

DOI: 10.7511/jslx20230105001

# 使用实模态计算非比例阻尼系统的复模态

魏向天, 吴柏生\*, 钟慧湘

(广东工业大学 机电工程学院, 广州 510006)

**摘要:**提出一种利用实模态计算非比例阻尼系统复模态的新方法。首先,引入一个嵌入参数将无阻尼系统与阻尼系统联系起来,然后构造模态规范化条件。将非比例系统特征值和特征向量在无阻尼系统基础上对该参数实施摄动展开,得到展开系数的控制方程。每个特征向量展开系数可借助 Nelson 法求解具有同一个对称实系数矩阵的方程组来求得。该方法仅涉及感兴趣的模态,无模态截断问题,不要求广义逆,也不需要矩阵扩维。本文以两个数值算例来说明本文方法的有效性。

**关键词:**非比例阻尼;复模态;摄动展开;模态规范化;Nelson 方法

**中图分类号:**O321 **文献标志码:**A **文章编号:**1007-4708(2024)04-0790-06

## 1 引言

在土木、机械和航空航天等诸多大型工程中,组合结构应用越来越普遍。这种由不同材料组合而成的结构,由于材料间不同的阻尼特性,使得整个系统的阻尼矩阵不再满足比例阻尼假定。此时需要求解非比例阻尼系统的复模态以用于系统动力分析。

国内外学者对非比例阻尼线性系统的复模态计算问题做了深入研究。与无阻尼自然频率和振型的计算不同,复模态频率与振型的计算成本很高<sup>[1]</sup>。Foss<sup>[2]</sup>借助状态空间法求解非比例阻尼线性系统的复模态,但相应的特征值问题扩大一倍。Tang 等<sup>[3]</sup>提出了确定弱阻尼系统复模态的摄动法。该方法不需要矩阵扩维,但需要无阻尼动力刚度矩阵的广义逆。Cha<sup>[4]</sup>应用一阶摄动方法,利用无阻尼系统的实模态给出近比例阻尼系统的复特征值和特征向量的近似表示,但这种方法需要所有无阻尼系统的模态。楼梦麟等<sup>[5]</sup>以系统的实模态向量构建维数加倍的复 Ritz 向量,通过求解非线性复代数方程组来求解非比例阻尼系统的复特征值与特征向量。该方法需将矩阵扩维,精度依赖于截取的实模态的数量,误差难以控制。Ma 等<sup>[6]</sup>对

比例阻尼和非比例阻尼结构的模态向量的差异进行了研究,提出了一种相位同步的方法,将非比例阻尼分析转换为比例阻尼分析。Adhikari<sup>[7]</sup>提出了一种由无阻尼系统模态计算非比例阻尼系统复模态的迭代方法。该方法不要求矩阵扩维,但需要无阻尼系统的所有模态。Hu 等<sup>[8]</sup>基于无阻尼模态,利用 Neumann 级数展开和缩减基技术计算复模态。但这个方法需要解一个二次特征值问题,且 Neumann 级数展开的收敛条件难以验证。利用复特征值与特征向量的微商,Sinha<sup>[9]</sup>发展了一个计算非比例阻尼系统复特征值与特征向量的方法。这个方法要求无阻尼系统的所有模态。付相球等<sup>[10]</sup>提出一种利用无阻尼系统实模态的复模态叠加法。该方法将非比例阻尼系统的复模态表示为相应的比例阻尼系统的部分复模态(由实模态扩展构成)的线性组合,再将状态空间的特征方程转化为一个复非线性代数方程组来求解。该方法的精度依赖于实模态向量的个数,无法预知所得复模态的精度。

本文提出一种求解非比例阻尼系统复模态的新方法。该方法首先引入嵌入参数以便将无阻尼系统与非比例阻尼系统联系起来<sup>[11]</sup>,然后构造模态规范化条件。将非比例阻尼系统的特征值和特

收稿日期:2023-01-05;修改稿收到日期:2023-05-29.

基金项目:广东省重点领域研发计划(2019B09091702)资助项目.

