

DOI: 10.7511/jslx20230920003

基于改进傅里叶级数的黏弹性夹层板 动力问题的数值算法研究

马乾瑛*, 梅杨, 孙正

(长安大学 建筑工程学院, 西安 710061)

摘要: 本文提出了一种基于改进傅里叶级数的新型数值算法, 用于求解任意边界条件下黏弹性夹层板的自由振动特性。该算法利用一阶剪切理论建立面外位移场, 采用改进的傅里叶级数拟合位移容许函数, 结合 Rayleigh-Ritz 法计算动能和势能, 并利用 Hamilton 变分原理得到振动特征矩阵方程。计算结果表明, 无论是梁式板结构还是各种边界条件下的夹层板结构, 该算法得到的自振频率和损耗因子与解析解、2D 有限元解、数值计算法和 ABAQUS 有限元软件等计算结果相比, 误差均不超过 1%, 计算效率提高了 10 倍, 并且克服了传统方法只能求解特定边界下振动问题的局限性。本文建立的方法具有收敛性好、计算效率高和适应性强等特点。

关键词: 黏弹性夹层板; 任意边界条件; 改进的傅里叶级数; 自由振动

中图分类号: O327

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2024)05-0894-09

1 引言

黏弹性夹层板结构由于其优异的力学性能和广泛的工程应用^[1], 其振动特性一直是研究的热点。目前, 对于黏弹性夹层板振动特性问题的研究方法主要分为数值计算法和有限元方法。在有限元方法方面, 文献[2-7]基于不同的理论假设和单元类型, 建立了黏弹性夹层板的有限元模型, 并分析了不同参数和边界条件对其振动特性的影响。然而, 有限元方法需要建立较大的单元矩阵, 计算时间和储存空间较大, 且收敛速度较慢。在数值计算方面, 文献[8-10]利用不同的数值算法, 求解了黏弹性夹层板的振动控制微分方程, 并与有限元方法进行了比较。数值算法具有较高的计算效率和精度, 但其求解模式不统一, 且对于不同结构形式和不同边界条件等情况, 需要进行相应的调整和改进。

在数值算法方面, Li^[11] 在分析任意边界条件下梁的弯曲振动特性中首先提出一种改进的傅里叶级数算法(IFSM)。由于梁板类的振动控制微分

方程往往是高阶的偏微分方程, 这使得传统的位移容许函数很难拥有足够的光滑性来满足高阶的振动控制微分方程, 导致计算结果在真实位移场的边界处容易发生不收敛的问题, 而 IFSM 在传统的傅里叶级数上添加相应的辅助函数, 很好地解决了该问题, 之后这类算法在薄板类结构^[12-15] 的振动特性分析中均取得了较好的计算效果, 但该方法在夹层板结构中的运用还鲜有研究。

为了克服上述研究方法的不足, 本文提出了一种基于改进傅里叶级数的数值算法(IFSM), 用于求解任意边界条件下黏弹性夹层板的振动特性问题。该方法根据一阶剪切变形理论和位移协调条件建立黏弹性夹层板的动力学模型, 采用 IFSM 对夹层板的位移函数进行展开, 并通过引入辅助级数项来消除边界条件上的不连续性, 再通过调节边界弹簧刚度来模拟任意边界条件, 将展开后的位移函数代入动力学方程, 得到一组广义频率特征方程, 最后采用 MATLAB 软件进行编程求解, 并分析了弹簧刚度取值对黏弹性夹层板的动力响应和稳定性的影响。本文计算方法能够适应任意形式结构

收稿日期: 2023-09-20; 修改稿收到日期: 2023-10-24.

基金项目: 国家自然科学基金(51208041); 陕西省自然科学基金(2020SF-382; 2014JM2-5080); 长安大学教学改革研究项目(20211822; 300103292815)资助。

作者简介: 马乾瑛*(1982-), 男, 博士, 副教授, 硕士生导师(E-mail: mqy@chd.edu.cn).

引用本文: 马乾瑛, 梅杨, 孙正. 基于改进傅里叶级数的黏弹性夹层板动力问题的数值算法研究[J]. 计算力学学报, 2024, 41(5): 894-902.
MA Qian-ying, MEI Yang, SUN Zheng. Numerical algorithm for dynamic problems of viscoelastic sandwich plates based on improved Fourier series[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2024, 41(5): 894-902.

和任意边界条件,保证位移函数在整个域内及边界上的光滑性,同时降低单元矩阵的维度,提高收敛速度和计算效率。通过与 ABAQUS 和其他文献计算结果进行对比,验证了本文方法的有效性和优越性。

2 计算模型

采用人工弹簧模拟边界的矩形夹层板如图 1 所示。其中 x 和 y 方向的长度分别为 L_x 和 L_y , 两个水平方向的线性弹簧单元 (k_{hx}, k_{hy}) 用于控制界面内位移,一个竖向弹簧单元 (k_v) 用于控制整个结构的竖向移动以及一个旋转弹簧单元 (K_t) 用于控制边界转角位移。

2.1 几何变形关系

在图 1 所示的矩形夹层板中取出一块板单元,

其中上板和下板均采用基尔霍夫板模型,并假设板与板之间的连接方式为绑定连接,接触面不发生相互错动。板的厚度由上至下分别为 h_c, h_v 和 h_p , 整体板的挠度函数为 w 。在 x 轴方向上,上板面内的中面位移分别为 u_c 和 u_p , 黏弹性层面内的中面位移为 u_v , 剪切角为 γ_{vx} , 绕 y 轴的转角为 $\partial w/\partial x$; 并以 $v_c, v_p, v_v, \gamma_{vy}$ 和 $\partial w/\partial y$ 表示在 y 方向与之相对应的位移。根据一阶剪切变形理论,板的位移函数可以表示为

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z\Psi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z\Psi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

式中 u_0 和 v_0 为板单元各层的中面位移, w_0 为板单元的整体挠度, $\Psi_x = \partial w/\partial x, \Psi_y = \partial w/\partial y$ 分别为板单元绕 y 轴和 x 轴的转角。

