

DOI: 10.7511/jslx20230427001

# 基于等几何分析和材料场级数展开模型的 简谐激励结构拓扑优化

王培金<sup>1</sup>, 刘宏亮<sup>\*1,2</sup>, 张业伟<sup>1</sup>, 雷振增<sup>2</sup>, 杨迪雄<sup>2</sup>

(1. 沈阳航空航天大学 辽宁省飞行器复合材料结构分析与仿真重点实验室, 沈阳 110136;

2. 大连理工大学 工业装备结构分析优化与 CAE 软件全国重点实验室, 大连 116024)

**摘要:** 考虑简谐激励的结构拓扑优化具有重要的研究意义和工程应用价值, 尤其对于飞速发展的航空航天领域。为了方便优化设计结果的几何特征提取和控制, 同时兼顾计算精度、效率和设计迭代稳定性, 本文基于等几何分析和材料场级数展开模型发展一套等几何优化方法用于简谐激励结构拓扑优化。由于等几何分析具有几何建模精确和跨单元高阶连续的特点, 在不需要极其细密网格的情况下就可以保证响应分析和灵敏度计算的精度。通过结合材料场级数展开模型, 采用降维技术大幅减少了设计参数的数量, 提高了设计优化的求解效率, 同时能够获得不依赖单元细分且具有清晰几何边界的优化构型。针对动力学拓扑优化可能出现的迭代振荡和不收敛问题, 通过采用稳定化方案获得了稳定迭代的收敛设计解。数值算例表明, 本文方法能够有效避免灰度模糊区域、锯齿形边界、单元细分依赖性和棋盘格现象等, 可以高精度高效率地求解简谐激励结构拓扑优化问题。

**关键词:** 等几何分析; 拓扑优化; 简谐激励; 稳定化方案; 材料场级数展开模型

**中图分类号:** O224

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1007-4708(2024)05-0864-09

## 1 引言

结构拓扑优化可以在给定的设计区域内寻求最佳材料分布, 从而实现创新结构设计。近年来, 连续体结构拓扑优化得到了快速发展和广泛应用。目前, 各种拓扑设计方法不断发展, 并已成为工程结构轻量化设计的有力工具。如均匀化方法<sup>[1]</sup>、变密度方法<sup>[2]</sup>、渐进结构优化方法<sup>[3]</sup>、水平集方法<sup>[4,5]</sup>、独立连续映射方法<sup>[6]</sup>、移动变形组件/孔洞方法<sup>[7]</sup>和特征驱动拓扑优化方法<sup>[8]</sup>等。

随着航空航天科技的迅猛发展, 工程结构设计对动态性能的要求越来越高, 所以与结构振动特性相关的拓扑优化研究具有重要意义<sup>[9-11]</sup>。目前, 考虑结构动力性能的拓扑优化问题已成为拓扑优化领域研究的热点之一。其中, 简谐激励下的结构拓扑优化研究受到了较多关注<sup>[12-15]</sup>。如新能源电动

飞机的螺旋桨在高速旋转时, 由于结构偏心, 会产生类似简谐激励的载荷。如果结构的固有频率和激励频率接近会发生共振, 从而影响结构的使用, 甚至会导致结构异常。为了提高电动飞机的航时, 并保证飞行乘坐的安全性和舒适性, 必须研制轻质低振动结构。因此, 简谐激励结构的拓扑优化在降低结构振动响应的同时可以实现轻量化设计, 也具有重要的工程应用价值。

简谐激励结构拓扑优化常用的目标函数是结构的动柔顺度, 考虑结构动柔顺度目标优化的拓扑设计问题首先得到关注和研究<sup>[16,17]</sup>。随后, 不同的优化方法, 如变密度 SIMP 方法<sup>[13,18,19]</sup>、水平集方法<sup>[20]</sup>和渐进结构优化方法<sup>[12,14]</sup>等用于求解动柔顺度最小化设计问题。然而, 这些方法大多以显式或隐式的方式直接描述材料的空间分布, 通常需要大量的设计变量, 计算效率难以保证。值得指出,

收稿日期: 2023-04-27; 修改稿收到日期: 2023-06-25.

基金项目: 国家自然科学基金(12002218); 工业装备结构分析国家重点实验室开放基金(GZ22108)资助项目.

作者简介: 刘宏亮\* (1987-), 男, 博士, 副教授(E-mail: lhlsau@yeah.net).

引用本文: 王培金, 刘宏亮, 张业伟, 等. 基于等几何分析和材料场级数展开模型的简谐激励结构拓扑优化[J]. 计算力学学报, 2024, 41(5): 864-872.

WANG Pei-jin, LIU Hong-liang, ZHANG Ye-wei, et al. Topology optimization of harmonic excitation structures based on isogeometric analysis and material field series expansion model[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2024, 41(5): 864-872.

