

DOI: 10.7511/jslx20230131001

# 啦啦操阿拉 C 杠难度动作的力学原理及其应用

唐艳霞<sup>1</sup>, 黄观新<sup>\*2</sup>

(1. 吉首大学 体育科学学院, 吉首 416000;

2. 广东工业大学 省部共建精密电子制造技术装备国家重点实验室, 广州 510006)

**摘要:**阿拉 C 杠属于啦啦操转体类难度,在啦啦操成套动作中有着至关重要的地位。为探明阿拉 C 杠的力学原理,为其训练方法和评价标准提供科学依据,本文以机器人学理论为基础建立了阿拉 C 杠运动过程的人体模型,并对运动过程进行了运动规划和运动学仿真。然后应用拉格朗日方程建立了阿拉 C 杠动作的动力学模型,针对一种理想的运动状态对阿拉 C 杠运动过程中人体各主要关节的驱动力进行了分析。最后,根据动力学仿真结果对比了双臂开合、单臂开合和大小 T 三种手部动作对身体各关节驱动力的影响。分析结果表明,动力腿是阿拉 C 杠动作的主要动力来源,动力腿髋关节的驱动力不受手部动作的影响。在双臂开合、单臂开合和大小 T 三种手部动作中,大小 T 需要的关节驱动力最小。本文为阿拉 C 杠的训练与评价提供了理论依据,可供练习者在训练过程中参考使用。

**关键词:**啦啦操;阿拉 C 杠;力学原理;运动规划;动力学模型

**中图分类号:** O313 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-4708(2024)04-0801-06

## 1 引言

啦啦操是一项兼具体操、舞蹈等技术动作于一体的运动项目,在国际比赛中占据着重要的地位。阿拉 C 杠是舞蹈啦啦操<sup>[1]</sup>中转体类难度动作,在舞蹈啦啦操成套动作中占据非常重要的位置,近几届的世界啦啦操锦标赛中,阿拉 C 杠难度是花球啦啦操<sup>[2]</sup>和爵士啦啦操项目最广泛使用的难度动作之一。由此可见阿拉 C 杠难度动作在啦啦操成套中的作用至关重要。阿拉 C 杠技术动作是从芭蕾引进,其难度系数较高。运动员没有经过系统、科学的专业训练,很难达到动作标准,以至于大多教练员在教学中没有准确地将阿拉 C 杠技术动作传授给学生,造成长期训练无法达到预期的效果,并导致在比赛中无法更好地运用阿拉 C 杠技术。科学的训练方法是提升体育运动项目技术动作完成质量的关键,大量的学者和研究机构在啦啦操科学训练以及相关技术动作训练方法展开了广泛的研究,提出了许多新颖观点和理论。

目前,针对阿拉 C 杠研究以经验分析为主。

文献[3-7]对啦啦操训练策略和啦啦操运动员体能训练等内容进行了深入研究。文献[8,9]指出阿拉 C 杠动作专项力量训练以及核心训练对其完成质量具有较大影响。这部分研究主要都聚焦在啦啦操运动员的技术训练、跃动技术训练和难度技术训练上,探讨了不同的训练方式对啦啦操运动员的身体素质和技能提升的影响。随着技术和研究的不断进步,运动捕捉技术也应用到啦啦操运动的研究中。文献[10-12]使用运动捕捉系统对啦啦操运动员的动作进行了跟踪和分析,以便更好地了解运动员的技术和动作。

总体而言,现有对于啦啦操技术动作训练的研究较丰富,在阿拉 C 杠动作的技术要点和训练方法等方面达成了一部分共识,主要包括核心力量训练、上下脚协调性训练、踝关节力量训练和留头与甩头训练等。从研究方法层面来看,现有研究以专家访谈法、文献资料法和实验法等方法为主,通过统计和归纳得出一些定性结论。运动捕捉技术的应用有助于更加细致地了解阿拉 C 杠动作的细节特征,但是对阿拉 C 杠的动力学原理仍缺少系统

收稿日期:2023-01-31; 修改稿收到日期:2023-05-05.

基金项目:广州市科技计划(202201010277);湖南省教育厅优秀青年项目(20B471)资助.

作者简介:黄观新\*(1987-),男,博士,副教授(E-mail:guanxinhuang@gdut.edu.cn).

