

DOI: 10.7511/jslx20230327003

基于切比雪夫拟谱法的移动荷载作用下 简支梁动力响应计算

向华伟^{*1,2}, 曾滨¹, 荣华^{1,2}, 范兴朗², 耿岩¹

(1. 中冶建筑研究总院有限公司, 北京 100088; 2. 中冶检测认证有限公司, 北京 100088)

摘要: 采用切比雪夫拟谱法求解移动荷载作用下简支梁的动力响应问题, 该方法通过重新选取插值点的方式并借助转换矩阵对边界条件进行施加, 对集中荷载采用高斯函数法进行正则化处理。将本文方法计算结果与解析解和有限元解进行比较, 结果表明, 在划分较少单元数量时, 采用本文方法计算结果与解析解吻合良好, 求解效率高于有限元方法。采用本文方法对 Dirac 函数的正则化参数 σ_n 进行敏感性分析, 结果表明, 当在 $\pm 3\sigma_n$ 范围内布置配点数 6~10 个时, 计算结果能取得较好的精度。

关键词: 移动荷载; 简支梁; 动力响应; 拟谱法; 正则化

中图分类号: O302

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2024)05-0903-06

1 引言

桥梁结构在服役期间其主要的荷载形式为移动荷载, 如公路桥梁的车辆荷载、铁路桥梁的列车荷载等。在移动荷载作用下结构将产生较大的动力响应。如何对该响应进行精确求解是桥梁进行动力设计的关键问题, 国内外学者对这类问题进行了大量的研究, 出现了相当丰富的研究成果^[1-6]。

有限元方法由于适应性强, 能够适合大多数复杂结构的求解, 是进行复杂结构动力响应分析的标准方法; 但为了达到较高精度, 往往需要划分较多数量的单元, 导致计算效率不高, 这对于移动荷载动力问题的求解是相当不利的。另外一类较为流行的做法是配点法, 微分求积法是其中比较典型的一种方法^[7]。微分求积法通过在结构上选取若干节点, 将微分关系或者积分关系转化为节点上函数值的加权组合, 从而将微分方程或者积分方程转化为代数方程进行求解。对于高阶微分方程, 微分求积法采用在靠近边界一定范围选取节点的方式来处理边界条件, 主要问题在于处理集中荷载^[8,9]。对于如何选取节点位置存在较大的任意性, 这对于

部分对边界条件较为敏感的问题的求解是不利的。对于配点法, 集中荷载这类奇异函数的处理也是其难点。通常需要对奇异函数进行正则化处理^[10]。Jung^[11]研究了不同正则化处理对部分微分方程的影响。研究表明, 对于二阶微分方程, 直接投影法较伽辽金投影法和高斯函数法精度高, 且不出现在 Gibbs 现象。Eftekhari^[12]应用微分求积法分析移动荷载作用下的简支梁的动力响应, 并采用高斯函数法和修正投影法对移动集中荷载进行了正则化处理。研究表明, 修正投影法可以取得较高精度。Eftekhari^[12]的研究虽然认识到高斯函数的标准差参数对结果影响较大, 然而并未指出该参数在动力分析时具体如何选取。另外, 尽管该研究表明修正投影法具有较好求解精度, 但是该正则化在集中荷载附近会产生震荡现象, 而且该方法在处理时需要时刻确定移动荷载相邻两侧节点位置, 过程较为繁琐。

本文在前人研究的基础上, 采用切比雪夫拟谱法结合高斯函数正则化对移动荷载作用下等截面简支梁的动力响应进行研究。

收稿日期: 2023-03-17; 修改稿收到日期: 2023-05-12.

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(52078509); 国家自然科学基金青年基金项目(52008413); 中国博士后科学基金(2023M734085)资助项目。

作者简介: 向华伟^{*}(1984-), 男, 博士, 高级工程师(E-mail: hwxian@zju.edu.cn).

引用本文: 向华伟, 曾滨, 荣华, 等. 基于切比雪夫拟谱法的移动荷载作用下简支梁动力响应计算[J]. 计算力学学报, 2024, 41(5): 903-908. XIANG Hua-wei, ZENG Bin, RONG Hua, et al. Dynamic response of simply supported beams under moving loads based on Chebyshev pseudo-spectral method[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2024, 41(5): 903-908.