广泛采用的 SIMP 方法的优化结果中不可避免地存在一些模糊的灰度区域,灰度区域不利于从优化结果中提取和控制几何信息,影响结构的制造。因此,通常需要采用一些额外的后处理技术专门解决这个问题<sup>[15,21]</sup>。另一方面,简谐激励结构拓扑优化可能存在迭代振荡和不收敛等数值问题,这也是拓扑优化迭代计算过程中的困难和挑战。

简谐激励结构拓扑优化通常采用基于传统有限元分析的设计优化方法。然而,有限元网格的离散误差和单元之间仅有的  $C^0$  连续性无法保证仿真计算的精度<sup>[22]</sup>。通过不断细分网格或者采用高阶单元来提高精度的策略会显著降低计算效率,尤其对于需要多次迭代计算的简谐激励结构拓扑优化。为此,本文发展一套等几何优化方法用于简谐激励结构拓扑设计优化,通过将基于非均匀有理 B 样条(NURBS)参数化的等几何分析 IGA (Isogeometric analysis)<sup>[23,24]</sup> 与材料场级数展开模型 MFSE(Material field series expansion)<sup>[25,26]</sup> 结合,实现简谐激励结构建模和分析的高度集成以及设计参数的大幅减少,并且将稳定化方案用于迭代的收敛控制。本文方法在保证计算精度的同时兼顾效率和稳定性,获得边界清晰光滑的结构拓扑设计构型。数值算例展示了方法的有效性。

## 2 IGA-MFSE 优化方法

### 2.1 基于 NURBS 的等几何建模和分析

NURBS 作为定义工业产品几何形状的通用数学表示,为处理解析函数和模型形状提供了极大的灵活性和精确性。基于 NURBS 的等几何分析为精确建模和结构分析的紧密结合提供了可能<sup>[23]</sup>。B 样条基函数是 NURBS 基函数的基础,其可以通过使用参数空间中的非递减序列来定义,即节点向量

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\} \quad (1)$$

式中  $n$  为 B 样条基函数的数量,  $p$  为阶数。根据 Cox-deBoor 递归公式<sup>[24]</sup>,第  $i$  个 B 样条基函数可以定义为

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & (\xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (2)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (3)$$

式中  $i=1,2,\dots,n+p+1$ 。

然后,通过采用  $n \times m$  的控制点组合和相应的基函数参数化构造 B 样条曲面,其张量积定义形式为

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,p}(\eta) P_{i,j} \quad (4)$$

式中  $P_{i,j}$  为控制点,  $N_{i,p}(\xi)$  和  $N_{j,p}(\eta)$  为单变量的 B 样条基函数。在此基础上,NURBS 曲面可以构造为

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) P_{i,j} \quad (5)$$

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) N_{j,p}(\eta) \omega_{i,j}}{\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m N_{k,p}(\xi) N_{l,p}(\eta) \omega_{k,l}} \quad (6)$$

式中  $R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta)$  为 NURBS 基函数,  $\omega_{i,j}$  为与控制点  $P_{i,j}$  相关联的权系数。NURBS 基函数具有非负性、规范性、局部支撑性和光滑性等优良特性,为结构的精确建模和高阶单元分析提供了保障。

在等几何分析过程中,将 NURBS 基函数作为单元形函数,位移函数可表示为

$$\mathbf{u}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) \mathbf{u}_{i,j} \quad (7)$$

式中  $\mathbf{u}_{i,j}$  为与控制点相关的待求解系数。

### 2.2 材料场级数展开模型

材料场级数展开模型通过有界材料场表示,即  $-1 \leq \varphi(\mathbf{x}) \leq 1$ , 将结构拓扑描述为<sup>[25]</sup>

$$\begin{cases} -1 \leq \varphi(\mathbf{x}) < 0 & (\mathbf{x} = \Omega_{\text{void}}) \\ 0 < \varphi(\mathbf{x}) \leq 1 & (\mathbf{x} = \Omega_{\text{solid}}) \end{cases} \quad (8)$$

式中  $\Omega_{\text{void}}$  和  $\Omega_{\text{solid}}$  分别代表空洞和实体材料。

材料场的空间相关性取决于点  $\mathbf{x}$  的相对位置。因此,描述具有空间相关性的有界材料场的相关函数定义为

$$c(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b) = \exp(-\|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b\|^2 / l_c^2) \quad (9)$$

式中  $\|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b\|$  表示  $\mathbf{x}_a$  与  $\mathbf{x}_b$  的欧式距离,  $l_c$  为自定义的相关长度,用于控制结构拓扑设计的细节。

在计算过程中,将设计域离散为  $N_{pt}$  个观察点,构造的相关矩阵  $\mathbf{C}$  可以表示为

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) & c(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & \cdots & c(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{N_{pt}}) \\ c(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) & c(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) & \cdots & c(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_{N_{pt}}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c(\mathbf{x}_{N_{pt}}, \mathbf{x}_1) & c(\mathbf{x}_{N_{pt}}, \mathbf{x}_2) & \cdots & c(\mathbf{x}_{N_{pt}}, \mathbf{x}_{N_{pt}}) \end{bmatrix} \quad (10)$$

基于 MFSE 模型<sup>[25]</sup>,有界材料场函数可以表示为

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N_{pt}} \left( \zeta_k \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \boldsymbol{\psi}_k^T \mathbf{C}_d(\mathbf{x}) \right) \quad (11)$$

式中  $\mathbf{C}_d(\mathbf{x})$ ,  $\lambda_k$  和  $\boldsymbol{\psi}_k$  分别为矩阵  $\mathbf{C}$  的降序特征值和对应的归一化特征向量,  $\zeta_k$  代表不相关系数。

