

DOI: 10.7511/jslx20221228001

基于 Walsh 级数法层合梁自由振动分析

郭诗白, 胡平*, 黎胜

(大连理工大学 力学与航空航天学院, 大连 116024)

摘要:本文提出了一种基于 Walsh 级数离散化方法 (WSM) 的频率求解方法, 对具有一般边界条件的层合梁进行了自由振动分析。采用考虑剪切效应和转动惯量的一阶剪切变形理论建立了层合梁理论模型, 采用边界权重参数等效一般边界条件。以 Walsh 级数作为基函数离散位移最高阶导数再进行积分, 由边界条件确定这一过程中产生的积分常数。将离散后的位移与转角代入控制方程转化为单变量线性方程。在此基础上, 通过求解线性代数方程, 可以得到复合材料层合梁的频率。对照现有文献计算结果, 得到 WSM 法具有较好的收敛性和精度的结论。

关键词: Walsh 级数法; 自由振动; 纤维层合梁

中图分类号: O302

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2024)04-0775-06

1 引言

随着技术的发展, 传统材料已不能完全满足工程应用的需求。基于这一背景, 纤维层合结构在工程领域得到广泛应用。层合梁作为基本结构经常在复杂工况下承受动载荷和剧烈振动, 这可能会导致层间基体剥离造成结构失效, 因此对层合梁的振动进行研究是有必要的。

近年来, 学者们对层合梁的振动问题进行了大量研究^[1]。瞿叶高等^[2]基于改进的变分原理和区域分解法给出了高层合梁理论的统一求解公式。靳国永等^[3]采用改进的 Ritz 法给出了一般边界条件下层合梁、板和旋转壳振动问题的精确解。该方法引入了一项辅助函数, 以消除标准 Fourier-Ritz 法位移函数及导数在边界附近可能产生的不连续。王青山等^[4]采用改进的 Fourier-Ritz 法分析了轴向承压的层合梁自由振动问题。赵长龙等^[5]采用 Haar 小波离散法和边界权重参数计算了弹性边界条件下层合梁的频率, 并讨论了边界刚度对层合梁振动的影响。贺丹等^[6]基于混合变分原理和锯齿理论建立了一种高精度的层合梁模型。Kim 等^[7]将人工弹簧技术推广为连接界面建立了含横向裂纹层合梁模型, 并用 Jacobi-Ritz 法求解了含有开

裂的层合梁动力学特性。黄欣等^[8]在现有梁理论的基础上, 额外考虑了扭转相关的翘曲变形, 重新推导了单向复合材料梁的运动方程。

WSM 法是一种近年来新提出的方法, 方法的核心是以 Walsh 级数为基函数直接逼近系统控制方程中的位移函数及相关导数, 将偏微分方程转化为线性代数方程以求解。WSM 法具有计算速度快和精度高等优点; 同时该方法是强解方法, 有更好的数值稳定性。目前基于 WSM 法的动力学研究主要集中在旋转壳方面, Fan 等^[9]应用 WSM 法计算了功能梯度圆柱壳的自由振动频率, 郭诗白等^[10,11]采用 WSM 法分析了一般边界条件下层合圆锥壳和球壳的动力学特性, 在分析复合材料梁自由振动问题方面 WSM 法目前还尚无应用。为此, 本文将基于 WSM 法和一阶剪切变形理论, 建立一种可以快速稳定预测层合梁频率的分析模型。通过与现有文献的数值算例结果对比, 验证方法的收敛性和计算精度。

2 纤维层合梁模型

纤维层合梁的几何模型及边界条件如图 1 所示。梁长度为 L , 厚度为 h , 铺层层数为 n 。定义中性面处 $z=0$, z 轴负方向距离中面最远处铺层为

收稿日期: 2022-12-28; 修改稿收到日期: 2023-05-16.

作者简介: 胡平* (1956-), 男, 教授 (E-mail: pinghu@dlut.edu.cn).

引用本文: 郭诗白, 胡平, 黎胜. 基于 Walsh 级数法层合梁自由振动分析[J]. 计算力学学报, 2024, 41(4): 775-780.

GUO Shi-bai, HU Ping, LI Sheng. Free vibration analysis of laminated beam with WSM[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2024, 41(4): 775-780.