2 切比雪夫拟谱法

2.1 切比雪夫点和切比雪夫插值多项式

在区间 $[-1, 1]$ 中,当给定一组节点 $\{x_j\}_0^N$ 以及响应点处的函数值 $\{y_j\}_0^N$,则该组点可以插值生成一个次数不大于 N 的多项式 $p_N(x)$,即

$$p_N(x) = \sum_{i=0}^N l_i(x) y_i \quad (1)$$

式中函数 $l_i(x)$ 为拉格朗日基函数,可以表示为

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^N \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (2)$$

式(1)还可以进一步表示成更加紧凑和数值高效的重心插值形式^[13]

$$p_N(x) = \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i y_i}{x - x_i} / \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{x - x_i} \quad (3)$$

$$\text{式中 } \lambda_i = 1 / \left[\prod_{j \neq i} (x_i - x_j) \right] \quad (4)$$

当节点 $\{x_j\}_0^N$ 以式

$$x_j = -\cos(j\pi/N) \quad (j=0, 1, \dots, N) \quad (5)$$

选取时,节点 $\{x_j\}_0^N$ 称为第二类切比雪夫点,多项式 $p_N(x)$ 称为切比雪夫插值多项式。当采用切比雪夫点进行插值时,可以有效避免等距节点在高阶多项式插值引起的龙格现象。

2.2 切比雪夫微分矩阵

函数 $y=f(x)$ 采用插值多项式 $p_N(x)$ 近似表示时,其导数 $y'=f'(x)$ 可以近似写成

$$f'(x) \approx p'_N(x) = \sum_{i=0}^N l'_i(x) y_i \quad (6)$$

则函数在插值点上的二阶导数值可表示为

$$y'_i = \sum_{j=0}^N l'_j(x_i) y_j \quad (7)$$

式(7)可以进一步写成矩阵形式为

$$\mathbf{y}' = \mathbf{D}_N \mathbf{y} \quad (8)$$

式中 $\mathbf{y}' = [y'_0, y'_1, y'_2, \dots, y'_N]^T$, $\mathbf{y} = [y_0, y_1, y_2, \dots, y_N]^T$, $(\mathbf{D}_N)_{ij} = l'_j(x_i)$ 。矩阵 \mathbf{D}_N 称为函数 $y=f(x)$ 的微分矩阵。

当插值点采用切比雪夫点时, \mathbf{D}_N 可以显式表示成^[14]

$$(\mathbf{D}_N)_{00} = -\frac{2N^2+1}{6}, \quad (\mathbf{D}_N)_{NN} = \frac{2N^2+1}{6} \quad (9)$$

$$(\mathbf{D}_N)_{jj} = x_j / [2(1-x_j^2)] \quad (j=1, \dots, N-1) \quad (10)$$

$$(\mathbf{D}_N)_{ij} = \frac{c_i (-1)^{i+j}}{c_j x_j - x_i} \quad (i \neq j; i, j=1, \dots, N-1) \quad (11)$$

式中

$$c_i = \begin{cases} 2 & (i=0, N) \\ 1 & (\text{其他情况}) \end{cases} \quad (12)$$

容易验证,函数高阶导数 $f^{(n)}(x)$ 在插值点上的值可以表示为

$$\mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{D}_N^{(n)} \mathbf{y} = \mathbf{D}_N^{(n)} \mathbf{y} \quad (13)$$

式中 $\mathbf{y}^{(n)} = [y_0^{(n)}, y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots, y_N^{(n)}]^T$ 。即函数的 n 阶微分矩阵可以表示为一阶微分矩阵的 n 次幂,大大简化矩阵的计算。