由于具有较小特征值的特征向量对有界材料场的贡献较小,因此式(11)可以截断为前  $M$  个特征值和特征向量

$$\epsilon \geq \left( \sum_{k=1}^{N_{pt}} \lambda_k - \sum_{k=1}^M \lambda_k \right) / \sum_{k=1}^{N_{pt}} \lambda_k \quad (12)$$

截断后的有界材料场函数为

$$\varphi(\mathbf{x}) \approx \sum_{k=1}^M \left( \zeta_k \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \boldsymbol{\psi}_k^T \mathbf{C}_d(\mathbf{x}) \right) \quad (13)$$

式中  $\zeta_k$  为设计变量。与依赖有限元网格离散的传统优化方法相比,该方法大大减少了设计变量的数量,实现了设计变量与结构分析网络的解耦。

### 3 简谐激励结构等几何拓扑优化

#### 3.1 简谐激励结构响应分析

简谐激励结构的运动方程可以表示为<sup>[13]</sup>

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}e^{i\omega t} \quad (14)$$

式中  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{M}$  分别为全局刚度阵、阻尼阵和质量阵,  $\ddot{\mathbf{u}}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$  和  $\mathbf{u}$  分别为系统的加速度、速度和位移矢量,  $i$  和  $\omega$  分别为虚数单位和激励频率,  $\mathbf{F}$  为振幅。

全局刚度阵和质量阵可以分别由单元刚度阵  $\mathbf{K}_e$  和质量阵  $\mathbf{M}_e$  的组装计算得到

$$\mathbf{K}_e = \iint_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega_e \quad (15)$$

$$\mathbf{M}_e = \iint_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} d\Omega_e \quad (16)$$

式中  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{N}$  分别为应变矩阵和形函数,  $\rho$  为固体材料的密度。

本文考虑瑞利阻尼模型,阻尼阵为刚度阵和质量阵的线性组合

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (17)$$

式中  $\alpha$  和  $\beta$  为比例阻尼系数。

通过  $\mathbf{u} = \mathbf{U} e^{i\omega t}$ , 其中  $\mathbf{U}$  为位移幅值, 方程式(14)可以改写为

$$(\mathbf{K} + i\omega \mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (18)$$

则等效刚度矩阵  $\mathbf{K}_d$  可表示为

$$\mathbf{K}_d = \mathbf{K} + i\omega \mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M} \quad (19)$$

上述表达式中的矩阵运算基于 NURBS 基函数和控制点。

#### 3.2 IGA-MFSE 方法优化列式

为了获得清晰的拓扑设计,采用 Heaviside 映射,可以表示为

$$\bar{\varphi}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \varphi(\mathbf{x}) e^{-\gamma} + 1 - e^{-\gamma \varphi(\mathbf{x})} & (\varphi(\mathbf{x}) \geq 0) \\ \varphi(\mathbf{x}) e^{-\gamma} - 1 + e^{\gamma \varphi(\mathbf{x})} & (\varphi(\mathbf{x}) < 0) \end{cases} \quad (20)$$

式中  $\gamma$  为平滑参数。

将密度变量设置为  $\chi = (1 + \bar{\varphi}(\mathbf{x}))/2$ , 则刚度矩阵的计算表达式为

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^N [E_{\min} + (E_0 - E_{\min}) \chi^p \mathbf{K}_e] \quad (21)$$

式中 惩罚系数  $p=3$ ,  $E_0=1$ ,  $E_{\min}$  是非常小的值,用来避免矩阵奇异。此外,采用多项式插值来计算质量阵以避免局部模态,即

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^N [E_{\min} + (E_0 - E_{\min}) \chi^q \mathbf{M}_e] \quad (22)$$

$$\begin{cases} \text{if } \chi > 0.1 & q=1 \\ \text{if } \chi \leq 0.1 & q=3 \end{cases}$$

本文考虑体积约束下的结构动柔顺度的平方最小化设计问题。当激励频率低于初始设计的一阶共振频率时,基于 IGA-MFSE 方法的简谐激励结构拓扑优化列式可表示为

$$\begin{aligned} & \text{find } \boldsymbol{\zeta} \\ & \min J = (\mathbf{F}^T \mathbf{U}) (\overline{\mathbf{F}^T \mathbf{U}}) \\ & \text{s. t. } \begin{cases} (\mathbf{K} + i\omega \mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U} = \mathbf{F} \\ V_{\text{solid}} = \sum_{e=1}^N (\chi_e V_e) \leq \bar{V} \\ -1 \leq \varphi(\mathbf{x}_j, \eta) \leq 1 \quad (j=1, 2, \dots, N_{pt}) \end{cases} \end{aligned} \quad (23)$$

式中  $\boldsymbol{\zeta}$  为设计变量,  $\overline{\mathbf{F}^T \mathbf{U}}$  表示  $\mathbf{F}^T \mathbf{U}$  的共轭复数,  $N$  为设计变量的总数,  $V_e$  为单元体积,  $\bar{V}$  为预定义的体积限制。需要说明的是,本文方法响应分析和设计的参数化是相互独立的, NURBS 细分不会增加设计参数的数量。