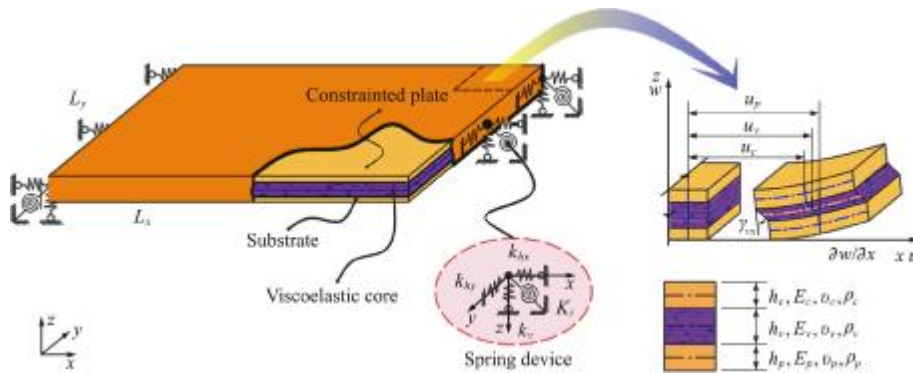


图 1 人工弹簧模拟边界的矩形夹层板
Fig. 1 Rectangular sandwich plate with artificial spring simulated boundary

在实际工程中,黏弹性层的弹性模量一般为上下板弹性模量的万分之一或千分之一,因而其变形很大程度上受到上下板的控制。根据图 1 所示的几何关系,黏弹性层的面内位移可以通过上下板的位移进行控制。因此,板内的独立位移函数为

$$\mathbf{U} = \{u_c, v_c, u_p, v_p, w\}^T \quad (2)$$

上述几何关系已在文献[3]中进行了具体讨论,其中上下板的位移控制中部黏弹性层的位移,减少了待求参数,由此得到黏弹性层的面内位移 u_v 和 v_v 为

$$\begin{Bmatrix} u_v \\ v_v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}d_1 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}d_1 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \mathbf{U} = \mathbf{D}_0 \mathbf{U} \quad (3)$$

式中 $d_1 = (h_c - h_p)/2$ 。其中 \mathbf{D}_0 为微分算子矩阵(以下未做特别说明, \mathbf{D}_* 和 \mathbf{D}_*^* 均为微分算子矩阵,其中 * 代表省略写法)。

黏弹性层在 XOZ 平面及 YOZ 平面内的剪切

角 γ_{vx} 和 γ_{vy} 可表示为

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{vx} \\ \gamma_{vy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_2 & 0 & -d_2 & 0 & d_2 d_3 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 1 & 0 & -d_2 & d_2 d_3 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \mathbf{U} \text{ or } \boldsymbol{\varepsilon}_T = \mathbf{D}_T \mathbf{U} \quad (4)$$

式中 $\boldsymbol{\varepsilon}_T$ 为应变向量(以下未做特别说明, $\boldsymbol{\varepsilon}_*$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_*^*$ 均为应变向量,其中 $d_2 = \frac{1}{h_v}, d_3 = (\frac{h_c + h_p}{2} + h_v)$ 。

2.2 应力应变关系

根据基尔霍夫薄板理论,上下弹性板的面内应变位移关系可表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \{\boldsymbol{\varepsilon}_x^i, \boldsymbol{\varepsilon}_y^i, \boldsymbol{\gamma}_{xy}^i\}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T \{u_i, v_i\}^T = \mathbf{D}_i \mathbf{U}_i \quad (5)$$

式中 下标 i 表示微分对象 ($i = c, p$)。

将式(3)代入式(5),得到黏弹性层的面内应变位移关系

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^v \\ \epsilon_{yy}^v \\ \gamma_{xy}^v \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & d_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & d_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 2d_1 \frac{\partial^2}{\partial xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_c \\ v_c \\ u_p \\ v_p \\ w \end{Bmatrix}$$

or $\boldsymbol{\epsilon}_v = \mathbf{D}_v \mathbf{U}$ (6)

根据弹性理论,上下板的面内应力应变关系为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^i \\ \sigma_y^i \\ \tau_{xy}^i \end{Bmatrix} = \frac{E_i}{1-\nu_i^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_i & 0 \\ \nu_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu_i)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^i \\ \epsilon_y^i \\ \gamma_{xy}^i \end{Bmatrix}$$
 (7)

也可表示为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_h^i &= \mathbf{E}_h^i \boldsymbol{\epsilon}_i = \mathbf{E}_h^i \mathbf{D}_i \mathbf{U}_i \\ \boldsymbol{\sigma}_h^v &= \mathbf{E}_h^v \boldsymbol{\epsilon}_v = \mathbf{E}_h^v \mathbf{D}_v \mathbf{U} \end{aligned}$$
 (8)

式中 \mathbf{E}_h^i 为第 i 层面内弹性常数矩阵, $\boldsymbol{\sigma}_h^i$ 为第 i 层面内应力向量, ν_i 为第 i 层的泊松常数 ($i = c, p$)。

同理,根据基尔霍夫薄板理论,板内的弯曲应变位移关系可表示为

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x^i \\ \epsilon_y^i \\ \gamma_{xy}^i \end{Bmatrix} = Z^i \text{diag} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, 2 \frac{\partial^2}{\partial xy} \right] \{w\} \text{ or } \boldsymbol{\epsilon}_b^i = \mathbf{D}_b^i \{w\}$$
 (9)

式中 Z^i 为第 i 层的厚度 ($i = c, v, p$)。diag[] 表示对角矩阵。

由此得到弯曲应力应变关系为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^i \\ \sigma_y^i \\ \tau_{xy}^i \end{Bmatrix} = \frac{E_i}{12(1-\nu_i^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_i & 0 \\ \nu_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu_i)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^i \\ \epsilon_y^i \\ \gamma_{xy}^i \end{Bmatrix}$$
 (10)

也可以表示为

$$\boldsymbol{\sigma}_b^i = \mathbf{E}_b^i \boldsymbol{\epsilon}_b^i = \mathbf{E}_b^i \mathbf{D}_b^i \{w\}$$
 (11)

式中 E_i 为第 i 层的杨氏模量, \mathbf{E}_b^i 为第 i 层弯曲弹性常数矩阵, $\boldsymbol{\sigma}_b^i$ 为第 i 层弯曲应力向量 ($i = c, v, p$)。

另外,根据 2.1 节可知,黏弹性层的剪切变形与上下板的位移函数直接相关,则其应力应变关系为

$$\begin{Bmatrix} \tau_{vx} \\ \tau_{vy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_x & \\ & G_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{vx} \\ \gamma_{vy} \end{Bmatrix}$$
 (12)