作者简介:吴柏生\*(1963-),男,博士,教授,博士生导师(E-mail:wubs@gdut.edu.cn).

引用本文:魏向天,吴柏生,钟慧湘.使用实模态计算非比例阻尼系统的复模态[J].计算力学学报,2024,41(4):790-794,800.

WEI Xiang-tian, WU Bai-sheng, ZHONG Hui-xiang. Calculation of complex modes of non-proportionally damped systems using real modes[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2024, 41(4): 790-794, 800.

征向量在无阻尼系统基础上对该参数进行摄动展开,进而建立控制展开系数的方程。每阶特征向量展开系数的确定需要求解具有同一个实对称系数矩阵的方程组。这类方程组可借助 Nelson 法求解。本文使用两个算例来说明本文方法的有效性。

### 2 非比例阻尼系统的复模态

对于一个  $N$  自由度线性黏滞阻尼系统,其对应的复特征值方程为

$$\left\{ \lambda_k \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_k \\ \boldsymbol{\psi}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中  $\mathbf{M}, \mathbf{C}$  和  $\mathbf{K}$  分别为系统的  $N \times N$  阶质量、阻尼和刚度矩阵。由式(1)可得

$$(\lambda_k^2 \mathbf{M} + \lambda_k \mathbf{C} + \mathbf{K}) \boldsymbol{\psi}_k = 0 \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_k = \lambda_k \boldsymbol{\psi}_k \quad (3)$$

如果系统(1)无阻尼,特征问题(2)变为

$$\omega_k^2 \mathbf{M} \mathbf{u}_k = \mathbf{K} \mathbf{u}_k \quad (4)$$

式中  $\omega_k$  为第  $k$  阶无阻尼固有频率,  $\mathbf{u}_k$  为相应的第  $k$  阶振型。这些振型满足如下的正交和归一化关系

$$\mathbf{u}_k^T \mathbf{M} \mathbf{u}_l = \delta_{kl} \quad (k, l = 1, 2, \dots, N) \quad (5)$$

在后续讨论中,假设各个无阻尼固有频率不同。为了保证式(2)中复特征向量唯一,本文施加如下规范化条件

$$\mathbf{u}_k^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_k = 1 \quad (6)$$

### 3 求解复模态的摄动法

对于方程(2)表示的非比例阻尼系统,通过引进嵌入参数  $\epsilon$  [11] 将其转化为

$$(\lambda_k^2 \mathbf{M} + \epsilon \lambda_k \mathbf{C} + \mathbf{K}) \boldsymbol{\psi}_k = 0 \quad (7)$$

可以发现,当  $\epsilon = 0$  时,方程(7)退化为无阻尼特征值问题(4);当  $\epsilon = 1$  时,其恰好为方程(2)。利用摄动理论[12],可将方程(7)的第  $k$  阶特征值  $\lambda_k$  及其相应的特征向量  $\boldsymbol{\psi}_k$  展开成参数  $\epsilon$  的幂级数形式,即

$$\lambda_k^{(n)}(\epsilon) = \lambda_{k0} + \epsilon \lambda_{k1} + \epsilon^2 \lambda_{k2} + \dots + \epsilon^n \lambda_{kn} \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\psi}_k^{(n)}(\epsilon) = \boldsymbol{\psi}_{k0} + \epsilon \boldsymbol{\psi}_{k1} + \epsilon^2 \boldsymbol{\psi}_{k2} + \dots + \epsilon^n \boldsymbol{\psi}_{kn} \quad (9)$$

式中  $n$  为摄动展开阶数,  $\lambda_k^{(n)}(\epsilon)$  和  $\boldsymbol{\psi}_k^{(n)}(\epsilon)$  分别为特征值问题(7)的第  $k$  阶特征值和特征向量的  $n$  阶摄动解。  $\lambda_{k0}$  和  $\boldsymbol{\psi}_{k0}$  定义为

$$\lambda_{k0} = \pm \omega_k i, \boldsymbol{\psi}_{k0} = \mathbf{u}_k \quad (10)$$