引用本文:唐艳霞,黄观新. 啦啦操阿拉 C 杠难度动作的力学原理及其应用[J]. 计算力学学报,2024,41(4):801-806.  
TANG Yan-xia, HUANG Guan-xin. Mechanics principle of Ala C Bar in cheerleading and its application[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2024, 41(4): 801-806.

研究和深入认识。针对这一研究缺陷,本文借助机器人学理论<sup>[13]</sup>对阿拉 C 杠动作的力学原理进行研究,并将动力学模型应用于运动过程中身体各部分的力学特性分析,为阿拉 C 杠训练方法和评价标准的研究提供理论依据。

## 2 阿拉 C 杠运动学分析

### 2.1 动作要点

阿拉 C 杠源自芭蕾舞,属于转体类难度动作。阿拉 C 杠动作的完成对学习者的核心部位力量、髂腰肌的控制能力、脚踝的力量以及腿的柔韧性和灵活性都有一定的要求。阿拉 C 杠动作可以分为以下两个阶段。

启动阶段:

第 1 步: 身体面向第一方位,左脚站前五位,双手一位准备(图 1(a))。

第 2 步: 双手从一位移至二位(图 1(b))。

第 3 步: 左脚擦地至旁二位,双手在旁擦地的同时打开到七位(图 1(c))。

第 4 步: 左脚后插,双腿做四位蹲,七位手变换至左手在前的六位。随后双腿发力,双臂打开,身体逆时针(俯视视角)旋转 1 周,完成启动阶段,后接连续旋转阶段的第 5 步(图 1(d))。

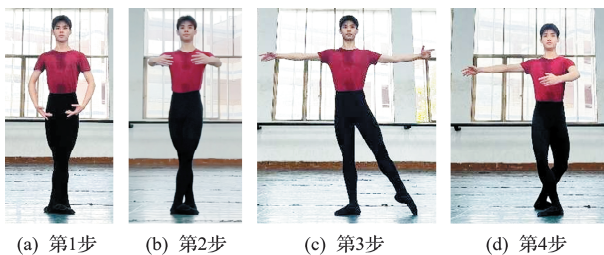


图 1 启动阶段图解

Fig. 1 Illustration of startup phase

连续旋转阶段:

第 5 步: 右腿半蹲同时左腿出腿伸向第二方位 90 度位置,保持骨盆直立,双手至二位(图 2(a))。

第 6 步: 右腿主力腿蹬直,力达脚尖。同时,左腿向外打开,双手主动打开至平七位。身体借惯性逆时针(俯视视角)旋转 1 周,后接第 5 步,形成运动循环(图 2(b))。

第 5 步和第 6 步的正面朝向如图 3 所示,启动阶段各步骤的正面朝向与第 6 步相同。

从技能技术训练的角度,身体的直立、动力腿控制的高度与开度以及手臂、动力腿和甩头的协调是高质量完成阿拉 C 杠动作的关键,要注意重心始终在主力腿上,重心下压,主力腿蹲和立的动作

要稳定。

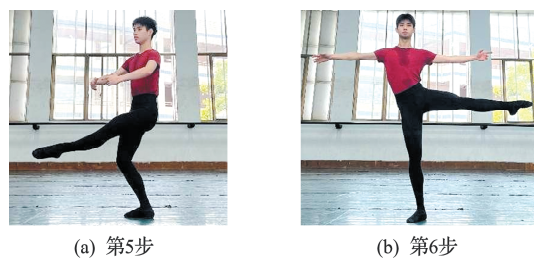


图 2 连续旋转阶段图解

Fig. 2 Illustration of continuous rotation phase

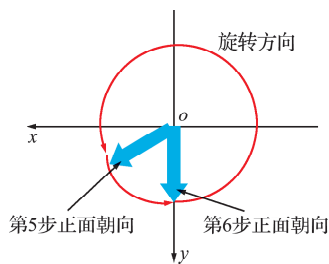


图 3 正面朝向(俯视视角)

Fig. 3 Frontal orientation (top view)

### 2.2 运动学分析

连续旋转阶段是阿拉 C 杠运动的主要阶段,因此本文主要对该阶段进行分析。为便于模型描述,取阿拉 C 杠连续旋转阶段第 5 步为初始状态,取其正面朝向为  $y$  轴方向对人体进行建模。以右腿做主力腿,左腿做动力腿为例,人体的简化结构如图 4 所示,各序号代表的身体部位列入表 1,以某运动员为对象实测得到身体各部分尺寸列入表 1。