将式(4)代入式(12)得

$$\boldsymbol{\sigma}_T = \mathbf{G}_T \boldsymbol{\epsilon}_T = \mathbf{G}_T \mathbf{D}_T \mathbf{U}$$
 (13)

式中 G_x 和 G_y 分别为黏弹性层沿 x 轴和 y 轴方向的剪切模量,当材料属性为各向同性时,则 $G_x = G_y = G_v$ 。 G_v 为黏弹性层的剪切模量。

2.3 能量分析

2.3.1 单元势能

如图 2 所示,将夹层板划分为若干个单元,取出其中一个单元,在其边界处添加人工弹簧单元,然后对其变形后的应变能以及动能进行分析。根据 2.2 节可知,板内的应变能主要包括面内拉伸变形、面外弯曲以及黏弹性层弯曲储备的能量。因此,根据弹性理论,单元板内总应变能为

$$U_j^i = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\boldsymbol{\sigma}_h^{i1}]^T \boldsymbol{\epsilon}_{i1} + [\boldsymbol{\sigma}_h^v]^T \boldsymbol{\epsilon}_v d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\boldsymbol{\sigma}_b^{i2}]^T \boldsymbol{\epsilon}_b^{i2} + [\boldsymbol{\sigma}_T]^T \boldsymbol{\epsilon}_T d\Omega$$
 (14)

式中 U_j 表示第 j 块板的编号, Ω 为单元板的求解域,上标或下标 $i1$ 取 c 和 p ;上标 $i2$ 取 c, v 和 p 。

为了模拟任意边界条件,将所有单元边界处均设置虚拟的人工弹簧装置,由于黏弹性核心层的位移完全由上下板的位移以及整体的竖向位移控制。因此,边界弹簧储存的弹性势能为

$$U_j^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \int_{\Gamma} \left(\bar{k}_{hx} [\bar{u}_c]^2 + \bar{k}_{hy} [\bar{v}_c]^2 + \bar{k}_{hx} [\bar{u}_p]^2 + \bar{k}_{hy} [\bar{v}_p]^2 + \bar{k}_v [\bar{w}]^2 + \bar{K}_T \left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} \right]^2 \right) d\Gamma$$
 (15)

式中 Γ 为板的边界,分别为边界 1 ($y=b$)、边界 2 ($x=a$)、边界 3 ($y=0$) 和边界 4 ($x=0$);位移函数的上标一表示相应边界下的函数取值, ξ 为偏微分变量。如当边界为 $x=0$ 时, $\bar{u}_c = u_c(x, y)|_{x=0}$, $\bar{v}_c = v_c(x, y)|_{x=0}$, $\bar{u}_p = u_p(x, y)|_{x=0}$, $\bar{v}_p = v_p(x, y)|_{x=0}$, $\bar{w} = w(x, y)|_{x=0}$, $\partial \bar{w} / \partial \xi = \partial w / \partial x|_{x=0}$, 积分区间取为 $y = [0, b]$, 并将边界条件中的 \bar{k}_{**} 或 \bar{K}_* 设置为相应的刚度值即可,如当边界为固支边界时,将

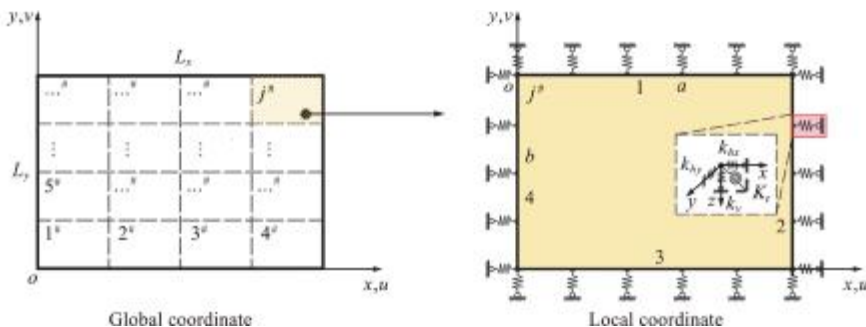


图 2 夹层板单元
Fig. 2 Sandwich plate element

弹簧刚度值设置为无穷大;当边界为自由边界时,则弹簧刚度设置为零;当边界为其他边界时同理。若板位于中间位置,则不需要计算边界弹簧的弹性势能。

板内总势能则可以写为

$$U_j = U_j^1 + U_j^2 \quad (16)$$

2.3.2 单元动能

根据 2.2 节,本文不考虑任何截面转动引起的转动惯量,则板内的动能主要包括各板的面内位移动能以及面外位移动能。首先计算上板和下板的面内动能,即

$$T_j^1 = \frac{1}{2} \sum_i \rho_i h_i \iint_A \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^2 \right] dA \quad (17)$$

式中 ρ_i 为板的体积密度, i 为板的编号 ($i = c, p$)。

结合式(3),黏弹性核心层面内动能表示为

$$T_j^2 = \frac{1}{2} \rho_v h_v \iint_A \frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial t} [\mathbf{D}_0]^T \mathbf{D}_0 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dA \quad (18)$$

由于三层板的面外位移均采用一个挠度函数,则其动能为

$$T_j^3 = \frac{1}{2} \sum_i \rho_i h_i \iint_A \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dA \quad (19)$$