式中  $i$  为单位虚数。

因为复特征值以复共轭形式成对出现,在后续讨论中,本文仅以  $\lambda_{k0} = \omega_k i$  为例。对特征向量的  $n$  阶摄动解  $\boldsymbol{\psi}_k^{(n)}$ ,依式(6),本文施加如下归一化条件

$$\mathbf{u}_k^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_k^{(n)} = 1 \quad (11)$$

由式(9~11)可得

$$\mathbf{u}_k^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_{k0} = 1, \mathbf{u}_k^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_{km} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

将式(8,9)代入式(7),展开后按  $\epsilon$  的幂次整理,并令  $\epsilon$  各幂次的系数为零,可得控制各阶展开系数的方程

$$\epsilon^0 \text{ 阶} \quad (\lambda_{k0}^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \boldsymbol{\psi}_{k0} = \mathbf{0} \quad (13)$$

$\epsilon^1$  阶

$$(2\lambda_{k0} \lambda_{k1} \mathbf{M} + \lambda_{k0} \mathbf{C}) \boldsymbol{\psi}_{k0} + (\lambda_{k0}^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \boldsymbol{\psi}_{k1} = \mathbf{0} \quad (14)$$

$\epsilon^2$  阶

$$[(\lambda_{k1}^2 + 2\lambda_{k0} \lambda_{k2}) \mathbf{M} + \lambda_{k1} \mathbf{C}] \boldsymbol{\psi}_{k0} + (2\lambda_{k0} \lambda_{k1} \mathbf{M} + \lambda_{k0} \mathbf{C}) \boldsymbol{\psi}_{k1} + (\lambda_{k0}^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \boldsymbol{\psi}_{k2} = \mathbf{0} \quad (15)$$

$\epsilon^3$  阶

$$[(2\lambda_{k0} \lambda_{k3} + 2\lambda_{k1} \lambda_{k2}) \mathbf{M} + \lambda_{k2} \mathbf{C}] \boldsymbol{\psi}_{k0} + [(\lambda_{k1}^2 + 2\lambda_{k0} \lambda_{k2}) \mathbf{M} + \lambda_{k1} \mathbf{C}] \boldsymbol{\psi}_{k1} + (2\lambda_{k0} \lambda_{k1} \mathbf{M} + \lambda_{k0} \mathbf{C}) \boldsymbol{\psi}_{k2} + (\lambda_{k0}^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \boldsymbol{\psi}_{k3} = \mathbf{0} \quad (16)$$

利用式(4,5,10),可验证式(12)的第一个方程与式(13)成立。

接下来求解式(14),需计算  $\lambda_{k1}$  和  $N$  维向量  $\boldsymbol{\psi}_{k1}$ ,共有  $N+1$  个未知量。然而式(14)只包含  $N$  个方程,本文需要增加式(12)的规范化条件来求解,即

$$\mathbf{u}_k^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_{k1} = 0 \quad (17)$$

式(14)两边左乘  $\mathbf{u}_k^T$ ,并利用式(4,10)可得

$$\mathbf{u}_k^T (2\lambda_{k0} \lambda_{k1} \mathbf{M} + \lambda_{k0} \mathbf{C}) \mathbf{u}_k = 0 \quad (18)$$

由式(5,18)可求出  $\lambda_{k1}$

$$\lambda_{k1} = -0.5 \mathbf{u}_k^T \mathbf{C} \mathbf{u}_k \equiv \tilde{\lambda}_{k1} \quad (19)$$

将式(10,19)代入式(14)可得

$$(\mathbf{K} - \omega_k^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\psi}_{k1} = -i \omega_k (2\tilde{\lambda}_{k1} \mathbf{M} + \mathbf{C}) \mathbf{u}_k \quad (20)$$

由式(4)可知,矩阵  $\mathbf{K} - \omega_k^2 \mathbf{M}$  奇异。因此不能通过式(20)求解  $\boldsymbol{\psi}_{k1}$ 。

对于非齐次方程组(20),  $\boldsymbol{\psi}_{k1}$  可以表示为齐次方程组通解与非齐次方程组特解之和,即

$$\boldsymbol{\psi}_{k1} = c_{k1} \mathbf{u}_k + \boldsymbol{\psi}_{k1T} \quad (21)$$