2.3 切比雪夫拟谱法

切比雪夫拟谱法是配点法的一种,其采用切比雪夫插值多项式来近似表示微分方程的解,要求在插值点上切比雪夫插值多项式精确满足微分方程,同时还需要满足边界条件。

考虑一个线性非齐次 m 阶常微分方程

$$a_m(x) u^{(m)} + \dots + a_1(x) u'(x) + a_0(x) u(x) = f(x) \quad (14)$$

当采用切比雪夫拟谱法对方程进行求解时,方程可以转化为以下 $N+1$ 阶线性代数方程组

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (15)$$

式中

$$\mathbf{A} = \text{diag}(\mathbf{a}_m) \mathbf{D}_N^m + \dots + \text{diag}(\mathbf{a}_1) \mathbf{D}_N + \text{diag}(\mathbf{a}_0) \quad (16)$$

$$\mathbf{f} = [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_N)]^T \quad (17)$$

式中 $\text{diag}(\mathbf{a}_i)$ 为以向量 \mathbf{a}_i 为对角元素的 $N+1$ 阶对角矩阵,即

$$\text{diag}(\mathbf{a}_i) = \begin{bmatrix} a_i(x_0) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_i(x_N) \end{bmatrix} \quad (i=0, 1, \dots, m) \quad (18)$$

式(15)结合 m 个边界条件即可得到方程的近似解。由于式(15)为具有 $N+1$ 个变量的 $N+1$ 组方程组,为了满足边界条件,需将式(15)划去 m 个方程并替之以 m 个边界条件方程。传统的拟谱法对于如何选取替代行及其对解的性状有何影响并无深入探究^[15]。微分求积法在处理边界条件时采用在区间端点附近选取额外的点来补充边界条件。然而,对于额外点如何选取并无一般的准则。本文采取Driscoll等^[16]提出的转换矩阵法来处理这个问题。该方法的核心在于认识到微分过程是一个函数降阶的过程,因而微分矩阵在本质上应该具有矩形的矩阵形状,而非方形矩阵形状。基于此,Driscoll等^[16]通过重新选取插值点的方式对高阶导数项进行多项式插值,并通过转换矩阵映射到现有的插值点。具体来说,对于 $\{x_j, y_j\}_0^N$ 确定的插值多项式 $p_N(x)$ 在另外一组点 $\{\tilde{x}_k\}_0^{N-m}$ 上的函数值 $\{\tilde{y}_k\}_0^{N-m}$ 和插值节点上的函数值 $\{y_j\}_0^N$ 之间存在如下关系

$$\bar{\mathbf{y}} = P_{N+1,m} \mathbf{y} \quad (19)$$

式中 $\bar{\mathbf{y}} = [\bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{N-m}]^T$, $\mathbf{y} = [y_0, y_1, \dots, y_N]^T$, $P_{N+1,m}$ 为重采样转换矩阵,大小为 $(N+1-m) \times (N+1)$, $P_{N+1,m}$ 的每个元素定义如下

$$(P_{N+1,-m})_{j,k} = \begin{cases} \frac{\lambda_k}{\tilde{x}_j - x_k} \left(\sum_{l=0}^N \frac{\lambda_l}{\tilde{x}_j - x_l} \right)^{-1} & (\tilde{x}_j \neq x_k) \\ 1 & (\tilde{x}_j = x_k) \end{cases} \quad (20)$$

通常情况下, $\{\tilde{x}_k\}_0^{N-m}$ 选取为第一类切比雪夫点,即

$$\tilde{x}_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2(N-m)}\right) \quad (k=0, \dots, N-m) \quad (21)$$

总体来说,Driscoll等^[16]首先通过区间中另外一组点对整个方程进行近似,并通过转换矩阵变换回原有配置点,得到的离散控制方程为具有 $N+1$ 个变量的 $N+m-1$ 个方程,再配合 m 个边界条件方程,得到了最后需要求解的方程,避免了传统方法处理边界条件的任意性。

需要指出的是,对于微分求积法而言,当配点选取为切比雪夫点时,切比雪夫配点法与微分求积法是等价的^[9]。本文在处理边界条件时采用 Driscoll等^[16]提出的转换矩阵法,克服了微分求积法在处理边界条件上的一些不足。

3 控制方程离散及求解方法

考虑如图1所示简支梁结构。该结构跨度为 L ,梁截面刚度为 EI ,线质量密度为 m ,单位长度阻尼系数为 c ,结构受到一速度为 v 的移动集中荷载 p 作用。为了求解该结构在移动荷载作用下的动力响应,首先建立坐标系如图1所示, $u(x,t)$ 表示梁沿着 y 轴方向挠度,则其控制方程为