当激励频率高于初始设计的一阶共振频率时,优化结果中往往存在载荷区域与主结构分离的现象,结构的一阶共振频率接近 0 Hz,相应的振动模式类似于刚体模态<sup>[19]</sup>。为了避免这一问题,在优化列式中考虑了静柔度约束,目标函数由静柔度和动柔度的权重组成,则优化列式可以表示为

$$\begin{aligned} & \text{find } \boldsymbol{\zeta} \\ & \min J = r \cdot J_d + (1 - r) \cdot J_s \\ & \text{s. t. } \begin{cases} (\mathbf{K} + i\omega \mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U} = \mathbf{F} \\ \mathbf{K} \mathbf{U}_s = \mathbf{F} \\ V_{\text{solid}} = \sum_{e=1}^N (\chi_e V_e) \leq \bar{V} \\ -1 \leq \varphi(\mathbf{x}_j, \eta) \leq 1 \quad (j=1, 2, \dots, N_{pt}) \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

式中 权重系数  $r$  的范围为  $[0, 1]$ ,  $J_d$  和  $J_s$  分别为静柔度和动柔度的平方,  $\mathbf{U}_s$  为静力学分析所求位移列阵。

### 3.3 迭代计算的稳定性

对于考虑结构动力性能的拓扑优化问题,可能会出现迭代振荡和不收敛的现象,导致设计优化出现了发散解,这将严重影响迭代计算的稳定性。通常,在优化算法中应尝试性地谨慎选择合适的参数值,以避免出现数值不稳定的问题。然而,这并不是一个有效的处理简谐激励结构拓扑优化的策略。为此,本文采用基于稳定转换法(STM)的稳定化方案用于设计迭代的收敛控制<sup>[27]</sup>。

在简谐激励结构拓扑优化过程中,第 $(n+1)$ 次迭代的设计变量可表示为

$$\zeta_{n+1} = \zeta_n + h[g(\zeta_n) - \zeta_n] \quad (25)$$

式中 $\zeta_n$ 为第 $n$ 步的设计变量, $g(\zeta_n)$ 为优化设计的迭代函数, $0 < h \leq 1$ 是控制系数。需要指出的是,如果将控制系数设为 $h=1$ ,则意味着迭代计算过程不施加收敛控制。

### 3.4 灵敏度分析

本文采用移动渐近线法(MMA)<sup>[28]</sup>更新拓扑设计变量,需要获得目标函数和约束函数的灵敏度信息。其中,目标函数的灵敏度计算式为

$$\frac{\partial J_d}{\partial \zeta_k} = -2\Re \left\{ \mathbf{F}^T \mathbf{U} \left( \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_d}{\partial \zeta_k} \mathbf{U} \right) \right\} = -2\Re \left\{ \mathbf{F}^T \mathbf{U} \times \left[ \mathbf{U}^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}_d}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial \zeta_k} \frac{\partial \tilde{\varphi}(\mathbf{x}_e)}{\partial \varphi(\mathbf{x}_e)} \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}_e)}{\partial \zeta_k} \right) \mathbf{U} \right] \right\} \quad (26)$$

式中 $\Re(\cdot)$ 表示取复数的实部。静柔度的敏度形式与式(26)类似。通过推导得

$$\frac{\partial \mathbf{K}_d}{\partial \chi} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \chi} - \omega^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \chi} + i\omega \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \chi} \quad (27)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial \zeta_k} \frac{\partial \tilde{\varphi}(\mathbf{x}_e)}{\partial \varphi(\mathbf{x}_e)} = \frac{1}{2} (e^{-\gamma} + \gamma e^{-\text{sgn}(\varphi(\mathbf{x}_e))\gamma\varphi(\mathbf{x}_e)}) \quad (28)$$

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{x}_e)}{\partial \zeta_k} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \boldsymbol{\psi}_k^T \mathbf{C}_d(\mathbf{x}) \quad (29)$$

式中 刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 相对于设计变量的导数为

$$\partial \mathbf{K} / \partial \chi = p\chi^{p-1} (E_0 - E_{\min}) \mathbf{K}_e \quad (30)$$

质量矩阵 $\mathbf{M}$ 对设计变量的导数为

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \chi} = \begin{cases} \chi(E_0 - E_{\min}) \mathbf{M}_e & (\chi > 0.1, q=1) \\ q\chi^{q-1} (E_0 - E_{\min}) \mathbf{M}_e & (\chi \leq 0.1, q=3) \end{cases} \quad (31)$$

为保证连续性,对式(31)做了处理以利于优化执行。此外,阻尼阵 $\mathbf{C}$ 相对于设计变量的导数的计算表达式为

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \chi} = \alpha \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \chi} + \beta \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \chi} \quad (32)$$

约束函数的灵敏度计算表达式为

$$\frac{\partial V_{\text{solid}}}{\partial \zeta_k} = \frac{\partial V_{\text{solid}}}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial \zeta_k} \frac{\partial \tilde{\varphi}(\mathbf{x}_e)}{\partial \varphi(\mathbf{x}_e)} \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}_e)}{\partial \zeta_k} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \boldsymbol{\psi}_k^T (e^{-\gamma} + \gamma e^{-\text{sgn}(\varphi(\mathbf{x}_e))\gamma\varphi(\mathbf{x}_e)}) \mathbf{C}_d(\mathbf{x}) \quad (33)$$