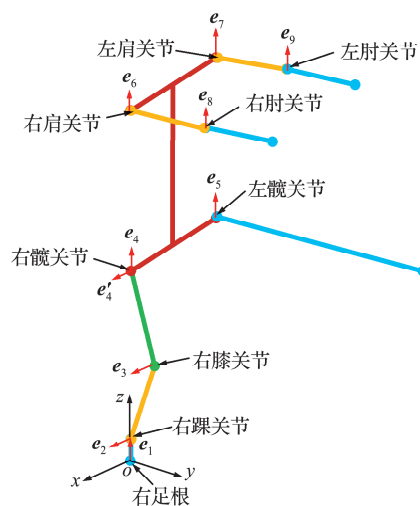


图 4 人体结构模型

Fig. 4 Human body structure model

本文采用文献<sup>[13]</sup>的向量参数法进行运动学分析。图 4 中  $oxyz$  为全局坐标系,关节坐标系  $o_i x_i y_i z_i$  ( $i=1 \sim 9$ ) (图 4 未画出)固连在构件  $i$  上,初始方向

与  $oxyz$  保持一致,各关节的转轴向量  $e_i$  如图4所示,其数值列入表2。 $\theta_i$  表示构件  $i$  绕转轴  $e_i$  旋转的角度(相对于坐标系  $o_sx_sy_sz_s$ ,  $s$  为与构件  $i$  相连的根构件编号,下同),  $b_i$  为连杆向量,表示  $o_s$  指向  $o_i$  的向量,其表达式列入表2。表2中  $\alpha_2$  和  $\alpha_3$  分别为初始状态下小腿/大腿与  $z$  轴正方向的夹角(其值均取为  $30^\circ$ )。注意4号关节(右髋关节)有两个自由度,第1个自由度为绕  $e'_4$  轴的旋转,转角为  $\theta'_4$ ; 第2个自由度为绕  $e_4$  轴的旋转,转角为  $\theta_4$ 。

表1 人体结构编号与尺寸参数  
Tab.1 Body structure number and size parameters

部位编号			尺寸参数		
序号	关节	构件	名称	符号	数值/cm
1	右足跟	右足	足高	$l_1$	8
2	右踝关节	右小腿	小腿长	$l_2$	35
3	右膝关节	右大腿	大腿长	$l_3$	44
4	右髋关节	躯干	髋关节间距	$w_1$	32
5	左髋关节	左腿	肩关节间距	$w_2$	40
6	右肩关节	右上臂	肩髋高度差	$h_1$	38
7	左肩关节	左上臂	上臂长	$l_4$	30
8	右肘关节	右小臂	小臂长	$l_5$	22
9	左肘关节	左小臂			

表2 关节与连杆向量参数  
Tab.2 Vector parameters of joints and links

$i$	$e_i$			$b_i$		
	$e_{ix}$	$e_{iy}$	$e_{iz}$	$b_{ix}$	$b_{iy}$	$b_{iz}$
1	0	0	1	0	0	0
2	1	0	0	0	0	$l_1$
3	1	0	0	0	$l_2 * \sin\alpha_2$	$l_2 * \cos\alpha_2$
4(1)	1	0	0	0	$-l_3 * \sin\alpha_3$	$l_3 * \cos\alpha_3$
4(2)	0	0	1	0	0	0
5	0	0	1	$-\omega_1$	0	0
6	0	0	1	$-(\omega_1 - \omega_2)/2$	0	$h_1$
7	0	0	1	$-(\omega_1 + \omega_2)/2$	0	$h_1$
8	0	0	1	0	$l_4$	0
9	0	0	1	0	$l_4$	0

定义齐次变换矩阵

$$\text{rot}x(\theta, \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b_x \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & b_y \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & b_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\text{rot}z(\theta, \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & b_x \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & b_y \\ 0 & 0 & 1 & b_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

则由表2的向量参数可得各构件  $i$  的齐次变换矩阵为

$${}^s\mathbf{H}_i = \begin{cases} \text{rot}x(\theta_i, \mathbf{b}_i) & (i = 2, 3) \\ \text{rot}x(\theta'_i, \mathbf{b}_i) \text{rot}z(\theta_i, 0) & (i = 4) \\ \text{rot}z(\theta_i, \mathbf{b}_i) & (i \neq 2, 3, 4) \end{cases} \quad (3)$$