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + (EIu'')'' = p\delta(x-vt) \quad (0 \leq vt \leq L) \quad (22)$$

式中 $(')$ 和 $(\dot{})$ 分别表示 $u(x,t)$ 对水平坐标 x 和对时间 t 的导数, δ 为 Dirac 函数,该函数定义为

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ \infty & (x = 0) \end{cases} \quad (23)$$

且有关系

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.0 \quad (24)$$

对于简支梁结构,其边界条件为

$$u(0,t) = 0, u''(0,t) = 0 \quad (25)$$

$$u(L,t) = 0, u''(L,t) = 0 \quad (26)$$

假定结构在施加移动荷载前处于静止状态,则其初始条件可表示为

$$u(x,0) = 0, \dot{u}(x,0) = 0 \quad (27,28)$$

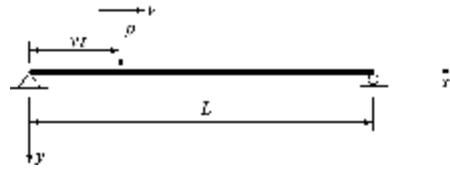


图1 移动荷载作用下的简支梁结构
Fig.1 Simply-support beam under moving load

控制方程(22)的求解涉及到对空间和时间的离散。对于 x 方向,采用切比雪夫拟谱法时,控制方程(22)左侧化为

$$L[\mathbf{u}] := \text{diag}(\mathbf{m})\ddot{\mathbf{u}} + \text{diag}(\mathbf{c})\dot{\mathbf{u}} + [\text{diag}(\mathbf{EI})D_N^4 + 2\text{diag}(D_N \mathbf{EI})D_N^3 + \text{diag}(D_N^2 \mathbf{EI})D_N^2]\mathbf{u} \quad (29)$$

式中 $\mathbf{u} = [u(x_0,t), u(x_1,t), \dots, u(x_N,t)]^T$

$$\mathbf{m} = [m(x_0), m(x_1), \dots, m(x_N)]^T$$

$$\mathbf{c} = [c(x_0), c(x_1), \dots, c(x_N)]^T$$

$$\mathbf{EI} = [EI(x_0), EI(x_1), \dots, EI(x_N)]^T$$

控制方程(22)右侧 Dirac 函数项是奇异函数,采用拟谱法求解时需要进行正则化处理。本文采用高斯函数来对 Dirac 函数进行正则化,即用函数

$$\delta_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad (30)$$

近似替代 $\delta(x)$ 。当 $n \rightarrow +\infty$ 时,序列 $\{\sigma_n\} \rightarrow 0.0$, 从而有 $\delta_n(x) \rightarrow \delta(x)$ 。参数 σ_n 反映了正则函数 $\delta_n(x)$ 在点 x 周围的集中程度。在实际计算中,参数 σ_n 如何选取将影响到解的精度和收敛速度。下文对该参数的选取进行详细讨论。

方程(22)右侧矢量 $\mathbf{F}(t)$ 可以表示为

$$\mathbf{F}(t) = [\delta_n(x_0 - vt), \delta_n(x_1 - vt), \delta_n(x_2 - vt), \dots, \delta_n(x_N - vt)]^T \quad (31)$$

这样,控制方程转化为一组常微分方程组为

$$L[\mathbf{u}] = \mathbf{F}(t) \quad (32)$$

方程(32)还需要结合边界条件进行求解。边界条件(25,26)可以离散为

$$e_1^T \mathbf{u} = 0, D_N^2(1, \cdot) \mathbf{u} = 0 \quad (33)$$

$$e_{N+1}^T \mathbf{u} = 0, D_N^2(N+1, \cdot) \mathbf{u} = 0 \quad (34)$$

式中 $e_1 = [1, 0, 0, \dots, 0]^T$, $e_{N+1} = [0, 0, 0, \dots, 1]^T$, $D_N^2(1, \cdot)$ 和 $D_N^2(N+1, \cdot)$ 分别表示二阶微分矩阵的第1行和第 $N+1$ 行。为方便计,可以将边界条件统一为