## 4 数值算例

通过数值算例展现 IGA-MFSE 优化方法在求解简谐激励结构拓扑优化问题上的有效性和稳定性。等几何分析采用双二次 NURBS 单元。实体材料的杨氏模量 $E=2.1 \times 10^5$  MPa,泊松比 $\mu=0.3$ ,质量密度为 $7800 \text{ kg/m}^3$ 。载荷为 $F=100 e^{i\omega t}$  N,比例阻尼系数 $\alpha=1 \times 10^{-3}$ , $\beta=1 \times 10^{-8}$ 。预定义的体积限制设置为 $\bar{V}=0.5$ ,截断误差 $\epsilon$ 设置为 $1 \times 10^{-4}$ 。基于 STM 的稳定化方案中的控制系数 $h$ 取为 $0.5$ 。另外, $J$ 表示目标函数值。

### 4.1 MBB 梁结构

首先,考虑经典的 MBB 梁结构,其几何设计域和边界条件如图 1 所示。设计域由 $120 \times 30$ 的 NURBS 单元离散,DV 表示设计变量的数量。该结构的一阶共振频率为 $760 \text{ Hz}$ 。

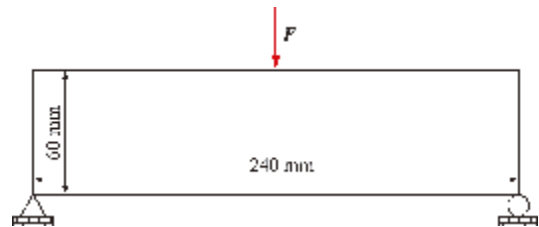


图 1 MBB 梁结构的设计域和边界条件

Fig. 1 Design domain and boundary conditions of the MBB beam structure

为了研究式(9)中相关长度对简谐激励结构拓扑优化的影响,考虑了两种不同尺寸的相关长度设置,即 $l_c=12 \text{ mm}, 24 \text{ mm}$ 。拓扑优化结果分别如图 2 和图 3 所示。可以看出,改变相关长度对结构性能和最优拓扑的最小尺寸都有较大的影响。具有不同相关长度的 MBB 梁结构拓扑优化的迭代历史如图 4 所示。可见,本文方法能获得稳定收敛的迭代过程。



图 2 MBB 梁拓扑设计( $l_c=12 \text{ mm}, J=3.72, DV=362$ )

Fig. 2 Topology design of the MBB beam ( $l_c=12 \text{ mm}, J=3.72, DV=362$ )



图3 MBB梁拓扑设计( $l_c=24\text{ mm}$ ,  $J=4.38$ ,  $DV=111$ )  
Fig. 3 Topology design of the MBB beam( $l_c=24\text{ mm}$ ,  $J=4.38$ ,  $DV=111$ )

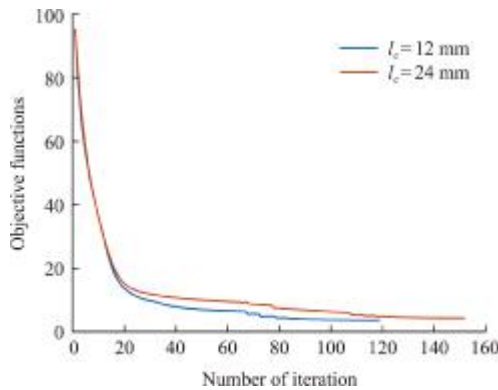


图4 MBB梁拓扑优化的迭代历史  
Fig. 4 Iterative histories of topology optimization of the MBB beam

### 4.2 悬臂梁结构

本节算例考虑一个悬臂梁结构,几何设计域和边界条件如图5所示。其初始设计的一阶共振频率为175 Hz。相关长度设置为  $l_c=100\text{ mm}$ ,设计区域由  $100\times 50$  的 NURBS 单元离散。



图5 悬臂梁的设计域和边界条件  
Fig. 5 Design domain and boundary conditions of the cantilever beam

当激励频率为5 Hz,100 Hz和170 Hz时,悬臂梁结构的拓扑设计分别如图6~图8所示。可以看出,随着激励频率不断接近一阶共振频率,载荷处杆件粗细存在一定的差别。目标函数随激振频率的变化如图9所示。可见三种拓扑设计的目标函数值都显著降低。由于激励频率越来越接近一阶共振频率,优化结果的一阶共振频率得到提高(即更加有效),从而可以在更大频率范围内避免共振。相较于相同幅值的静力荷载作用下的结构拓扑优化,由于优化目标列式的不同,优化构型的性能也将展现出差异。另外,本文拓扑设计与采用 SIMP 方法得到的优化设计相近<sup>[19]</sup>。但 SIMP 方

法的结果中材料分布通常依赖于有限单元的离散,在网格加密时需要较多的设计变量。相比之下,本文方法对于悬臂梁结构的设计参数个数为191个。



图6 5 Hz下悬臂梁拓扑设计( $J=8.99$ )  
Fig. 6 Topology design of the cantilever beam under 5 Hz ( $J=8.99$ )



图7 100 Hz下悬臂梁拓扑设计( $J=9.79$ )  
Fig. 7 Topology design of the cantilever beam under 100 Hz ( $J=9.79$ )



图8 170 Hz下悬臂梁拓扑设计( $J=11.49$ )  
Fig. 8 Topology design of the cantilever beam under 170 Hz ( $J=11.49$ )