由此,可得各构件  $i$  在全局坐标系下的位姿  $\mathbf{H}_i$  为

$$\mathbf{H}_i = \begin{cases} \prod_{j=1}^{i-1} \mathbf{H}_j & (i = 1, 2, 3, 4) \\ \mathbf{H}_4 \mathbf{H}_i & (i = 5, 6, 7) \\ \mathbf{H}_6 \mathbf{H}_i & (i = 8) \\ \mathbf{H}_7 \mathbf{H}_i & (i = 9) \end{cases} \quad (4)$$

为保证运动过程中上身正直,  $z_4$  坐标轴应该保持与  $z$  轴一致。由式(4)可得  $z_4$  的表达式为

$$\mathbf{z}_4 = \begin{bmatrix} \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta'_4) \sin\theta_1 \\ -\sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta'_4) \cos\theta_1 \\ \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta'_4) \end{bmatrix} \quad (5)$$

因此,若  $z_4$  与  $z$  一致应满足

$$\theta'_4 = -(\theta_2 + \theta_3) \quad (6)$$

### 2.3 运动规划

阿拉C杠旋转1周的腿部动作可以分为开腿和合腿两个阶段,相应的手部动作也可以分为开臂和合臂两个阶段。不同的是,阿拉C杠的腿部动作有统一规范,而手部动作可以自由发挥。目前常用的手部动作有以下三种方案(图5)。(1)双臂开合。双臂向前平举,与动力腿同步开合;(2)单臂开合。双臂向前平举,动力腿同侧手臂(本文中为左臂)与动力腿同步开合;(3)大小T。双臂两侧平举,双小臂与动力腿同步开合。

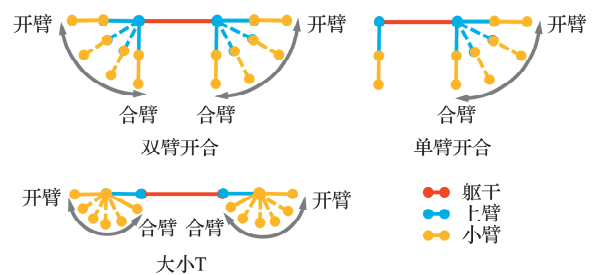


图5 手部动作俯视视角图解  
Fig.5 Illustration of the top-down view of hand motion

考虑一种理想情况,假设运动员在运动过程中躯干和支撑腿保持以相同的角速度匀速旋转,旋转1周的时间为  $T = 1$  s,其中开腿时间为  $t_k = 0.2$  s,合腿时间为  $t_h = 0.8$  s,则在  $t = 0, t_k, T$  三个时刻,身体各部分的输出角度规划列入表3。

阿拉C杠在  $t = 0, t_k$  和  $T$  三个时刻,身体保持整体转动,因此有如下的速度规划

$$\dot{\theta}_i(t) = 0 \quad (i \neq 1, t \in \{0, t_k, T\}) \quad (7)$$

表3 输出角度规划(单位:°)  
Tab.3 Output angle planning (unit:°)

自由度	双臂开合			单臂开合			大小 T		
	0	$t_k$	T	0	$t_k$	T	0	$t_k$	T
$\theta_1$	0	72	360	0	72	360	0	72	360
$\theta_2$	0	30	0	0	30	0	0	30	0
$\theta_3$	0	-30	0	0	-30	0	0	-30	0
$\theta_4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_5$	0	90	0	0	90	0	0	90	0
$\theta_6$	0	-90	0	0	0	0	-90	-90	-90
$\theta_7$	0	90	0	0	90	0	90	90	90
$\theta_8$	0	0	0	0	0	0	150	0	150
$\theta_9$	0	0	0	0	0	0	-150	0	-150