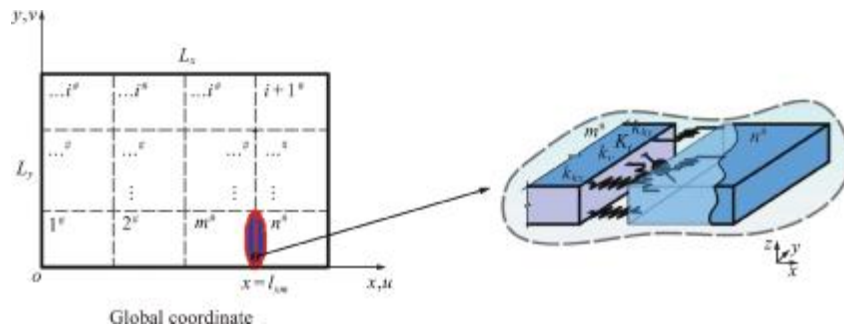


图3 板单元之间的组装方式
Fig. 3 Assembly mode between plate units

2.4 位移容许函数

一般来讲,在利用能量原理进行数值计算时,选用的位移容许函数将直接影响到计算精度与收敛速度。经过引言中的文献梳理可知,板的位移函数可以用传统二维傅里叶级数进行拟合,但是根据基尔霍夫薄板的面外振动控制微分方程可得板的最高阶偏导数为 4 阶偏导,则位移函数至少需要 4 阶导数;面内振动微分方程最高阶导数为 2 阶偏导,则位移函数至少需要 2 阶导数;而传统的傅里叶级数虽然在求解域内能满足该项要求,但在求解任意边界条件时,存在位移不能收敛到真实位移的情况^[11]。由于本文结构的边界条件以及单元节点之间均使用人工弹簧进行模拟,因此传统傅里叶级数不能满足位移函数的连续性要求。而改进的傅里叶级数很好地解决了此类问题,其可以满足任意

取 $i = c, v, p$ 。

则总动能为

$$T_j = T_j^1 + T_j^2 + T_j^3 \quad (20)$$

2.3.3 单元组装

与有限元法相同,需要将划分后的单元进行组装,以此得到整体板的质量矩阵以及刚度矩阵。本文组装方式如图 3 所示,板单元之间采用人工弹簧进行连接,通过边界位移一致性控制位移的连续性,中部黏弹性层的位移控制原理同边界位移控制。因此,不考虑连接弹簧的质量,以图 3 第 m 块和第 n 块板的连接方式为例(其他连接位置的势能可参照计算),得到连接弹簧的势能为

$$V_l^{m,n} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left\{ \bar{k}_{hx} [\bar{u}_c^m - \bar{u}_c^n]^2 + \bar{k}_{hy} [\bar{v}_c^m - \bar{v}_c^n]^2 + \bar{k}_{hx} [\bar{u}_p^m - \bar{u}_p^n]^2 + \bar{k}_{hy} [\bar{v}_p^m - \bar{v}_p^n]^2 + \bar{k}_v [\bar{w}^m - \bar{w}^n]^2 + \bar{K}_T \left[\frac{\partial \bar{w}^m}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{w}^n}{\partial \xi} \right]^2 \right\} d\Gamma \quad (21)$$

式中 $V_l^{m,n}$ 的 l 表示连接边界的编号,上标 m 和 n 分别表示连接板单元的编号,其他符号意义同边界处的符号解释。

边界条件下板的位移容许函数,并且在计算薄板结构的振动特性中取得了较好的效果。

陈林等^[12]发现利用改进的傅里叶级数代替板的位移容许函数时,需在传统傅里叶级数后面添加辅助函数,而辅助函数具有多样性,为了编程的便捷性,本文选用全傅里叶级数形式的位移容许函数^[16],具体形式为

$$\chi(x, y, t) = \left(\sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{\infty} A_{\alpha\beta}^x \cos(\lambda_{\alpha}^x x) \cos(\lambda_{\beta}^y y) + \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=1}^2 B_{\alpha\beta}^x \cos(\lambda_{\alpha}^x x) \sin(\lambda_{\beta}^y y) + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=0}^{\infty} H_{\alpha\beta}^x \sin(\lambda_{\alpha}^x x) \cos(\lambda_{\beta}^y y) + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 Q_{\alpha\beta}^x \sin(\lambda_{\alpha}^x x) \sin(\lambda_{\beta}^y y) \right) e^{i\omega t} \quad (22)$$

式中 χ 分别取 u_c, v_c, u_p 和 v_p ; $A_{\alpha\beta}^x, B_{\alpha\beta}^x, H_{\alpha\beta}^x$ 和 $Q_{\alpha\beta}^x$ 分别为各个位移函数的未知傅里叶系数, $\lambda_c^x = \alpha^x \pi / a, \lambda_p^x = \beta^x \pi / b, e^{i\omega t}$ 为简谐振动的时间因子, 挠度函数 $w(x, y, t)$ 只需要将式(22)中辅助项的 2 改为 4 即可满足 4 阶可偏导。位移容许函数中第一项为主函数项, 后三项是消除边界不连续的辅助项。 α 和 β 的取值决定了求解精度和计算效率, 在实际计算中, 取 $\alpha = M, \beta = N$ 作为傅里叶级数项数的截断数, 取的项数越多, 则越接近精确解。为了加快计算效率和编程统一性, 根据克罗内克积的性质, 将式(22)化为向量形式, 然后将式(22)代入式(2), 并将其化为矩阵形式, 即

$$\mathbf{U} = \mathbf{N}\mathbf{A} \quad (23)$$

式中 $\mathbf{N} = \text{diag}[\mathbf{N}_{u_c}(x, y), \mathbf{N}_{v_c}(x, y), \mathbf{N}_{u_p}(x, y), \mathbf{N}_{v_p}(x, y), \mathbf{N}_w(x, y)]$ 为位移容许函数的形函数矩阵, $\mathbf{A} = \text{Vec}\{\mathbf{A}_{u_c}, \mathbf{A}_{v_c}, \mathbf{A}_{u_p}, \mathbf{A}_{v_p}, \mathbf{A}_w\}$ 为所有系数向量化后的傅里叶级数系数。

2.5 求解过程

将式(23)分别代入式(14, 15, 17~19, 21)可得到板的动能及势能的矩阵表达形式。需要说明的是, 在以下计算过程中, 当不满足矩阵可加性时, 均按照位移函数在向量 \mathbf{A} 中对应的位置, 将该矩阵中的其他元素以零扩充。

将式(23)代入式(14)得

$$U_j^1 = \frac{1}{2} \mathbf{A}_j^T \{ \mathbf{K}_{cp}^j + \mathbf{K}_v^j + \mathbf{K}_w^j + \mathbf{K}_i^j \} \mathbf{A}_j \quad (24)$$

式中 $\mathbf{K}_{cp}^j, \mathbf{K}_v^j, \mathbf{K}_w^j$ 和 \mathbf{K}_i^j 分别为夹层板上下板面内拉伸应变矩阵、黏弹性核心层拉伸矩阵、整体弯曲刚度矩阵以及黏弹性核心层的剪切应变矩阵。