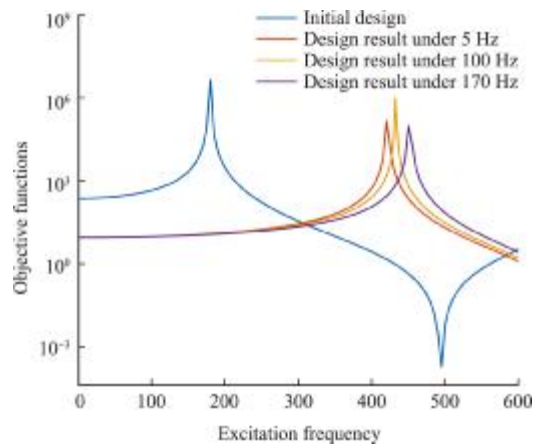


图9 频率响应  
Fig. 9 Excitation frequency plot of objective functions

### 4.3 1/4圆环结构

本节算例通过考虑一个1/4圆环结构检验IGA-MFSE方法对于曲形结构设计的有效性。几何设计域和边界条件如图10所示,初始设计的一阶共振频率为700 Hz。相关长度设置为  $l_c=30\text{ mm}$ 。

1/4圆环结构采用二次NURBS的几何模型如图11所示,红点表示NURBS控制点。对于曲

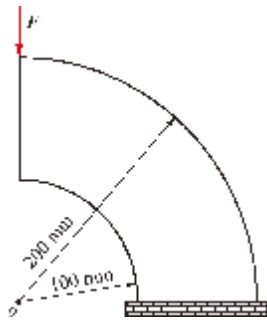


图 10 1/4 圆环结构的设计域和边界条件  
Fig. 10 Design domain and boundary conditions of the quarter annulus

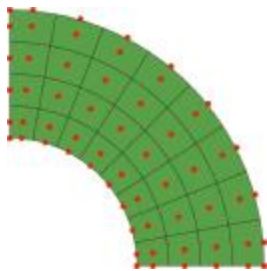


图 11 1/4 圆环结构的 NURBS 几何模型  
Fig. 11 NURBS geometric model of the quarter annulus structure

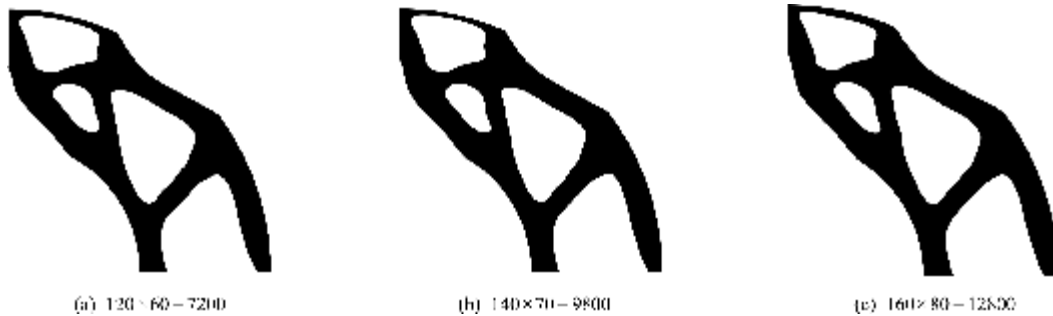


图 12 激振频率为 100 Hz 时不同单元数的 1/4 圆环结构拓扑设计  
Fig. 12 Topology design of the quarter annulus structure under 100 Hz using different number of elements

表 1 100 Hz 激励下不同单元数的结构拓扑设计比较

Tab. 1 Comparison of structural topology design using different number of elements under 100 Hz

	Number of elements	Number of design variables	Number of iterations	Objective function value
(a)	$120 \times 60 = 7200$	170	128	10.49
(b)	$140 \times 70 = 9800$	170	117	10.54
(c)	$160 \times 80 = 12800$	170	120	10.58

#### 4.4 曲形悬臂结构

本节算例通过考虑一个曲形悬臂结构进一步验证本文方法对于同时求解低频和高频激励问题的有效性。设计域和边界条件如图 13 所示。初始设计的一阶共振频率为 560 Hz。相关长度设置为  $l_c = 30 \text{ mm}$ , 设计区域由  $100 \times 50$  的 NURBS 单元离散。值得指出的是,  $r$  的取值建议偏小, 此时的静柔度权重偏大一些, 本节将权重系数设置为  $r = 0.1$ 。

形结构设计, 基于有限元分析的优化方法通常需要划分细密的网格以减少模型误差, 大量的有限元网格会降低拓扑优化的计算效率。与之相比, IGA-MFSE 方法对于曲形结构设计只需要较少的 NURBS 控制点便能够精确地表示 1/4 圆环结构的几何。

激振频率为 100 Hz 时不同单元数的结构拓扑设计构型如图 12 所示。100 Hz 激励下不同单元数的结构拓扑设计比较列入表 1, 其中单元数分别设置为  $120 \times 60, 140 \times 70$  和  $160 \times 80$ 。从图 12 和表 1 可以看出, 当相关长度固定时, 可以获得网格无关的优化设计。本文方法设计变量的数量较少, 且不依赖于等几何分析单元或控制点的数量。值得指出的是, 传统方法设计变量的个数通常依赖于有限元网格的个数, 而本文方法可以避免传统方法在网格加密时计算量大的问题。因此, IGA-MFSE 方法避免了网格依赖性问题, 并可保证设计优化的效率。