采用文献[14]提出的7段式S型曲线对除右足跟以外的各关节进行运动规划,得到的各关节位移曲线如图6所示。

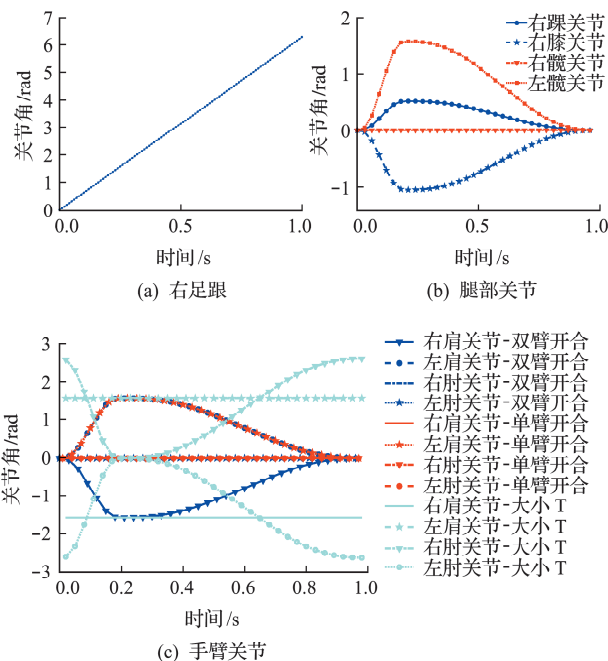


图6 各关节运动规划  
Fig.6 Motion planning of each joint

### 3 阿拉 C 杠动力学建模

设构件  $i$  的质量为  $m_i$ , 且为集中质量, 位于构件  $i$  的中心位置  $c_i$  处, 在  $o_i x_i y_i z_i$  坐标系下的位置矢量为  $r_i$ , 则由 2.2 节可知  $c_i$  在  $o x y z$  坐标系下的位置矢量为

$$R_i = H_i r_i \quad (8)$$

对式(8)求时间导数, 可得速度矢量为

$$\dot{R}_i = J_i \dot{\theta} \quad (9)$$

式中  $\theta$  和  $J_i$  分别为关节位移向量和雅克比矩阵, 定义为

$$\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_9]^T \quad (10)$$

$$J_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial \theta_1} r_i & \frac{\partial H_i}{\partial \theta_2} r_i & \dots & \frac{\partial H_i}{\partial \theta_9} r_i \end{bmatrix} \quad (11)$$

因此, 系统的总动能为

$$E_k = \sum_{i=1}^9 \frac{1}{2} m_i \dot{R}_i^T \dot{R}_i = \sum_{i=1}^9 \frac{1}{2} m_i \dot{\theta}^T J_i^T J_i \dot{\theta} \quad (12)$$

记  $Q_i$  为作用在  $\theta_i$  的广义力, 根据拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \theta_i} = Q_i \quad (13)$$

可以导出动力学方程

$$M(\theta) \ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} = Q_d \quad (14)$$

$$\text{式中 } Q_d = [Q_1 \ Q_2 \ \dots \ Q_9]^T \quad (15)$$

$$M(\theta) = \sum_{i=1}^9 m_i J_i^T J_i \quad (16)$$

$$C(\theta, \dot{\theta}) = D - \frac{1}{2} D^T \quad (17)$$

$$\text{其中 } D = \left[ \frac{\partial M(\theta)}{\partial \theta_1} \dot{\theta} \ \frac{\partial M(\theta)}{\partial \theta_2} \dot{\theta} \ \dots \ \frac{\partial M(\theta)}{\partial \theta_9} \dot{\theta} \right] \quad (18)$$

### 4 阿拉 C 杠手部动作优化

2.3 节对阿拉 C 杠的腿部动作及 3 种常用手部动作进行了运动规划, 将运动规划结果代入式(14)可得各关节所需的驱动力矩, 其中对于动力分析较为重要的右足跟、髋关节和肩关节驱动力矩曲线分别如图 7~图 9 所示。从图 7~图 9 可得如下分析结果。

