(x_n) = 0 \\ M_n(x_n) = 0 \end{cases} \quad (29)$$

同理可得

$$\begin{bmatrix} T_{13} & T_{14} \\ T_{33} & T_{34} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1(0) \\ Q_1(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (30)$$

#### 3.5 自由梁

$$\begin{cases} M_1(0) = 0 \\ Q_1(0) = 0 \\ M_n(x_n) = 0 \\ Q_n(x_n) = 0 \end{cases} \quad (31)$$

同理可得

$$\begin{bmatrix} T_{31} & T_{32} \\ T_{41} & T_{42} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1(0) \\ \theta_1(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (32)$$

对于上述五种情况,要使方程(24, 26, 28, 30, 32)有非零解,只需系数矩阵行列式为零。然后通过 Matlab 的 vpasolve 函数对方程进行求解,即可得到对应的自振频率。

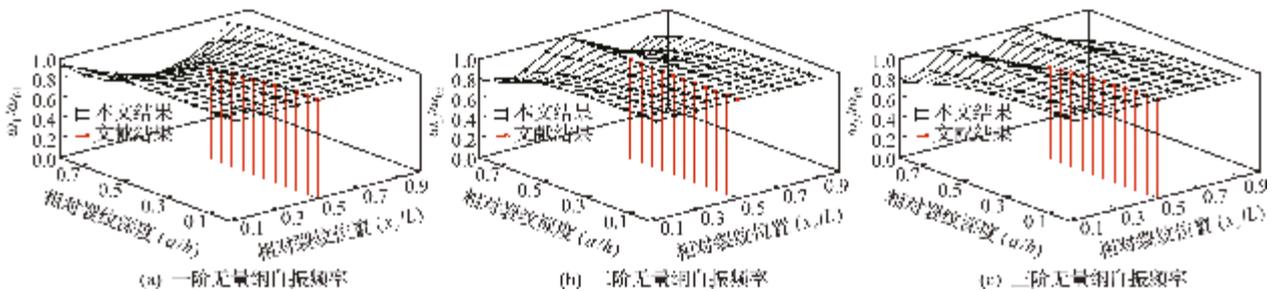
### 4 算例分析

为验证本文方法的合理性及有效性,引入文献进行对比,并结合 ABAQUS 有限元模型,分析随着裂纹位置、相对深度的变化对简支梁、悬臂梁和固定梁自振频率产生的影响。同时讨论不同跨高比下裂纹深度对自振频率的影响,简便起见,本文以单裂纹梁为例。

#### 4.1 简支裂纹梁

以单裂纹 Timoshenko 简支梁为例,采用文献 [10]中各项参数为,梁长  $L=0.65\text{ m}$ ,横截面宽度  $b=0.0254\text{ m}$ ,截面高度  $h=0.0254\text{ m}$ ,杨氏模量  $E=0.621 \times 10^{11}\text{ Pa}$ ,泊松比  $\nu=0.33$ ,密度  $\rho=2700\text{ kg/m}^3$ 。将本文计算结果与文献计算结果对比,绘制出简支梁随着相对裂纹深度与位置变化的前三阶无量纲自振频率三维图,如图 2 所示。

从图 2 可以看出,简支裂纹梁自振频率曲线关于梁中点前后对称,一阶无量纲自振频率曲线未出现尖角,二阶自振频率曲线出现一个尖角,三阶自振频率曲线出现两个尖角。相对裂纹深度的增加会导致自振频率的减小,本文计算结果与文献结果最大误差仅有 1%,验证了本文方法的有效性。



(注:  $\omega_i$  为裂纹梁第  $i$  阶自振频率,  $\omega_{oi}$  为无裂纹梁第  $i$  阶自振频率。)

图 2 单裂纹 Timoshenko 简支梁前三阶无量纲自振频率对比

Fig. 2 Comparison of the first three dimensionless frequencies of Timoshenko simply supported beam with a single crack