式中  $c_{k1}$  为待定常数,  $\boldsymbol{\psi}_{k1T}$  为方程(20)的一个特解。本文用 Nelson [13] 方法求方程(20)的特解。

将方程(20)记为

$$\mathbf{G}_k \boldsymbol{\psi}_{k1} = \mathbf{F}_{k1} \quad (22)$$

式中

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{K} - \omega_k^2 \mathbf{M} \quad (23)$$

$$\mathbf{F}_{k1} = -i \omega_k (2\tilde{\lambda}_{k1} \mathbf{M} + \mathbf{C}) \mathbf{u}_k$$

注意,  $\boldsymbol{\psi}_{k1T}$  作为式(22)的一个特解,满足

$$\mathbf{G}_k \boldsymbol{\psi}_{k1T} = \mathbf{F}_{k1} \quad (24)$$

假设向量  $\mathbf{u}_k$  中第  $p$  个分量的绝对值最大。将式(24)中矩阵  $\mathbf{G}_k$  的第  $p$  行和第  $p$  列元素同时变为 0,而其第  $p$  行和第  $p$  列的对角元素设为 1,  $\mathbf{F}_{k1}$  的第  $p$  个分量  $\mathbf{F}_{k1,p}$  设为 0,式(24)变为

$$\begin{bmatrix} G_{k,11} & \cdots & 0 & \cdots & G_{k,1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{k,N1} & \cdots & 0 & \cdots & G_{k,NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{k1T,1} \\ \vdots \\ \Psi_{k1T,p} \\ \vdots \\ \Psi_{k1T,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k1,1} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ F_{k1,N} \end{bmatrix} \quad (25)$$

将式(25)记为

$$\mathbf{G}_k^{\text{Nelson}} \Psi_{k1T} = \mathbf{F}_{k1}^{\text{Nelson}} \quad (26)$$

此时方程(25)中系数矩阵  $\mathbf{G}_k^{\text{Nelson}}$  非奇异<sup>[13]</sup>, 由此可以通过求解方程(26)求得特解  $\Psi_{k1T}$ 。

接下来确定式(21)的常数  $c_{k1}$ 。将式(21)代入规范化条件(17)并利用方程(5)可推出

$$c_{k1} = -\mathbf{u}_k^T \mathbf{M} \Psi_{k1T} \quad (27)$$

再将方程(26)确定的  $\Psi_{k1T}$  及式(27)确定的  $c_{k1}$  代入式(21)即可得到  $\Psi_{k1}$ 。

至此, 方程(14)中阻尼系统特征值和特征向量的一阶摄动量  $\lambda_{k1}$  和  $\Psi_{k1}$  均已求得。

将  $\lambda_{k0}, \lambda_{k1}, \Psi_{k0}$  和  $\Psi_{k1}$  代入方程(15), 所需求解的未知量变为特征值和特征向量的二阶摄动量  $\lambda_{k2}$  和  $\Psi_{k2}$ 。按照上述求解  $\lambda_{k1}$  和  $\Psi_{k1}$  的方法, 易得  $\lambda_{k2}$  和  $\Psi_{k2}$ 。以此类推, 可求得各阶摄动量  $\lambda_{km}$  和  $\Psi_{km}$  ( $m=2, \dots, n$ ), 进而获得  $n$  阶摄动解(8,9)。于是, 可得复特征问题(2)的近似特征值与特征向量  $\lambda_k^{(n)}(1)$  和  $\Psi_k^{(n)}(1)$ 。需要指出, 求特解  $\Psi_{kmT}$  ( $m=1, 2, \dots, n$ ) 的控制方程的系数矩阵都是  $\mathbf{G}_k^{\text{Nelson}}$ , 因此只需对其完成一次三角分解即可, 后续方程可直接通过回代求解。

注意, 第  $k$  阶特征值的第  $m+1$  阶摄动展开  $\lambda_k^{(m+1)}(1)$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ ) 是否满足精度要求, 可通过式(28)判断, 即

$$\left| \frac{\lambda_k^{(m+1)}(1) - \lambda_k^{(m)}(1)}{\lambda_k^{(m+1)}(1)} \right| < er \quad (28)$$