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (35)$$

式中

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} e_1^T \\ e_{N+1}^T \\ D_N^2(1, \cdot) \\ D_N^2(N+1, \cdot) \end{bmatrix} \quad (36)$$

当采用第2节的重采样方法求解方程时,原有插值点和重采样点的函数值 u 和 \bar{u} 可以进一步结合式(35)写成

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ P_{N+1,-4} \end{pmatrix} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_{N+1,-4} \end{pmatrix} \bar{\mathbf{u}} \quad (37)$$

式中 $I_{N+1,-m}$ 为 $(N+1)-4$ 阶单位矩阵。

式(37)说明 \mathbf{u} 可以通过 $\bar{\mathbf{u}}$ 计算得到

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ P_{N+1,-4} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ I_{N+1,-4} \end{pmatrix} \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{C} \bar{\mathbf{u}} \quad (38)$$

方程(32)两侧左乘 $P_{N+1,-4}$ 同时结合式(38),得到最终控制方程为

$$\tilde{\mathbf{L}}[\bar{\mathbf{u}}] = \tilde{\mathbf{F}}(t) \quad (39)$$

式中

$$\tilde{\mathbf{L}}[\bar{\mathbf{u}}] := \tilde{\mathbf{m}}\ddot{\bar{\mathbf{u}}} + \tilde{\mathbf{c}}\dot{\bar{\mathbf{u}}} + \tilde{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{u}} \quad (40)$$

$$\tilde{\mathbf{m}} = P_{N+1,-4} \text{diag}(\mathbf{m}) \mathbf{C} \quad (41)$$

$$\tilde{\mathbf{c}} = P_{N+1,-4} \text{diag}(\mathbf{c}) \mathbf{C} \quad (42)$$

$$\tilde{\mathbf{k}} = P_{N+1,-4} [\text{diag}(\mathbf{EI}) D_N^4 + 2 \text{diag}(D_N \mathbf{EI}) D_N^3 + \text{diag}(D_N^2 \mathbf{EI}) D_N^2] \mathbf{C} \quad (43)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}(t) = P_{N+1,-4} \mathbf{F}(t) \quad (44)$$

方程(39)的初始条件为

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{0}) = [u(\hat{x}_0, 0), u(\hat{x}_1, 0), \dots, u(\hat{x}_{N-m}, 0)]^T = [0, 0, \dots, 0]^T \quad (45)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{0}) = [\dot{u}(\hat{x}_0, 0), \dot{u}(\hat{x}_1, 0), \dots, \dot{u}(\hat{x}_{N-m}, 0)]^T = [0, 0, \dots, 0]^T \quad (46)$$

式(39)为二阶常微分方程组,结合初始条件(45,46)可以采用 Newmark- β 法进行求解^[17]。

具体计算流程如图2所示。

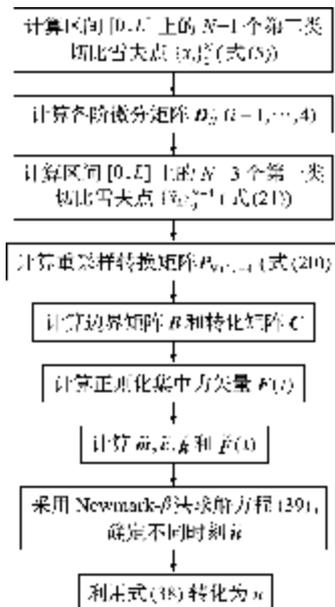


图2 方法的计算流程

Fig. 2 Flow diagram of the method

4 计算结果与讨论

为了说明本文方法的收敛性能和计算精度,选取部分文献的算例进行计算并和相应的解析解和有限元解进行比较,同时对所提算法的部分重要参数进行讨论。

4.1 等截面简支梁移动荷载分析

本算例来自文献[5],具体结构如图1所示。结构参数为 $L=20$ m, $m=3000$ kg/m, $EI=10^6$ N·m², $v=27.8$ m/s,不考虑阻尼作用,计算中正则化参数 $\sigma_n=4L/(3N)$ 。