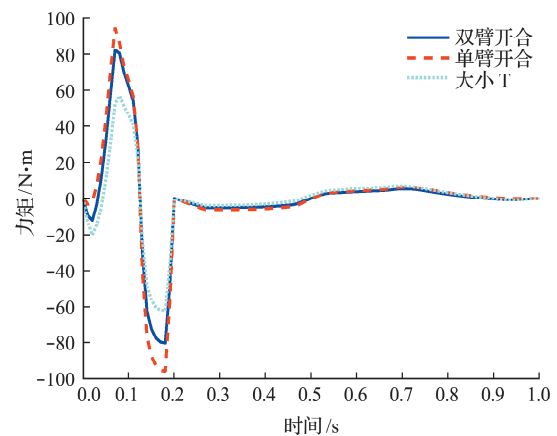


图7 右足跟驱动力矩  
Fig.7 Driving torque of right heel

(1) 从图 8 可以看出, 三种手部动作对应的左髋关节驱动力基本相同, 说明左髋关节驱动力与手部动作无关。

(2) 左髋关节(动力腿)的最大驱动力矩(绝对值)约为  $80 \text{ N} \cdot \text{m}$ , 大于其他各关节的驱动力矩。因此, 动力腿是阿拉 C 杠动作的主要动力来源。

由于躯干和右腿设置为匀速转动,左髋关节驱动力矩只有一部分通过左髋关节传递到了右足跟。

(3)从图7和图8可以看出,在三种手部动作中,大小T所需的足跟关节和右髋关节驱动力矩最小,驱动力矩的变化幅度也最小,说明该动作更容易受运动员掌握。

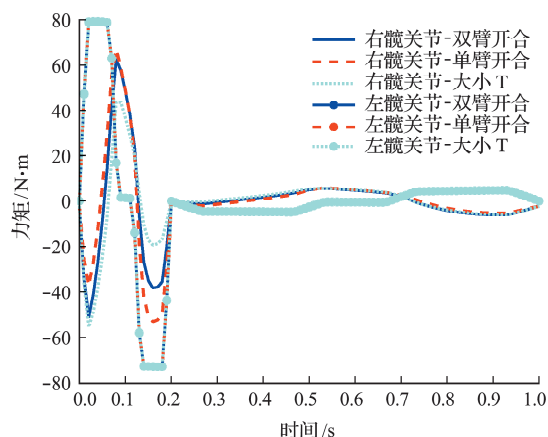


图8 髋关节驱动力矩

Fig. 8 Driving torques of hip joints

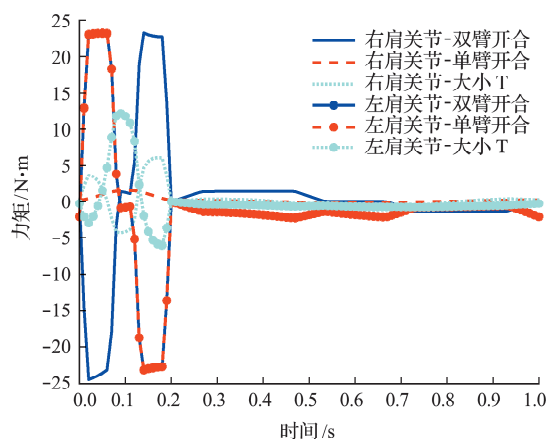


图9 肩关节驱动力矩

Fig. 9 Driving torques of shoulder joints

## 5 结论

本文建立了啦啦操难度动作阿拉C杠的运动学模型和动力学模型,并进行了运动规划和动力学仿真,最后结合仿真数据对三种不同手部动作对各关节驱动力的影响进行了对比。仿真结果表明,阿拉C杠动作的动力腿是主要的动力来源,且动力腿髋关节驱动力与手部动作无关。在双臂开合、单臂开合和大小T三种手部动作方案中,大小T所需的关节驱动力矩是最小的。本文为阿拉C杠的训练提供了理论依据,可供运动员在训练过程中参考使用。