将式(23)代入式(15)得

$$U_j^2 = \frac{1}{2} \mathbf{A}_j^T \mathbf{K}_s^j \mathbf{A}_j \quad (25)$$

式中 \mathbf{K}_s^j 为边界弹簧的应变矩阵。

其中, 式(23)代入式(17~19)得

$$T_j^1 = \frac{1}{2} \omega^2 \mathbf{A}_j^T \sum_i \rho_i h_i \iint_{\Lambda} [\mathbf{N}_i]^T [\mathbf{N}_i] d\mathbf{A} \mathbf{A}_j \quad (26)$$

$$T_j^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \rho_v h_v \mathbf{A}_j^T \iint_{\Lambda} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{D}_0]^T \mathbf{D}_0 [\mathbf{N}] d\mathbf{A} \mathbf{A}_j \quad (27)$$

$$T_j^3 = \frac{1}{2} \omega^2 \mathbf{A}_j^T \sum_i \rho_i h_i \iint_{\Lambda} [\mathbf{N}_w]^T [\mathbf{N}_w] d\mathbf{A} \mathbf{A}_j \quad (28)$$

式(26~28)中 i 取值不变。

则第 j 块板单元的总动能为

$$T_j = \frac{1}{2} \omega^2 \mathbf{A}_j^T \{ \mathbf{M}_{cp}^j + \mathbf{M}_v^j + \mathbf{M}_w^j \} \mathbf{A}_j \quad (29)$$

其中式(23)代入式(21)得

$$V_l^{m,n} = \frac{1}{2} \mathbf{A}_l^T \mathbf{K}_l \mathbf{A}_l \quad (30)$$

式中 \mathbf{K}_l 为连接弹簧的应变矩阵。

至此, 板单元内所有动能以及势能已经全部计算, 综合式(24, 25, 29, 30), 再按照 2.3.3 节组装方式将所有单元组合完成, 然后对整个板的求解域内进行动能及势能计算, 由此建立夹层板的拉格朗日方程, 即

$$Lg = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_j^T \mathbf{M}_j \mathbf{A}_j - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_j^T \mathbf{K}_j \mathbf{A}_j + \sum_{l=1}^n \mathbf{A}_l^T \mathbf{K}_l \mathbf{A}_l \right\} \quad (31)$$

式中 $\mathbf{K}_j = \{ \mathbf{K}_{cp}^j + \mathbf{K}_v^j + \mathbf{K}_w^j + \mathbf{K}_i^j + \mathbf{K}_s^j \}$ 。根据 Hamilton 原理,

$$(\partial Lg) / (\partial \mathbf{A}(t)) = 0 \quad (32)$$

最后, 得到系统的自由振动控制方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{A}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{A}(t) = 0 \quad (33)$$

式中 $\mathbf{A}(t) = \text{vec}\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_j, \dots, \mathbf{A}_n\}$ 为系统广义位移控制向量, \mathbf{M} 和 \mathbf{K} 分别为夹层板的广义质量矩阵和刚度矩阵。

进一步可得该系统的广义频率特征方程

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}]\mathbf{A} = 0 \quad (34)$$

以上过程即为通过改进的傅里叶级数结合 Rayleigh-Ritz 方法求解夹层板自由振动特性的基本流程。计算时, 只需要根据实际案例划定单元编号和连接边界编号并计算系统的势能以及动能, 代入式(31~34)即可得出结构的动力特性。由于该方法与有限元方法计算流程大致相同, 因此具有很好的可编程性和适应性。

2.6 复特征值问题求解

黏弹性材料通常具有黏性阻尼特性, 其具体表现为剪切模量为复模量的形式, 通常表示为 $G_v = 1 + i\eta_v$, 其中 η_v 为剪切模量损耗因子。将其代入式(12), 则式(35)给的特征值问题变为复特征值问题, 将其写为

$$[(\mathbf{K} + i\mathbf{K}^*) - \tilde{\omega}^2 \mathbf{M}]\mathbf{A} = 0 \quad (35)$$

式中 \mathbf{K}^* 为由材料复模量确定的刚度矩阵, $\tilde{\omega}$ 为复特征值, 由此计算得到的结构自振频率和模态损耗因子表示为

$$\omega = \sqrt{\text{Re}(\tilde{\omega}^2)}, \eta = \frac{\text{Im}(\tilde{\omega}^2)}{\text{Re}(\tilde{\omega}^2)} \quad (36)$$

3 模型验证及数值算例

第 2 节叙述了采用改进的傅里叶级数求解夹层板振动特性的基本过程, 接下来将通过具体的数值算例对上述理论进行验证。其中算例 1 为两端

简支的梁式板模型,算例2为各种边界条件下的夹层板模型。本文使用 MATLAB 编程软件计算,通过数值算例说明本文方法的计算精度、收敛性以及适用性等特性。

算例 1 综上所述,改进的傅里叶级数作为位移函数时,其级数项数的多少将直接影响计算效率与精度等重要性质。首先以简支夹层梁式板模型为分析对象,对不同傅里叶级数截断数下的自振频率及模量损耗因子进行计算,此外将傅里叶级数截断数设置为 $M=N$,可提高计算效率的同时也能便

于编程。为了验证其收敛性及精度,采用 Rao^[17]给出的梁式板振动特性解析解和文献[2]给出的2维有限元计算结果以及 ABAQUS 有限元软件的计算结果作为参考对象。该梁式板的长为 177.8 mm,宽为 12.7 mm,厚度分别为 $h_c = h_p = 1.524$ mm, $h_v = 0.127$ mm; 材料参数分别为 $E_c = E_p = 69000$ MPa, $E_v = 1.794$ MPa, $\nu_c = \nu_v = \nu_p = 0.3$, $\rho_c = \rho_p = 2766$ kg/m³, $\rho_v = 968.1$ kg/m³, $\eta_v = 0.1$ 。以上各方法计算该结构得到的前3阶自振频率列入表1,其模态损耗因子 η 列入表2。

表 1 夹层梁式板前3阶自振频率对比结果(单位:Hz)

Tab. 1 Comparison results of the first three natural frequencies of sandwich beam plate (unit: Hz)

Mode	M=N=					FEM ^[2]	Analytical solution ^[17]	ABAQUS
	1	2	3	5	8			
1	148.956	148.569	148.567	148.565	148.565	148.57	148.51	148.47
2	490.984	489.007	489.001	488.997	488.997	489.40	488.47	488.60
3	1041.760	1037.19	1037.14	1037.12	1037.12	1036.93	1034.69	1035.4