图3为 $N=20, 40$ 和 60 时本文方法跨中位移随时间变化结果与解析解的比较情况。可以看出,当 $N=20$ 时,本文数值解与解析解已经吻合得很好。且当 N 越大时,结果越逼近解析解,说明了本文解随着配点数增大时解的收敛性。图4和图5分别比较了不同节点数情况下跨中弯矩和支座剪力的收敛情况。可以看出,由于弯矩和剪力分别与位移的二阶和三阶导数成正比,其收敛速度远低于挠度。事实上,文献[5]对于挠度的解析解只需要取无穷级数的前5项即可得到很好的计算精度,而对于剪力则在计算时需截断到无穷级数的前

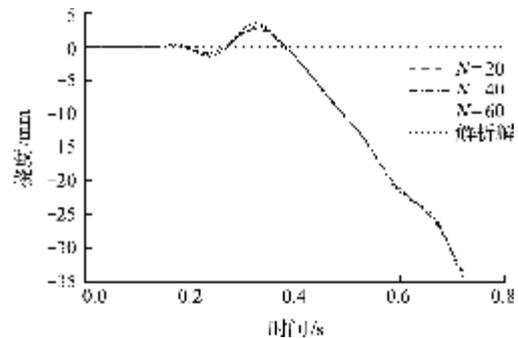


图3 不同节点数挠度计算结果与解析解比较情况

Fig. 3 Comparison of mid-span deflection of the beam between the analytical solution and proposed results with different collocation points

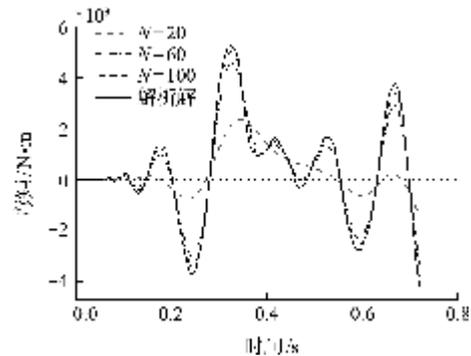


图4 跨中弯矩计算结果与解析解比较情况

Fig. 4 Comparison of mid-span moment of the beam between the analytical solution and proposed results with different collocation points

300项才能得到较为满意的计算精度。图6进一步比较了本文解、有限元解和解析解跨中位移的变化情况。有限元求解时单元选用欧拉梁单元,单元数量为100。需要指出的是,在有限元分析中,采用与文献[5]相同的模态叠加法进行计算。可以看出,本文解和有限元解均与解析解结果吻合良好,且本文解的结果优于有限元结果。说明切比雪夫插值多项式具有良好的逼近性能。

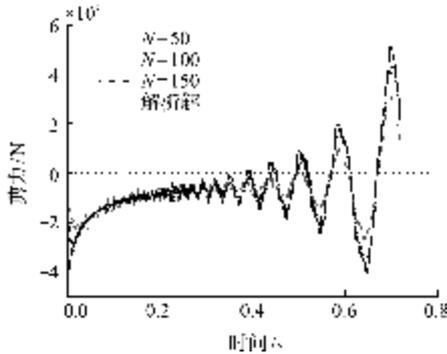


图5 支座剪力计算结果与解析解比较情况

Fig. 5 Comparison of mid-span shear of the beam between the analytical solution and proposed results with different collocation points

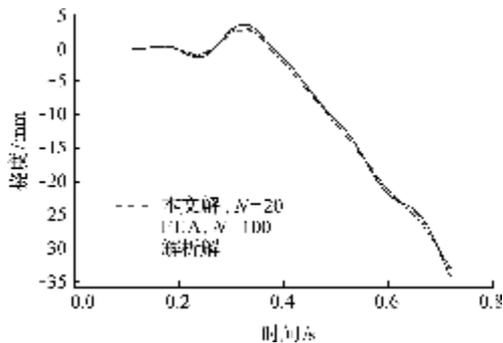


图6 不同计算方法挠度结果比较

Fig. 6 Comparison of mid-span deflection of the beam between the analytical solution, FEM solution and proposed results