式中  $er$  为给定的允许相对误差。

本文方法在求解部分实模态的基础上, 需要额外计算主要集中在运用 Nelson 法计算特解上。假定  $b$  为质量和刚度矩阵半带宽的最大值,  $L$  为所需求解系统的模态阶数。对于一个  $N$  自由度线性黏滞阻尼有限元系统, 通常  $b \ll N$ , 求解形如式(25)的方程组共需要  $N(2b^2 + 4b)L$  个浮点运算<sup>[14]</sup>。

由式(8,9)可以获得非比例阻尼结构的第  $k$  阶复频率和复模态。利用共轭特性获得共轭复频率与复模态。由于实际结构一般只要不多的低阶模态信息就能很好地描述结构振动状况, 因此, 上述  $L$  取值可以远小于  $N$ 。同时由于只求  $1/2$  的复模态, 上述求解规模实际很小, 因而提高了计算效率。

## 4 数值算例

通过两个算例说明本文方法的有效性。本文定义第  $k$  阶特征值的  $n$  阶摄动解  $\lambda_k^{(n)}(1)$  的相对误差  $E_k^{(n)}$  为

$$E_k^{(n)} = \frac{|\lambda_k^{(n)}(1) - \lambda_k|}{|\lambda_k|} \times 100\% \quad (29)$$

式中  $\lambda_k$  为由方程(1)求得的特征值。对第  $k$  阶特征向量的  $n$  阶摄动解  $\Psi_k^{(n)}(1)$  的精度, 本文采用模态置信度 MAC<sup>[15]</sup> 来衡量, 其定义如下

$$\text{MAC}_k^{(n)} = \frac{|[\Psi_k^{(n)}(1)]^H \Psi_k|^2}{[\Psi_k^{(n)}(1)]^H \Psi_k^{(n)}(1) (\Psi_k)^H \Psi_k} \quad (30)$$

式中  $(\cdot)^H$  表示复共轭转置,  $\Psi_k$  为满足规范化条件(6)的方程(1)的特征向量部分。MAC 的值越接近 1, 所求特征向量越逼近其精确解。

**算例 1** 现假设一个三自由度黏滞阻尼系统, 其质量、阻尼和刚度矩阵分别为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.175 & -0.175 \\ 0 & -0.175 & 0.175 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad (31)$$

对算例 1, 其无阻尼实模态固有频率列入表 1。根据状态空间法求得各阶特征值的精确解列入表 2。

表 1 三自由度系统实模态固有频率

Tab. 1 Undamped natural frequencies of three degrees of freedom system

模态 $k$	频率 $\omega_k$
1	0.62492
2	1.1547
3	1.5087

表 2 算例 1 特征值精确解

Tab. 2 Exact solution of eigenvalue for example 1

模态 $k$	$\lambda_k$
1	-1.2485e-3 ± 0.62498i
2	-1.4526e-2 ± 1.1561i
3	-4.2558e-2 ± 1.5060i

按照本文方法, 将特征值和特征向量实施 1 阶~3 阶展开, 计算出该算例的近似特征值与特征向量。这些特征值与其相对误差以及特征向量的 MAC 值列入表 3~表 5。

由表 3 可知, 随着摄动展开阶数的逐次增加,

特征值的变化呈现实部和虚部的交替修正。

表 3 用本文方法计算的特征值  
Tab. 3 Eigenvalues calculated using the method proposed in this paper

模态 $k$	$\lambda_k^{(1)}(1)$	$\lambda_k^{(2)}(1)$	$\lambda_k^{(3)}(1)$
1	$-1.2511e-3 \pm 0.62492i$	$-1.2511e-3 \pm 0.62498i$	$-1.2485e-3 \pm 0.62498i$
2	$-1.4583e-2 \pm 1.1547i$	$-1.4583e-2 \pm 1.1561i$	$-1.4528e-2 \pm 1.1561i$
3	$-4.2499e-2 \pm 1.5087i$	$-4.2499e-2 \pm 1.5060i$	$-4.2557e-2 \pm 1.5060i$