#### 4.2 有限元模型建立及对比

假定裂纹位于梁中点位置,通过有限元软件 ABAQUS 建立了在不同深度下 Timoshenko 悬臂梁

和两端固支梁共计 15 个裂纹梁模型,有限元模型及网格划分如图 3 所示。将本文方法计算结果与有限元结果进行对比,如图 4 所示。

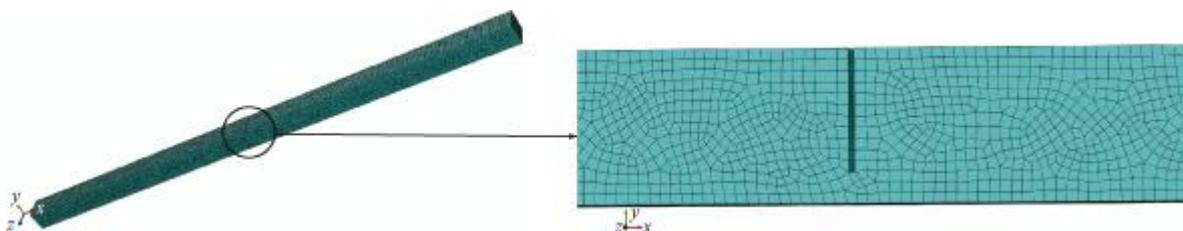


图 3 有限元模型及网格划分

Fig. 3 Finite element model and mesh division

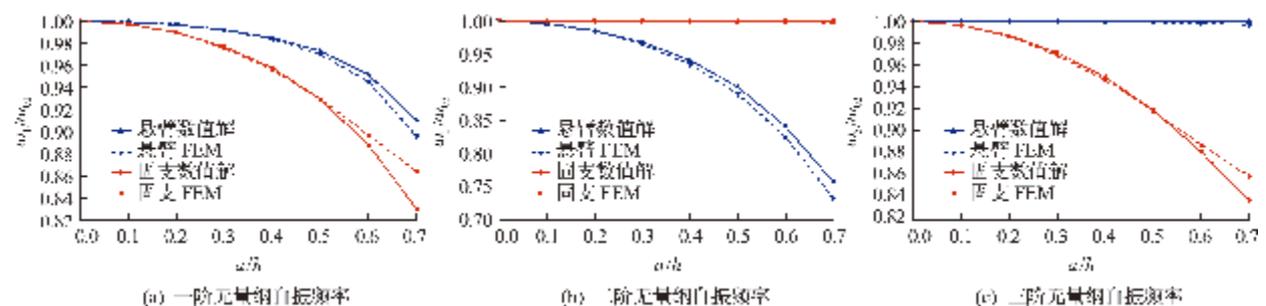
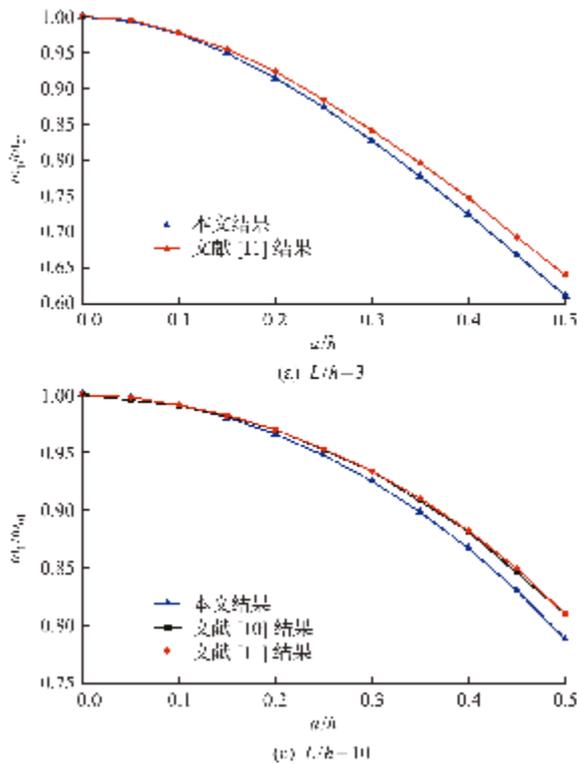


图 4 单裂纹 Timoshenko 悬臂梁和两端固支梁前三阶无量纲自振频率对比

Fig. 4 Comparison of the first three dimensionless natural frequencies of Timoshenko cantilever beam with single crack and fixed beam

从图 4 可以看出,随着相对裂纹深度的增加,悬臂梁前两阶自振频率逐渐降低,且二阶降低的速度大于一阶降低速度,对于三阶自振频率影响不大;两端固支梁一阶、三阶自振频率随着深度的增加而降低,且降低速度基本一致,而对于二阶自振频率基本未产生影响。本文计算结果与有限元结果误差最多不超过 3.86%,吻合良好。