4.2 参数敏感性讨论

Dirac函数的正则化参数 σ_n 反应了对集中荷载近似的集中程度。下面讨论不同的 σ_n 取值对计算结果的精度和收敛特性的影响。图7和图8分别显示了当 $\sigma_n = L/(3N)$, $\sigma_n = 3L/(3N)$, $\sigma_n = 5L/(3N)$ 和 $\sigma_n = 7L/(3N)$ 时跨中弯矩随时间变化及其与解析解比较的误差情况。可以看出,当 $\sigma_n = L/(3N)$,计算解在解析解周围波动幅度较大,而当 $\sigma_n = 7L/(3N)$ 时,计算解整体偏离解析解。这主要是因为当 σ_n 比较小时,正则函数集中程度较大,在一定范围内配点采集不到足够的关于荷载的信息,从而引起解的波动。而当 σ_n 较大时,正则函数不能较精确近似集中荷载,从而引起较大的整体误差。计算经验表明,在 $\pm 3\sigma_n$ 的范围内包

含 $6 \sim 10$ 个配点能够取得较好的计算效果。选取 $\pm 3\sigma_n$ 的原因在于在这个范围内高斯函数的积分高达0.99999998,基本包含了所有的集中荷载的信息。

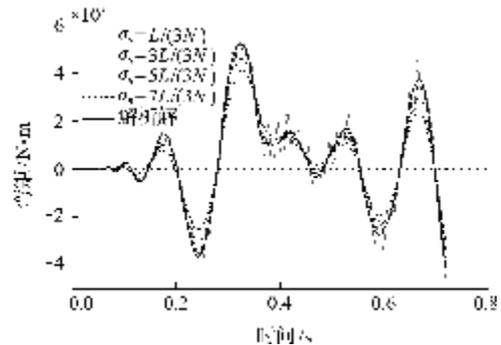


图7 不同 σ_n 情况下跨中弯矩随时间变化情况

Fig. 7 Effect of σ_n on the mid-span moment of the beam

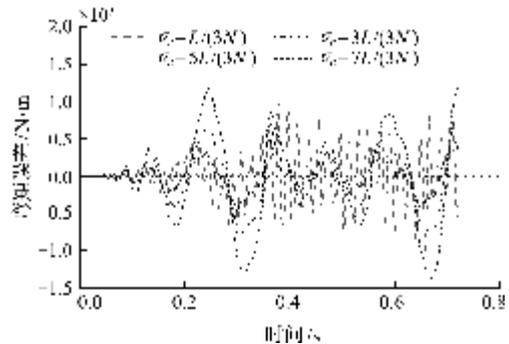


图8 不同 σ_n 情况下跨中弯矩误差随时间变化情况

Fig. 8 Error of mid-span moment with different σ_n

5 结论

移动荷载作用下结构的动力响应是桥梁工程中的一类重要问题。本文采用切比雪夫拟谱法研究了简支梁结构在单个移动荷载作用下的动力响应问题。通过与解析解、有限元分析结果比较和参数敏感性分析,得到如下结论。

(1) 本文通过引入 Driscoll 等^[16]的方式可以自然处理求解问题的边界条件,改进了传统拟谱法和微分求积法在边界条件处理上的缺点。

(2) 拟谱法求解移动荷载作用下简支梁的动力响应时,较少的单元数量即可取得较好的计算精度,求解效率高于有限元法。

(3) 对奇异函数进行正则化处理时,需要注意正则参数的选取。当采用高斯函数近似奇异函数时,正则参数 σ_n 在 $3L/(3N) \sim 5L/(3N)$ 范围内能取得较好的计算精度。

参考文献(References):

[1] 李克飞,刘维宁,吴宗臻. 变速移动质量作用下轨道动力响应解析解研究[J]. 工程力学, 2014, 31(7): 162-169. (LI Ke-fei, LIU Wei-ning, WU Zong-zhen. Analytical study on the vibration response of the track