表 4 用本文方法计算的特征值相对误差(单位:%)  
Tab. 4 Relative errors of eigenvalues calculated using the method proposed in this paper (unit:%)

模态 $k$	$E_k^{(1)}$	$E_k^{(2)}$	$E_k^{(3)}$
1	$9.3011e-3$	$4.0227e-4$	$1.5938e-5$
2	$1.2009e-1$	$4.9521e-3$	$5.2459e-4$
3	$1.7750e-1$	$3.9691e-3$	$4.3149e-4$

表 5 用本文方法计算的特征向量 MAC 值  
Tab. 5 MAC values of eigenvectors calculated using the method proposed in this paper

模态 $k$	$MAC_k^{(1)}$	$MAC_k^{(2)}$	$MAC_k^{(3)}$
1	1.00000	1.0000	1.0000
2	0.99999	1.0000	1.0000
3	0.99998	1.0000	1.0000

由表 4 和表 5 可知,与文献[8]相比,除第 3 个特征值的 1 阶摄动解外,本文方法给出的三个特征值与特征向量的各阶摄动解中,特征值的相对误差及特征向量的 MAC 值都优于文献[8]中方法给出的结果。此外,随着摄动展开阶数的增加,特征值与特征向量趋于精确解。

这些结果说明,用本文方法求得特征值以及特征向量都具有高精度。

**算例 2** 添加斜置阻尼器的三层框架结构如图 1 所示。该结构由 27 个梁单元组成,共计 26 个节点。其中 1 节点和 18 节点完全固定。在每层斜对角线添加阻尼系数为  $c = 10^5 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}$  的阻尼器。材料使用结构钢,具体参数为单元长度  $l = 1 \text{ m}$ ;弹性模量  $E = 200 \text{ GPa}$ ;密度  $\rho = 7850 \text{ kg}/\text{m}^3$ ;纵梁截面为  $0.5 \text{ m} \times 0.5 \text{ m}$  的正方形,横梁截面为  $0.2 \text{ m} \times 0.2 \text{ m}$  的正方形。图 1 中圆圈数字为节点编号,方格数字为单元编号。

算例 2 前 5 个实模态固有频率列入表 6。利用状态空间法得到的前 5 阶阻尼系统的精确特征值列入表 7。按照本文方法,将前 5 个特征值和特

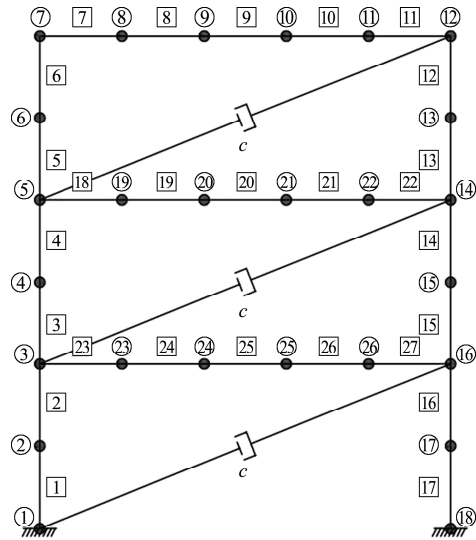


图 1 添加斜置阻尼器的三层框架  
Fig. 1 Three story frame with tilt dampers

征向量实施 1 阶~3 阶展开,计算出该算例的近似特征值与特征向量。这些特征值与其相对误差以及特征向量的 MAC 值列入表 8~表 10。

表 6 三层框架前 5 个实模态固有频率(单位:rad/s)  
Tab. 6 First 5 undamped natural frequencies of three story frame(unit:rad/s)

模态 $k$	频率 $\omega_k$	模态 $k$	频率 $\omega_k$
1	67.842	4	265.76
2	262.29	5	367.63
3	264.97		

表 7 添加斜置阻尼器三层框架前 5 个特征值的精确解

Tab. 7 Exact solution for the first 5 eigenvalues of three story frame with tilt dampers