对于该曲形悬臂结构的拓扑优化, 基于有限元的优化方法主要通过网格细分减少几何建模的逼近误差, 进而提高计算精度。相比之下, 本文使用 NURBS 曲面精确表示结构几何模型如图 14 所示。当激振频率设置为 100 Hz, 即小于一阶共振频率时, 相应的优化结果如图 15 所示, 可以获得清晰且边界光滑的拓扑设计。当激振频率为 1000 Hz, 即大于一阶共振频率时, 同时施加静柔度约束, 优化结果如图 16 所示。与图 15 相比, 在相对较高的激



励频率下获得了明显不同的优化构型。因此,本文方法可以在较宽的激振频率范围内实现拓扑优化,并且可以避免棋盘格模式、网格依赖性和锯齿形边界等数值求解问题。

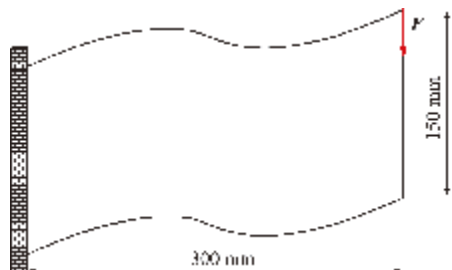


图 13 曲形悬臂梁的设计域和边界条件  
Fig. 13 Design domain and boundary conditions of the curved cantilever structure

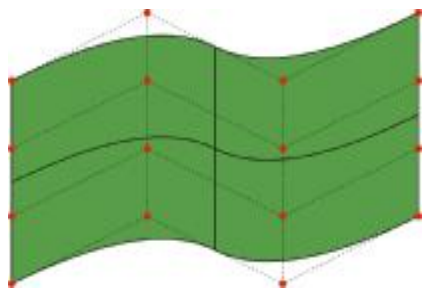


图 14 曲形悬臂结构的二次 NURBS 表示  
Fig. 14 Quadratic NURBS representation of the curved cantilever structure



图 15 100 Hz 下曲形悬臂结构拓扑设计( $J=17.42$ )  
Fig. 15 Topology design of the curved cantilever structure under 100 Hz ( $J=17.42$ )



图 16 1000 Hz 下曲形悬臂结构拓扑设计( $J=20.34$ ,  $J_d=2.03$ ,  $J_s=18.31$ )  
Fig. 16 Topology design of the curved cantilever structure under 1000 Hz ( $J=20.34$ ,  $J_d=2.03$ ,  $J_s=18.31$ )

## 5 结论

本文提出一种等几何设计优化方法用于求解简谐激励结构拓扑优化问题。通过将等几何分析

与材料场级数展开模型结合,避免了传统方法出现的较多计算自由度和设计参数的问题,保证了简谐激励结构拓扑优化的计算精度和效率。针对动力学拓扑优化的迭代振荡和不收敛困难,引入了一种稳定化方案用于迭代控制,从而提高了优化算法的收敛性。本文基于等几何分析和材料场级数展开模型的优化方法可以避免灰度模糊区域、锯齿形边界、棋盘格现象和单元细分依赖性等常见的数值解难题,能够获得清晰的拓扑设计构型,从而更加方便地提取结构的几何特征,为后续的制造提供便利。数值算例证明可以在较宽的激励频率范围内高效实现简谐激励结构拓扑优化。

## 参考文献(References):

- [1] Bendsøe M P, Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988, **71**(2):197-224.
- [2] Sigmund O, Maute K. Topology optimization approaches[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2013, **48**(6):1031-1055.
- [3] Xie Y M, Steven G P. A simple evolutionary procedure for structural optimization[J]. *Computers & Structures*, 1993, **49**(5):885-896.
- [4] Wang M Y, Wang X M, Guo D M. A level set method for structural topology optimization[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2003, **192**(1-2):227-246.
- [5] 魏鹏, 范海坚, 李雪平, 等. 基于参数化水平集方法的微结构拓扑优化设计[J]. *计算力学学报*, 2021, **38**(4):471-478. (WEI Peng, FAN Hai-jian, LI Xue-ping, et al. Topology optimization for the design of microstructure base on parameterized level set method[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2021, **38**(4):471-478. (in Chinese))
- [6] 隋允康, 彭细荣, 叶红玲, 等. 结构拓扑优化局部性能约束下轻量化问题的互逆规划解法[J]. *计算力学学报*, 2021, **38**(4):479-486. (SUI Yun-kang, PENG Xi-rong, YE Hong-ling, et al. Reciprocal programming method for structural lightweight topology optimization with local performance constraints[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2021, **38**(4):479-486. (in Chinese))
- [7] 薛日野, 杜宗亮, 郭旭. 基于移动可变形孔洞方法的超弹性结构拓扑优化[J]. *计算力学学报*, 2019, **36**(4):441-447. (XUE Ri-ye, DU Zong-liang, GUO Xu. Topology optimization of hyperelastic structures via