表 2 夹层梁式板前3阶模态损耗因子 η 对比结果

Tab. 2 Comparison results of the first three order modal loss factors η of sandwich beam plate

Mode	M=N=					FEM ^[2]	Analytical solution ^[17]	ABAQUS
	1	2	3	5	8			
1	0.03483	0.03501	0.03501	0.03501	0.03501	0.03547	0.03502	0.03504
2	0.01946	0.01956	0.01956	0.01956	0.01956	0.02002	0.01958	0.01955
3	0.01061	0.01071	0.01069	0.01069	0.01069	0.01132	0.01071	0.01068

由表1可知,采用 IFSM 方法计算夹层梁式板自振频率的过程中,当 $M=N=1$ 时,其计算结果已经与解析解较为接近;当傅里叶级数项数超过2时,自振频率的误差仅在小数点后第三位发生变化,而损耗因子已经基本收敛,由此说明本文方法具有非常快的收敛速度。其次,从计算精度来看,当 $M=N=5$ 时,本文计算方法得到的前三阶自振频率与 Rao^[17] 解析解的计算误差分别为 0.03%, 0.1% 和 0.2%,与文献[2]的计算误差分别为 0.00%, 0.12% 和 0.002%,可以看出精度非常高;同时从损耗因子的数据来看,本文结果与解析解非常接近,仅在小数点后第5位有较小差异。因此,可以表明采用本文的计算方法不仅具有快速收敛的特点,同时还能保持较高的计算精度,误差均在1%以内。

另外,本文以人工弹簧统一替代结构的所有边界条件,因此,边界弹簧刚度对计算结果具有至关重要的影响。下面将分别分析线性弹簧单元刚度 (Linear spring stiffness) 与旋转弹簧单元刚度

(Rotational spring stiffness) 取值对结构自振特性的影响。设置初始结构为悬臂夹层梁式板,首先改变自由端的竖向线性弹簧单元刚度值,然后添加自由端旋转弹簧单元,并改变其刚度值进行分析。边界弹簧单元刚度取值对结构自振频率的影响趋势如图4所示,对结构模态损耗因子 (Loss factor) 的影响趋势如图5所示。

从图4可以看出,(1) 线性弹簧刚度取值对结构前3阶自振频率的影响区间主要为 $10^{2.5}$ N/m ~ 10^8 N/m,当弹簧刚度取值低于 10^2 N/m 或高于 10^7 N/m 时,对自振频率的影响忽略不计;其中,第一阶频率的主要影响区间约为 10^2 N/m ~ 10^6 N/m,随着频率阶数的增加,影响区间出现向后偏移现象,同时对频率值的影响也越大。(2) 旋转弹簧单元刚度取值对结构前3阶自振频率的影响区间主要为 $10^{1.5}$ N/m ~ 10^6 N/m,说明旋转弹簧的刚度取值相比线性弹簧单元对结构自振频率的影响区间向小刚度值偏移,同样随着频率阶数的增加,主要影响区间逐渐向后偏移。从图5可以看出,边界