### 4.3 不同跨高比下裂纹深度对自振频率的影响

分别讨论跨高比  $L/h$  取 3, 5, 10 和 15 情况下,相对裂纹深度对单裂纹 Timoshenko 简支梁自振频率的影响。仍假定裂纹位于梁中点位置,采用文献[10]中各项参数  $L=3\text{ m}$ ,  $b=0.1\text{ m}$ ,  $E=0.621 \times 10^{11}\text{ Pa}$ ,  $\nu=0.33$ ,  $\rho=2700\text{ kg/m}^3$ 。则一阶无量纲自振频率计算与文献对比结果如图 5 所示。

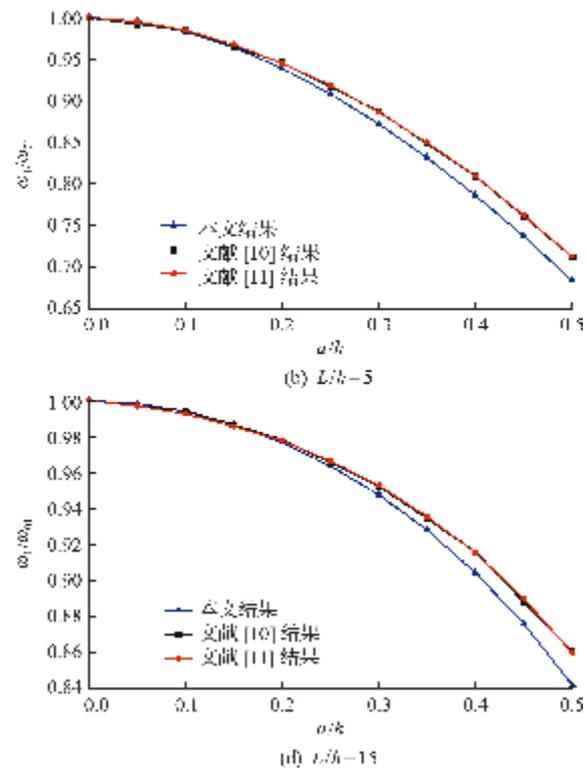


图 5 不同跨高比对应一阶无量纲自振频率对比

Fig. 5 Comparison of first-order dimensionless natural vibration frequencies corresponding to different span to height ratios

从图 5 可以看出,随着跨高比的增加,裂纹深度对一阶无量纲自振频率的影响逐渐减小。当跨高比为 3 时,本文计算结果与文献结果最大误差为 4.56%,且随着跨高比的增大,误差逐渐减小,体现了本文方法对 Timoshenko 裂纹梁的适用性。

## 5 结 论

本文基于传递矩阵法推导出含任意裂纹 Timoshenko 梁传递矩阵,引入边界条件对方程进行简化,通过 Matlab 对方程进行求解。并以单裂纹 Timoshenko 梁为例展开研究,分析裂纹位置及深度对自振频率的影响,将计算结果与文献结果及有限元结果进行对比,可得主要结论如下。

(1) 本文将计算过程利用 Matlab 进行编程,并通过 vpsolve 函数进行求解,对于不同类型的 Timoshenko 梁只需修改对应参数即可,该方法便捷高效。

(2) 引入单裂纹 Timoshenko 简支梁作为算例,

分析裂纹位置及相对深度对自振频率的影响,结果表明自振频率曲线关于梁中点对称,相对深度的增加会降低梁的自振频率,并与文献结果进行对比,计算结果与文献结果具有良好的一致性。

(3) 建立单裂纹 Timoshenko 悬臂梁和两端固支梁有限元模型,结果表明相对深度的增加会降低悬臂梁的前两阶自振频率及固支梁的一阶和三阶自振频率,计算结果与模拟结果吻合良好。

(4) 研究了不同跨高比下裂纹深度对 Timoshenko 简支梁自振频率的影响,结果表明跨高比的增加会在一定程度上降低裂纹对自振频率的影响,计算结果与文献结果误差较小,体现了本文方法的适用性。

## 参考文献(References):

[1] Chondros T G, Dimarogonas A D, Yao J. A continuous cracked beam vibration theory [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, **215**(1): 17-34.