- Moving Morphable Void (MMV) approach[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2019, **36**(4):441-447. (in Chinese)
- [8] Zhou Y, Zhang W H, Zhu J H, et al. Feature-driven topology optimization method with signed distance function[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2016, **310**(1):1-32.
- [9] Zargham S, Ward T A, Ramli R, et al. Topology optimization: A review for structural designs under vibration problems[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2016, **53**(6):1157-1177.
- [10] 文桂林, 陈高锡, 王洪鑫, 等. 含自重载荷的功能梯度材料结构时域动力学拓扑优化设计[J]. *中国机械工程*, 2022, **33**(23):2774-2782. (WEN Gui-lin, CHEN Gao-xi, WANG Hong-xin, et al. Time domain dynamics topology optimization of functionally gradient material structures with self-weight load[J]. *China Mechanical Engineering*, 2022, **33**(23):2774-2782. (in Chinese))
- [11] Xue L, Wen G L, Wang H X, et al. Eigenvectors-guided topology optimization to control the mode shape and suppress the vibration of the multi-material plate[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2022, **391**:114560.
- [12] Liu B S, Huang X D, Huang C F, et al. Topological design of structures under dynamic periodic loads[J]. *Engineering Structures*, 2017, **142**:128-136.
- [13] Niu B, He X M, Shan Y, et al. On objective functions of minimizing the vibration response of continuum structures subjected to external harmonic excitation[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2018, **57**(6):2291-2307.
- [14] Zhou E L, Wu Y, Lin X Y, et al. A normalization strategy for BESO-based structural optimization and its application to frequency response suppression[J]. *Acta Mechanica*, 2021, **232**(4):1307-1327.
- [15] Montero D S, Silva O M, Cardoso E L. Topology optimization for harmonic vibration problems using a density-weighted norm objective function[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2020, **62**(6):3301-3327.
- [16] Ma Z D, Kikuchi N, Hagiwara I. Structural topology and shape optimization for a frequency response problem[J]. *Computational Mechanics*, 1993, **13**(3):157-174.
- [17] Ma Z D, Kikuchi N, Cheng H C. Topological design for vibrating structures[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1995, **121**(1-4):259-280.
- [18] Olhoff N, Du J B. Generalized incremental frequency method for topological design of continuum structures for minimum dynamic compliance subject to forced vibration at a prescribed low or high value of the excitation frequency[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2016, **54**(5):1113-1141.
- [19] Silva O M, Neves M M, Lenzi A. A critical analysis of using the dynamic compliance as objective function in topology optimization of one-material structures considering steady-state forced vibration problems[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2019, **444**:1-20.
- [20] Shu L, Wang M Y, Fang Z D, et al. Level set based structural topology optimization for minimizing frequency response[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2011, **330**(24):5820-5834.
- [21] Silva O M, Neves M M, Lenzi A. On the use of active and reactive input power in topology optimization of one-material structures considering steady-state forced vibration problems[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2020, **464**:114989.
- [22] Cook R D. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*[M]. John Wiley & Sons, 1984.
- [23] Hughes T J R, Cottrell J A, Bazilevs Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, **194**(39-41):4135-4195.
- [24] Cottrell J A, Hughes T J R, Bazilevs Y. *Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA*[M]. John Wiley & Sons, 2009.
- [25] Luo Y J, Bao J W. A material-field series-expansion method for topology optimization of continuum structures[J]. *Computers & Structures*, 2019, **225**:106122.
- [26] Liu P, Zhang X P, Luo Y J. Topological design of freely vibrating bi-material structures to achieve the maximum band gap centering at a specified frequency[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2021, **88**(8):081003.
- [27] Liu H L, Yang D X, Hao P, et al. Isogeometric analysis based topology optimization design with global stress constraint[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, **342**:625-652.
- [28] Svanberg K. The method of moving asymptotes—A new method for structural optimization[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, **24**(2):359-373.



## Topology optimization of harmonic excitation structures based on isogeometric analysis and material field series expansion model

WANG Pei-jin<sup>1</sup>, LIU Hong-liang<sup>\*1,2</sup>, ZHANG Ye-wei<sup>1</sup>, LEI Zhen-zeng<sup>2</sup>, YANG Di-xiong<sup>2</sup>

(1. Key Laboratory of Liaoning Province for Composite Structural Analysis of Aircraft and Simulation,  
Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, China;

2. State Key Laboratory of Structural Analysis, Optimization and CAE Software for Industrial Equipment,  
Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

**Abstract:** Topology optimization of structures under a considering harmonic excitation has important research significance and engineering application value, especially for the rapidly developing aerospace field. In order to facilitate the extraction and control of geometric features of the optimal design results, while taking into account the calculation accuracy, efficiency and iteration stability of the design, this paper develops an isogeometric optimization method based on isogeometric analysis and material field series expansion model for topology optimization of structures under a harmonic excitation. Due to the characteristics of geometric modeling accuracy and high-order continuity across elements, the precision of response analysis and sensitivity calculation can be ensured without the need of extremely fine meshes. By combining the material field series expansion model, dimensionality reduction technology is employed to greatly reduce the number of design parameters, improve the efficiency of design optimization, and obtain an optimal configuration independent of elemental subdivision and with clear geometric boundaries. In order to avoid iteration oscillation and non-convergence which may occur in dynamic topology optimization, the convergence design solution with stable iteration is obtained by using the stabilization scheme. Numerical examples show that the proposed method can effectively avoid appearance of a gray fuzzy region, sawtooth boundary, mesh dependency and checkerboard phenomenon, and can achieve topology optimization of structures under a harmonic excitation with high accuracy and efficiency.

**Key words:** isogeometric analysis; topology optimization; harmonic excitation; stabilization scheme; material field series expansion model