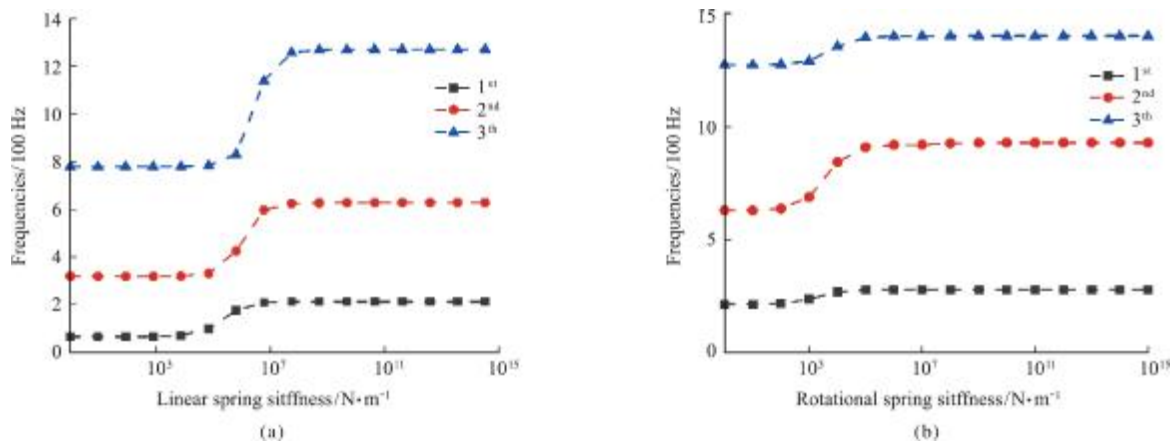


图4 边界弹簧刚度对自振频率的影响

Fig. 4 Effect of boundary spring stiffness on natural frequency

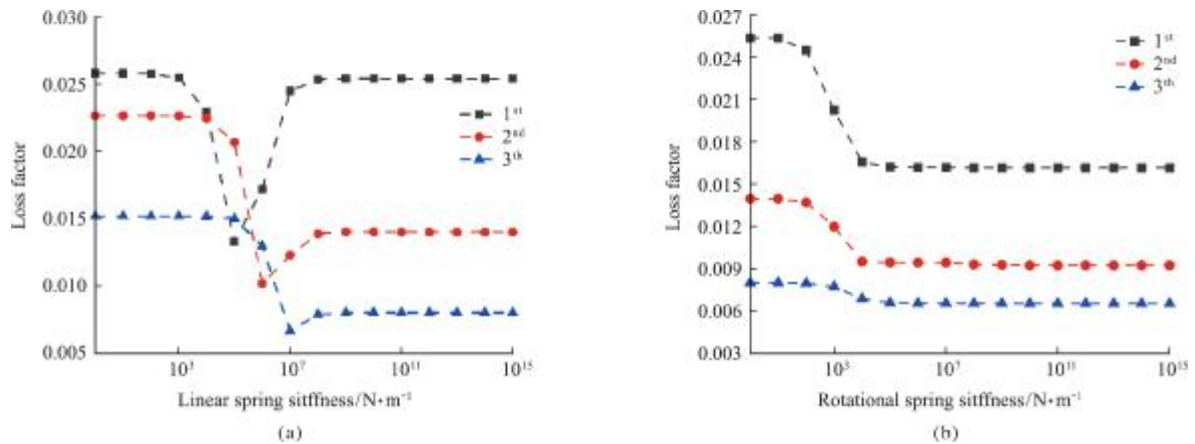


图5 边界弹簧刚度对损耗因子的影响

Fig. 5 Effect of boundary spring stiffness on loss factor

弹簧单元的刚度变化对结构模态损耗因子的影响与对结构自振频率的影响趋势一致。



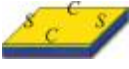


因此,综合图4和图5可以说明,当线性弹簧的刚度变化区间为 $10^{2.5}$ N/m \sim 10^8 N/m,且旋转弹簧的刚度变化区间为 $10^{1.5}$ N/m \sim 10^6 N/m时,可以将边界视为某种弹性边界;当两种弹簧的刚度取值均处于最小刚度或以下时,可视为自由边界;当刚度取值处于最大刚度或以上时,可以视为某种刚性连接。

算例2 以上简支梁式板模型对本文方法的计算精度和收敛性进行了验证,为了说明本文方法对任意边界条件的适用性,算例2为不同边界条件下夹层板的自振特性分析。设置边界条件为SSSS,CCCC,CFCF,CSCS和CFFF共5种边界条件(S表示简支,C表示固支,F表示自由)。文献[7,9,17,18]均采用不同的计算方法对一夹层板结构的自振特性进行了分析,该模型长为348 mm,宽为304.8 mm,厚度分别为 $h_c = h_p = 0.762$ mm, $h_v = 0.254$ mm;材料参数分别为 $E_c = E_p = 68900$ MPa,

$G_v = 0.896$ MPa, $\nu_c = \nu_p = 0.3$, $\nu_v = 0.49$, $\rho_c = \rho_p = 2740$ kg/m³, $\rho_v = 999$ kg/m³, $\eta_v = 0.5$ 。

本文计算结果与现有文献的解析解、数值解以及有限元等不同计算方法的对比(截断数 $M = N = 4$)列入表3。其中解析解来自文献[17],数值解为文献[9]采用减缩模型的计算结果,文献[18]为采用有限单元法建立的任意四边形4节点28自由度模型,另外考虑ABAQUS有限元软件的计算结果,其单元尺寸为0.005 m,单元类型为C3D20R。由表3可知,在不同的边界条件下,采用改进的傅里叶级数计算得到的结构自振频率和模态损耗因子与其余四种计算方法的结果均保持较高的吻合度,误差均未超过1%,表明本文给出的方法不仅具有较高的计算精度,同时也有较强的适用性。此外,在相同的计算条件下(Intel i7@6700H),本文方法计算用时均未超过10 s,而上述文献的方法基本接近100 s,ABAQUS软件计时也超过了100 s。由此可见,相比传统方法,本文计算效率提高了10倍。

表3 不同边界条件下夹层矩形板前5阶自振频率 f 和损耗因子 η 的对比结果
 Tab.3 Comparison of the first five natural frequencies f and loss factor η of sandwich rectangular plates under different boundary conditions

BC	Mode	f/Hz	η	f/Hz	η	f/Hz	η	f/Hz	η
		Present		Analytical ^[17]		Numerical solution ^[9]		ABAQUS	
	1	60.2	0.20	60.3	0.19	58.0	0.170	60.0	0.155
	2	115.5	0.204	115.4	0.203	113.8	0.193	115.8	0.189
	3	130.5	0.193	130.6	0.199	129.4	0.192	137.3	0.169
	4	178.5	0.174	178.7	0.181	177.1	0.172	185.3	0.159
5	195.9	0.171	195.7	0.174	194.9	0.169	196.7	0.168	
		Present		FEM ^[18]		Numerical solution ^[9]		ABAQUS	
	1	88.0	0.187	87.0	0.190	87.4	0.189	87.2	0.193
	2	151.1	0.168	147.3	0.166	149.1	0.164	148.9	0.166
	3	171.0	0.152	168.5	0.155	170.2	0.153	170.0	0.155
	4	224.1	0.140	216.8	0.141	223.8	0.139	224.1	0.140
5	243.4	0.132	238.4	0.136	241.6	0.134	241.3	0.135	
		Present		FEM ^[18]		Numerical solution ^[9]		ABAQUS	
	1	77.5	0.182	77.2	0.188	77.1	0.184	76.7	0.190
	2	125.6	0.183	124.0	0.189	124.9	0.186	124.5	0.190
	3	165.6	0.154	164.1	0.158	164.9	0.155	164.7	0.157
	4	203.0	0.162	200.2	0.168	202.2	0.164	201.9	0.166
5	207.8	0.146	201.4	0.151	206.4	0.148	206.5	0.149	
		Present		FEM ^[18]		Numerical solution ^[9]		ABAQUS	
	1	63.7	0.183	63.8	0.197	63.4	0.196	63.0	0.201
	2	72.9	0.181	72.5	0.181	72.3	0.18	71.9	0.186
	3	111.0	0.166	109.5	0.169	110.3	0.168	109.5	0.175
	4	151.5	0.156	151.9	0.159	150.9	0.157	150.5	0.160
5	163.2	0.154	162.4	0.157	162.5	0.155	162.0	0.158	
		Present		FEM ^[18]		Numerical solution ^[9]		ABAQUS	
	1	15.2	0.079	15.1	0.080	15.1	0.079	14.9	0.091
	2	28.3	0.131	28.3	0.134	28.2	0.133	27.8	0.145
	3	69.0	0.163	69.2	0.166	68.7	0.165	68.0	0.174
	4	78.0	0.158	78.0	0.161	77.7	0.16	76.7	0.173
5	89.1	0.170	89.0	0.173	88.8	0.172	88.0	0.181	

4 结 论

本文将改进的傅里叶级数引入 Rayleigh-Ritz 法,联立 Hamilton 原理,建立了一套求解任意边界条件下夹层板结构自振频率和损耗因子的新型数值算法,得出以下结论。

(1) 本文提出的计算方法收敛性好,计算精度高。算例 1 中,当傅里叶级数项取 $M = N = 2$ 时,结构自振频率和模态损耗因子已趋于收敛。与各类经典算例的解析解、有限元解或数值解相比,误差均不超过 1%,部分结构完全一致。此外本文方法兼具了较高的计算效率,当 $M = N = 4$ 时,计算时间不超过 10 s,远快于传统的有限元计算方法。

(2) 从本文算例来看,各种经典边界条件下的不同组合形式,建立的方法均能取得较好的分析效果,与文献结果高度吻合。在保证精度和效率的同时,本文方法具有较强的适用性。

(3) 本文方法对于任意边界条件下的夹层板,只需要改变位移约束弹簧以及转角约束弹簧的刚度值,不需要重新推导公式,提高了计算效率。

参考文献(References):

[1] Osa-Uwagboe N, Silberschmidt V V, Aremi A, et al. Mechanical behaviour of fabric-reinforced plastic sandwich structures; A state-of-the-art review [J]. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 2023, **25**(5):591-622.