- subjected to the moving mass with variable speeds [J]. *Engineering Mechanics*, 2014, **31**(7): 162-169. (in Chinese))
- [2] 王宁波,任伟新,肖 祥. 列车-桥梁耦合振动研究综述 [J]. *力学进展*, 2012, **42**(5): 634-643. (WANG Ning-bo, REN Wei-xin, XIAO Xiang. The state of art of study on vehicle-bridge coupling vibration [J]. *Advances in Mechanics*, 2012, **42**(5): 634-643. (in Chinese))
- [3] 徐卫敏,何剡江,吴 熙. 变截面欧拉梁自由振动分析的重采样微分求积法 [J]. *计算力学学报*, 2023, **40**(1): 73-78. (XU Wei-min, HE Yan-jiang, WU Xi. Re-sampling differential quadrature method for free vibration analysis of Euler beams with variable cross section [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2023, **40**(1): 73-78. (in Chinese))
- [4] 李小珍,张志俊,刘全民. 任意移动荷载列作用下简支梁桥竖向振动响应解析分析 [J]. *振动与冲击*, 2012, **31**(20): 137-142. (LI Xiao-zhen, ZHANG Zhi-jun, LIU Quan-min. Analytical analysis of vertical vibration responses of simply supported beam bridge under arbitrary moving load train [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2012, **31**(20): 137-142. (in Chinese))
- [5] 侯忠明,夏 禾,张彦玲. 移动荷载作用下简支钢-混凝土梁的动力响应分析 [J]. *铁道学报*, 2014, **36**(5): 103-108. (HOU Zhong-ming, XIA He, ZHANG Yan-ling. Dynamic analysis on simply-supported steel-concrete composite beams under moving loads [J]. *Journal of the China Railway Society*, 2014, **36**(5): 103-108. (in Chinese))
- [6] Yang Y B, Yao Z D, Wu Y S. *Vehicle-Bridge Interaction Dynamics: With Applications to High-Speed Railways* [M]. River Edge, NJ: World Scientific, 2004.
- [7] Wang X. *Differential Quadrature and Differential Quadrature Based Element Methods: Theory and Applications* [M]. Boston: Elsevier Inc., 2015.
- [8] Wang X W, Jin C H. Differential quadrature analysis of moving load problems [J]. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **8**(4): 536-555.
- [9] Shu C. *Differential Quadrature and Its Application in Engineering* [M]. New York: Springer, 2000.
- [10] Wei G W, Zhao Y B, Xiang Y. Discrete singular convolution and its application to the analysis of plates with internal supports. Part 1: Theory and algorithm [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, **55**(8): 913-946.
- [11] Jung J H. A note on the spectral collocation approximation of some differential equations with singular source terms [J]. *Journal of Scientific Computing*, 2009, **39**(1): 49-66.
- [12] Eftekhari S A. A differential quadrature procedure with direct projection of the heaviside function for numerical solution of moving load problem [J]. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2016, **13**(9): 1763-1781.
- [13] Trefethen L N. *Approximation Theory and Approximation Practice* [M]. Philadelphia: PA Society for Industrial and Applied Mathematics, 2019.
- [14] Fornberg B. *A Practical Guide to Pseudospectral Methods* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- [15] Boyd J P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods: Second Revised Edition* [M]. Courier Corporation, 2001.
- [16] Driscoll T A, Hale N. Rectangular spectral collocation [J]. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 2016, **36**(1): 108-132.
- [17] Bathe K J. *Finite Element Procedures* [M]. Klaus-Juergen Bathe, 2006.

Dynamic response of simply supported beams under moving loads based on Chebyshev pseudo-spectral method

XIANG Hua-wei^{*1,2}, ZENG Bin¹, RONG Hua^{1,2}, FAN Xing-lang², GENG Yan¹

(1. Central Research Institute of Building and Construction Co., Ltd., MCC Group, Beijing 100088, China;

2. Inspection and Certification Co., Ltd., MCC, Beijing 100088, China)

Abstract: The dynamic response of a simply supported beam under a moving load is determined by using the Chebyshev pseudo-spectral method. The boundary conditions of the simply supported beam are imposed by reselecting the interpolation points and using a transform matrix. The concentrated load is regulated by a Gauss function. The computational results from the proposed method are compared with the analytical solutions and the finite element method. The results show that the proposed method with fewer elements is in good agreement with the analytical solution, and displays a higher computational efficiency than the finite element method. In addition, a sensitivity analysis is conducted for the regularisation parameter σ_n of the Dirac function. The analysis results indicate that when six to ten collocation points within the range of $\pm 3\sigma_n$ are used, the computational results can achieve high accuracy.

Key words: moving load; simply supported beam; dynamic response; pseudo-spectral method; regularization