## 参考文献(References):

- [1] 许波.“旋转类难度”在舞蹈啦啦操成套中的价值[J].西安体育学院学报,2018,8(1):223-226.(XU Bo. The values of “rotating category difficulty” in dance cheerleading routine [J]. *Journal of Xi'an Physical Education University*, 2018, 8(1): 223-226. (in Chinese))
- [2] 王依依,邱颖俊.花球啦啦操中阿拉C杠稳定性训练研究[J].中国学校体育(高等教育),2016,3(12):76-79.(WANG Yi-yi, QIU Ying-jun. Study on stability training exercises of Ala C bar cheerleading [J]. *China School Physical Education*, 2016, 3(12): 76-79. (in Chinese))
- [3] Currie D W, Fields S K, Patterson M J, et al. Cheerleading injuries in United States high schools [J]. *Pediatrics*, 2016, 137(1): DOI: 10.1542/peds.2015-2447.
- [4] Grigoriou C, Pricop A, Wessely T, et al. Optimizing the physical training of the female students in the cheerleading team of the university politehnica of Bucharest [J]. *Gymnasium*, 2019, 20(2): 68-84.
- [5] Krivoruchko N V, Masliak I P, Bala T M, et al. The influence of cheerleading exercises on the demonstration of strength and endurance of 15-17-year-olds girls [J]. *Physical Education of Students*, 2018, 22(3): 127.
- [6] Stroescu S A. The importance of safety rules in cheerleading [A]. *The European Proceedings of Social and Behavioural Sciences* [C]. 2018.
- [7] Rita K, Attila S. Dynamics of the affective states during and after cheerleading training in female athletes [J]. *Polish Psychological Bulletin*, 2019, 50(1): 29-35.
- [8] 曹瑜,徐元玉.核心训练对大学生舞蹈啦啦操阿拉C杠动作技术稳定性影响的研究[J].湖北体育科技,2018,37(4):330-333,366.(CAO Yu, XU Yuan-yu. Effect of core training on stability of dance cheerleading Ala seconde technique [J]. *Hubei Sports Science*, 2018, 37(4): 330-333, 366. (in Chinese))
- [9] 孙亚婷.舞蹈啦啦操动作“阿拉C杠”训练方法的探析[J].体育科技文献通报,2021,29(6):177-179.(SUN Ya-ting. On the training methods of “Ala Seconde” in dance cheerleading [J]. *Bulletin of Sports Science & Technology*, 2021, 29(6): 177-179. (in Chinese))
- [10] Wang L, Zhu J. Study of cheerleading wireless human motion capture system network [A]. 3<sup>rd</sup> International Conference on Theoretical and Mathematical Founda-

tions of Computer Science[C], 2012.

- [11] 冯作鹏. 快速伸缩复合训练对啦啦操运动员屈体分腿跳动作运动学特征影响的实验研究[D]. 天津体育学院, 2022. (FENG Zuo-peng. An Experimental Study on the Effect of Rapid Stretching Compound Training on the Kinematic Characteristics of Female Cheerleading Athletes [D]. Tianjin University of Sport, 2022. (in Chinese))
- [12] Zhao J. "Core strength" of dance lala training considering the body motion tracking video and predictive model [A]. International Conference on Electronics and Renewable Systems (ICEARS)[C]. 2022.
- [13] Mihelj M, Bajd T, Ude A, et al. *Humanoid Robotics* [M]. Cham: Springer International Publishing, 2018.
- [14] Bai Y D, Chen X, Sun H, et al. Time-optimal freeform S-curve profile under positioning error and robustness constraints [J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2018, **23**(4): 1993-2003.

## Mechanics principle of Ala C Bar in cheerleading and its application

TANG Yan-xia<sup>1</sup>, HUANG Guan-xin<sup>\*2</sup>

(1. College of Sports Science, Jishou University, Jishou 416000, China;

2. Guangdong Provincial Key Laboratory of Micro-Nano Manufacturing Technology and Equipment, Guangdong University of Technology, Guangzhou, 510006, China)

**Abstract:** An "Ala C bar" presents a body rotation difficulty of cheerleading, which has a very important position in cheerleading sets. In order to find out the mechanics principle of an "Ala C bar" and provide a scientific basis for its training methods and evaluation criteria, the human body model of an "Ala C bar" motion process is established based on the theory of robotics, and the motion planning and kinematic simulation of the motion process are carried out. Then the Lagrange equation is used to establish the dynamic model of the "Ala C bar" movement. Aiming at an ideal motion state, the driving force of the main joints in the process of "Ala C bar" movement is analyzed. Finally, according to the dynamic simulation results, the influence of three types of hand movements, double-arm opening and closing, single-arm opening and closing and big-small T, on the driving force of each joint of the body is compared. The analysis results show that the power leg is the main power source of the "Ala C bar" movement, and the driving force of the power leg hip joint is not affected by the hand movement. Among the three types of hand movements of double arm opening and closing, single arm opening and closing, and big-small T, big-small T requires the least joint driving force. This study provides a theoretical basis for the training and evaluation of an "Ala C bar", which can be used for a reference by practitioners in the training process.

**Key words:** cheerleading; Ala C bar; principle of mechanics; exercise planning; model of dynamics