[2] Huang Z C, Qin Z Y, Chu F L, et al. Vibration and damping characteristics of sandwich plates with viscoelastic core[J]. *Journal of Vibration and Control*, 2016, **22**(7):1876-1888.

[3] 黄志诚,王兴国,吴南星,等.黏弹夹芯板的有限元建模及实验研究[J]. *计算力学学报*, 2020, **37**(6):715-721. (HUANG Zhi-cheng, WANG Xing-guo, WU Nan-xing, et al. Finite element modeling and experimental study of viscoelastic sandwich plate[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2020, **37**(6):715-721. (in Chinese)).

[4] Ojha R K, Dwivedy S K. Dynamic analysis of sandwich plates with isotropic skins and viscoelastic core [J]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2019, **19**(3):1950033.

[5] 黄志诚,王兴国,吴南星,等.基于层合理论的被动约

- 束层阻尼板有限元建模及动力学分析[J]. 振动与冲击, 2020, **39**(23):148-153, 201. (HUANG Zhi-cheng, WANG Xing-guo, WU Nan-xing, et al. Finite element modeling and dynamic analysis of passive constrained layer damping plate based on laminated theory [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2020, **39**(23):148-153, 201. (in Chinese))
- [6] Johnson C D, Kienholz D A. Finite element prediction of damping in structures with constrained viscoelastic layers[J]. *AIAA Journal*, 1982, **20**(9):1284-1290.
- [7] Kanematsu H H, Hirano Y, Iyama H. Bending and vibration of CFRP-faced rectangular sandwich plates [J]. *Composite Structures*, 1988, **10**(2):145-163.
- [8] Arikoglu A, Ozkol I. Vibration analysis of composite sandwich plates by the generalized differential quadrature method [J]. *AIAA Journal*, 2012, **50**(3):620-630.
- [9] Bilasse M, Oguamanam D C D. Forced harmonic response of sandwich plates with viscoelastic core using reduced-order model [J]. *Composite Structures*, 2013, **105**:311-318.
- [10] Demir O. Differential transform method for axisymmetric vibration analysis of circular sandwich plates with viscoelastic core [J]. *Symmetry*, 2022, **14**(5):852.
- [11] Li W L. Free vibrations of beams with general boundary conditions [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, **237**(4):709-725.
- [12] 陈 林, 肖 伟, 刘见华, 等. 基于改进傅里叶级数的矩形板薄板振动特性分析 [J]. 噪声与振动控制, 2018, **38**(5):21-26. (CHEN Lin, XIAO Wei, LIU Jian-hua, et al. Vibration characteristics analysis of rectangular plate and thin plate based on improved Fourier series [J]. *Noise and Vibration Control*, 2018, **38**(5):21-26. (in Chinese))
- [13] Nie G J, Hu H, Chen X D. A complex Fourier series solution for buckling of VAT composite laminates with elastically restrained edges [J]. *Composite Structures*, 2022, **279**:114847.
- [14] 王 吉, 高芳清. 基于双参数地基系统的改进傅里叶级数振动方法研究 [J]. 振动与冲击, 2021, **40**(14):85-91. (WANG Ji, GAO Fang-qing. Research on improved Fourier series vibration method based on two-parameter foundation system [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2021, **40**(14):85-91. (in Chinese))
- [15] Wang G, Li W L, Feng Z H, et al. A unified approach for predicting the free vibration of an elastically restrained plate with arbitrary holes [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2019, **159**:267-277.
- [16] 杜 圆, 李海超, 庞福振, 等. 任意边界条件下矩形板薄板自由振动特性分析 [J]. 振动与冲击, 2019, **38**(19):70-76. (DU Yuan, LI Hai-chao, PANG Fu-zhen, et al. Analysis of free vibration characteristics of rectangular thin plates under arbitrary boundary conditions [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2019, **38**(19):70-76. (in Chinese))
- [17] Rao D K. Frequency and loss factors of sandwich beams under various boundary conditions [J]. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 1978, **20**(5):271-282.
- [18] Ren S H, Zhao G Z. A four-node quadrilateral element for vibration and damping analysis of sandwich plates with viscoelastic core [J]. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 2019, **21**(3):1072-1118.

Numerical algorithm for dynamic problems of viscoelastic sandwich plates based on improved Fourier series

MA Qian-ying*, MEI Yang, SUN Zheng

(Department of Architecture and Civil Engineering, Chang'an University, Xi'an 710061, China)

Abstract: In this paper, a new numerical algorithm based on improved Fourier series is proposed to determine the free vibration characteristics of viscoelastic sandwich plates under arbitrary boundary conditions. The algorithm uses the first-order shear theory to establish the out-of-plane displacement field and the improved Fourier series to fit the displacement tolerance function, combines the Rayleigh-Ritz method to calculate the kinetic energy and potential energy, and uses the Hamilton variational principle to obtain the characteristic matrix equation. The results show that the errors of the natural frequencies and loss factors obtained by the algorithm are not more than 1% compared with the analytical solution, 2D finite element solution, numerical calculation method and ABAQUS finite element software, whether it is a beam-plate structure or a sandwich plate structure under various boundary conditions. The calculation efficiency is increased by 10 times, and the limitation that the traditional method can only solve the vibration problem under specific boundary conditions is overcome. The method established in this paper has the characteristics of fast convergence, high calculation efficiency and strong adaptability.

Key words: viscoelastic sandwich plate; arbitrary boundary conditions; improved Fourier series; free vibration