模态 $k$	$\lambda_k$	模态 $k$	$\lambda_k$
1	$-1.9442 \pm 67.828i$	4	$-1.6304e-3 \pm 265.76i$
2	$-1.7555e-3 \pm 262.29i$	5	$-10.904 \pm 367.57i$
3	$-2.0069e-3 \pm 264.97i$		

表 8 用本文方法计算的前 5 个特征值  
Tab. 8 First 5 eigenvalues calculated using the method proposed in this paper

模态 $k$	$\lambda_k^{(1)}(1)$	$\lambda_k^{(2)}(1)$	$\lambda_k^{(3)}(1)$
1	$-1.9436 \pm 67.842i$	$-1.9436 \pm 67.828i$	$-1.9442 \pm 67.828i$
2	$-1.7557e-3 \pm 262.29i$	$-1.7557e-3 \pm 262.29i$	$-1.7555e-3 \pm 262.29i$
3	$-2.0107e-3 \pm 264.97i$	$-2.0107e-3 \pm 264.97i$	$-2.0069e-3 \pm 264.97i$
4	$-1.6360e-3 \pm 265.76i$	$-1.6360e-3 \pm 265.76i$	$-1.6303e-3 \pm 265.76i$
5	$-10.896 \pm 367.63i$	$-10.896 \pm 367.57i$	$-10.904 \pm 367.57i$

表 9 用本文方法计算的前 5 个特征值相对误差  
(单位: %)

Tab.9 Relative errors of the first 5 eigenvalues  
calculated using the method proposed in  
this paper (unit: %)

模态 $k$	$E_k^{(1)}$	$E_k^{(2)}$	$E_k^{(3)}$
1	2.1117e-2	9.4465e-4	1.2044e-5
2	5.6082e-6	7.3885e-8	1.6390e-9
3	1.6946e-5	1.4502e-6	1.3454e-7
4	2.2217e-5	2.1246e-6	1.9763e-7
5	1.6282e-2	2.2827e-3	2.8754e-5

表 10 用本文方法计算的前 5 个特征向量 MAC 值  
Tab.10 MAC values of the first 5 eigenvectors  
calculated using the method proposed in this paper

模态 $k$	$MAC_k^{(1)}$	$MAC_k^{(2)}$	$MAC_k^{(3)}$
1	1.0000	1.0000	1.0000
2	1.0000	1.0000	1.0000
3	1.0000	1.0000	1.0000
4	1.0000	1.0000	1.0000
5	1.0000	1.0000	1.0000

## 5 结 论

首先引入一个嵌入参数<sup>[11]</sup>将无阻尼系统与非比例阻尼系统联系在一起,然后构造复模态规范化条件。本文应用摄动展开技术得到了一系列控制展开系数的线性方程组。结论如下。

(1) 提出的方法仅依赖于无阻尼实模态,无需扩维。

(2) 提出的方法仅涉及感兴趣的模态,无模态截断问题。

(3) 特征向量各阶展开系数的确定仅需求解具有同一个对称实系数矩阵的方程。这些方程可用 Nelson 方法求解。

(4) 数值算例表明,本文方法求得的特征值与特征向量精度高。

## 参考文献(References):

- [1] Hračov S, Náprstek J. Approximate complex eigensolution of proportionally damped linear systems supplemented with a passive damper [J]. *Procedia Engineering*, 2017, **199**:1677-1682.
- [2] Foss K A. Coordinates which uncouple the equations of motion of damped linear dynamic systems [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1958, **25**(3):361-364.
- [3] Tang J, Wang W L. Perturbation method for determining eigensolutions of weakly damped systems [J].

*Journal of Sound and Vibration*, 1995, **187**(4):671-681.