- [2] 吴国荣,张 晓君. 含裂纹梁自由振动分析[J]. 船舶力学, 2007, **11**(5): 798-803. (WU Guo-rong, ZHANG Xiao-jun. Analysis of free vibration of a beam with cracks[J]. *Journal of Ship Mechanics*, 2007, **11**(5): 798-803. (in Chinese))
- [3] 孔 成, 续秀忠. 含裂纹悬臂梁的振动特性分析[J]. 噪声与振动控制, 2016, **36**(5): 31-33, 49. (KONG Cheng, XU Xiu-zhong. Analysis of vibration characteristics of cracked cantilever beams [J]. *Noise and Vibration Control*, 2016, **36**(5): 31-33, 49. (in Chinese))
- [4] 王丹生, 朱宏平. 基于弯曲弹簧模型的裂纹混凝土梁动力特性分析[J]. 世界地震工程, 2006, **22**(1): 45-48. (WANG Dan-sheng, ZHU Hong-ping. Dynamic characteristics of concrete beams with a crack based on a bending spring model [J]. *World Earthquake Engineering*, 2006, **22**(1): 45-48. (in Chinese))
- [5] 李学平, 余志武. 含多处裂纹梁的振动分析[J]. 应用力学学报, 2007, **24**(1): 66-68, 174. (LI Xue-ping, YU Zhi-wu. Vibration analysis to multipl cracked beam [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2007, **24**(1): 66-68, 174. (in Chinese))
- [6] 张 炜, 毛崎波, 聂彦平. 含任意数目裂纹梁的振动分析[J]. 机械设计与制造, 2012(10): 228-230. (ZHANG Wei, MAO Qi-bo, NIE Yan-ping. Free vibration analysis of a beam with an arbitrary number of cracks [J]. *Machinery Design & Manufacture*, 2012(10): 228-230. (in Chinese))
- [7] Lin H P, Chang S C, Wu J D. Beam vibrations with an arbitrary number of cracks[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, **258**(5): 987-999.
- [8] Lin H P, Chang S C. Free vibration analysis of multi-span beams with intermediate flexible constraints[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, **281**(1-2): 155-169.
- [9] Swamidasa S J, Yang X, Seshadri R. Identification of cracking in beam structures using Timoshenko and Euler formulations[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2004, **130**(11): 1297-1308.
- [10] 徐福后, 张玉祥. 含裂纹 Timoshenko 梁自由振动分析[J]. 船舶力学, 2011, **15**(10): 1166-1172. (XU Fu-hou, ZHANG Yu-xiang. Free vibration analysis of Timoshenko beam with crack [J]. *Journal of Ship Mechanics*, 2011, **15**(10): 1166-1172. (in Chinese))
- [11] 杨 骁, 雷菲菲, 汪德江. 基于裂纹扭转弹簧模型的 Timoshenko 裂纹梁动力特性分析[J]. 应用力学学报, 2020, **37**(3): 1115-1124, 1394. (YANG Xiao, LEI Fei-fei, WANG De-jiang. Dynamic characteristics analysis of Timoshenko cracked beam based on crack torsional spring model [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2020, **37**(3): 1115-1124, 1394. (in Chinese))
- [12] Dimarogonas A D, Paipetias S A. *Analytical Methods in Rotor Dynamics* [M]. London: Elsevier Applied Science, 1983.

## Analysis of natural vibration characteristics of Timoshenko cracked beam based on transfer matrix method

WANG Ya-bo, MA Qian-ying\*, WU Zong-huan

(Department of Architecture and Civil Engineering, Chang'an University, Xi'an 710061, China)

**Abstract:** Firstly, based on the transfer matrix method, the transfer matrices of a Timoshenko beam with arbitrary crack and Timoshenko beam without crack are derived. the crack section of the beam is assumed to be a mass free torsional spring. The matrix transfer relation between each beam segment and the crack section is established. Matlab is used to solve the equation. Secondly, the effect of crack location and relative depth on the natural vibration frequency of the simply supported beam with a single crack is discussed. The error is less than 1% compared with the results in the literature. Then, the finite element models of a cantilever beam and a beam fixed at both ends are established by ABAQUS, and the influence of the relative crack depth on the natural vibration frequency is analyzed. The calculated results are compared with the finite element results, and the error is less than 3.86%. Finally, the effect of the relative crack depth on the natural frequency of Timoshenko simply supported beams with different span to height ratios is studied. The maximum error between the calculated results and the literature is 4.56%, which verifies the validity and applicability of the proposed method.

**Key words:** transfer matrix method; timoshenko cracked beam; natural frequency of vibration; matlab; ABAQUS