- [4] Cha P D. Approximate eigensolutions for arbitrarily damped nearly proportional systems [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, **288**(4-5):813-827.
- [5] 楼梦麟,范么清. 求解非比例阻尼体系复模态的实模态摄动法[J]. *力学学报*, 2007, **39**(1):112-118. (LOU Meng-lin, FAN Me-qing. Modal perturbation method for obtaining complex modal characteristics of non-proportional damping systems [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2007, **39**(1):112-118. (In Chinese))
- [6] Ma F, Morzfeld M, Imam A. The decoupling of damped linear systems in free or forced vibration [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2010, **329**(15):3182-3202.
- [7] Adhikari S. An iterative approach for nonproportionally damped systems [J]. *Mechanics Research Communications*, 2011, **38**(3):226-230.
- [8] Hu Y J, Li L. Complex modal analysis using undamped modes [A]. The 5<sup>th</sup> International Conference on Computational Methods [C]. 2014.
- [9] Sinha A. Computing eigenvalues, eigenvectors and frequency responses of structures with non-proportional damping [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2020, **489**:115681.
- [10] 付相球,潘旦光. 基于实模态的非比例阻尼体系复模态叠加法 [J]. *振动工程学报*, 2021, **34**(6):1142-1150. (FU Xiang-qiu, PAN Dan-guang. Complex mode superposition method of non-proportional damping system based on real modes [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2021, **34**(6):1142-1150. (in Chinese))
- [11] Lázaro M. Eigensolutions of non-proportionally damped systems based on continuous damping sensitivity [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, **363**:532-544.
- [12] 陈塑寰. 结构动态设计的矩阵摄动理论 [M]. 北京: 科学出版社, 1999. (CHEN Su-huan. *Matrix Perturbation Theory of Structural Dynamic Design* [M]. Beijing: Science press, 1999. (In Chinese))
- [13] Nelson R B. Simplified calculation of eigenvector derivatives [J]. *AIAA Journal*, 1976, **14**(9):1201-1205.
- [14] Golub G H, Van Loan C F. *Matrix Computations* [M]. Johns Hopkins University Press, 1996.
- [15] Allemang R J. The modal assurance criterion—Twenty years of use and abuse [J]. *Sound and Vibration*, 2003, **37**(8):14-21.

(下转第 800 页)

## Thermal-mechanical coupling damage behavior of material based on peridynamics

SHAO Bin, JIANG Cui-xiang\*, ZENG Jin-bao

(College of Science, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China)

**Abstract:** In order to study the damage behavior of materials under thermal loading, a two-parameter bond-based peridynamics thermal-mechanical coupling model is proposed and the fracture criterion of the bond is given in this paper. This model includes the relationship of the bond's tangential deformation with the temperature. Compared with the bond-based peridynamics thermal-mechanical coupling model, the materials without a fixed Poisson's ratio are considered in this model, so that this model can be applied to study the effects of Poisson's ratio on damage behavior of materials under thermal loading. The damage behavior simulation of a ceramic plate under thermal shock loading is carried out, which shows that the crack initiation and propagation patterns obtained by this model are in agreement with the experimental results. Further researches on the influence of Poisson's ratio on material damage behavior show that, increasing Poisson's ratio results in earlier initiation of cracks, growth of the crack spacing and increase of the leading crack length, which indicates that the Poisson's ratio significantly influences the material damage behavior under thermal loading.

**Key words:** bond-based peridynamics; thermal-mechanical coupling; Poisson's ratio; ceramic; crack

~~~~~  
(上接第 794 页)

## Calculation of complex modes of non-proportionally damped systems using real modes

WEI Xiang-tian, WU Bai-sheng\*, ZHONG Hui-xiang

(School of Electro-Mechanical Engineering, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China)

**Abstract:** In this paper, a new method for calculating complex modes of non-proportionally damped systems using real modes is proposed. First, an embedded parameter is introduced to directly connect the undamped system with the damped system, and then the modal normalization condition is constructed. The eigenvalues and eigenvectors of the non-proportionally damped system are expanded as the power series of this parameter to obtain the governing equations of the expansion coefficients. The eigenvector expansion coefficients can be determined by solving systems of equations with the same symmetric real-coefficient matrix by Nelson's method for each eigenpair. The proposed approach involves only the modes of interest, no modal truncation, but no generalized inversion, and no matrix expansion. Two numerical examples are given to illustrate the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** non-proportional damping; complex mode; perturbation expansion; mode normalization; Nelson's method