第1层。 z_k 和 z_{k+1} 分别为第 k 层下表面和上表面的 z 轴坐标。 θ^k 为第 k 层纤维铺层方向。 $k_{u,0}$, $k_{w,0}$, $k_{\varphi,0}$ 和 $k_{u,L}$, $k_{w,L}$, $k_{\varphi,L}$ 为边界等效弹簧刚度, 根据不同的弹簧刚度取值, 可模拟一般边界条件。

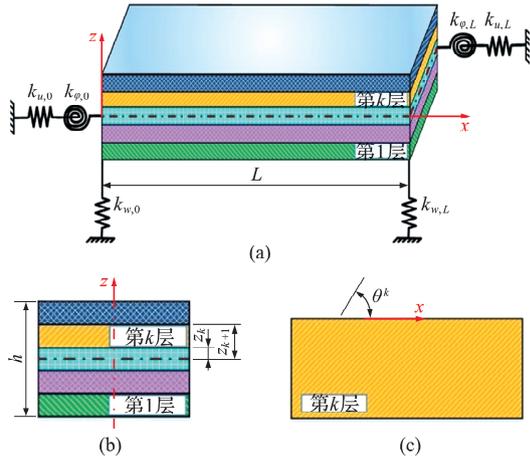


图1 纤维层合梁几何参数及边界条件
Fig.1 Geometric parameters and boundary conditions of laminated beam

基于一阶剪切变形理论, 纤维层合梁的位移场可以表示为

$$\begin{aligned} U(x, z, t) &= u(x, t) + z \cdot \varphi(x, t) \\ W(x, z, t) &= w(x, t) \end{aligned} \quad (1)$$

式中 U 和 W 为梁任意点在 x 与 z 方向上的位移, u 和 w 为梁中面在 x 与 z 方向上的位移分量, φ 为法线转角。梁中面应变-位移关系可表示为

$$\epsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \Psi_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \gamma_{xz}^0 = \varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2)$$

式中 ϵ_x^0 和 γ_{xz}^0 为层合梁中面膜应变, Ψ_x 为中面曲率变化。根据广义胡克定律, 梁的第 k 层应力应变关系为

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^k \\ \tau_{xz}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^k & 0 \\ 0 & Q_{55}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^k \\ \gamma_{xz}^k \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中 Q_{11}^k 和 Q_{55}^k 为第 k 层弹性系数

$$Q_{11}^k = \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \cos^4 \theta^k, \quad Q_{55}^k = G_{13} \cos^2 \theta^k \quad (4)$$

式中 E_1 为纤维主方向弹性模量, G_{13} 为剪切模量, μ_{12} 和 μ_{21} 为泊松比。层合梁的本构方程为

$$\begin{bmatrix} N_x \\ M_x \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & 0 \\ B_{11} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \Psi_x \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中 κ 为剪切修正因子, 本文取 $\kappa = 5/6$ 。 N_x 为面内合力, M_x 为合力矩, Q_x 为横向剪合力, A_{ij} , B_{ij} 和 D_{ij} 分别为拉伸刚度、耦合刚度和弯曲刚度, 表达式如下

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n Q_{ij} (z_{k+1} - z_k) \quad (i, j = 1, 5)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n Q_{ij} (z_{k+1}^2 - z_k^2) \quad (i, j = 1) \quad (6)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n Q_{ij} (z_{k+1}^3 - z_k^3) \quad (i, j = 1)$$

层合梁的控制方程和边界条件可通过哈密顿原理求出, 即

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta(T - U_V - U_b) = 0 \quad (7)$$

式中 T 为结构动能, U_V 为结构势能, U_b 为边界弹性势能

$$T = \frac{1}{2} \int_L \{ I_0 [(\dot{u})^2 + (\dot{w})^2] + 2I_1 \dot{u} \dot{\varphi} + I_2 \dot{\varphi}^2 \} dx$$

$$U_V = \frac{1}{2} \int_L (N_x \epsilon_x^0 + M_x \Psi_x + Q_x \gamma_{xz}^0) dx$$

$$U_b = \frac{1}{2} (k_{u,0} u^2 + k_{w,0} w^2 + k_{\varphi,0} \varphi^2)_{x=0} +$$

$$\frac{1}{2} (k_{u,L} u^2 + k_{w,L} w^2 + k_{\varphi,L} \varphi^2)_{x=L} \quad (8)$$

式中 \dot{u} , \dot{w} 和 $\dot{\varphi}$ 的上标表示位移对时间的一阶导数。 I_0 , I_1 和 I_2 为惯性矩, 即

$$(I_0, I_1, I_2) = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \rho_k (1, z, z^2) dz \quad (9)$$

式中 ρ_k 为第 k 层密度。将式(8)代入式(7)进行分部积分即可得到结构的控制方程与边界条件。

控制方程

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (10)$$

边界条件

$$\begin{cases} x=0: \begin{cases} N_x - k_{u,0} u = 0 \\ Q_x - k_{w,0} w = 0 \\ M_x - k_{\varphi,0} \varphi = 0 \end{cases} \\ x=L: \begin{cases} N_x + k_{u,L} u = 0 \\ Q_x + k_{w,L} w = 0 \\ M_x + k_{\varphi,L} \varphi = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (11)$$

3 WSM 法原理及应用

本节首先简述 WSM 法的基本原理。Walsh 级数^[12]由一组定义在 $[0, 1]$ 区间的完全正交矩形波函数组成, 函数值只有 ± 1 。图 2 给出了前 8 阶 Walsh 函数图像。

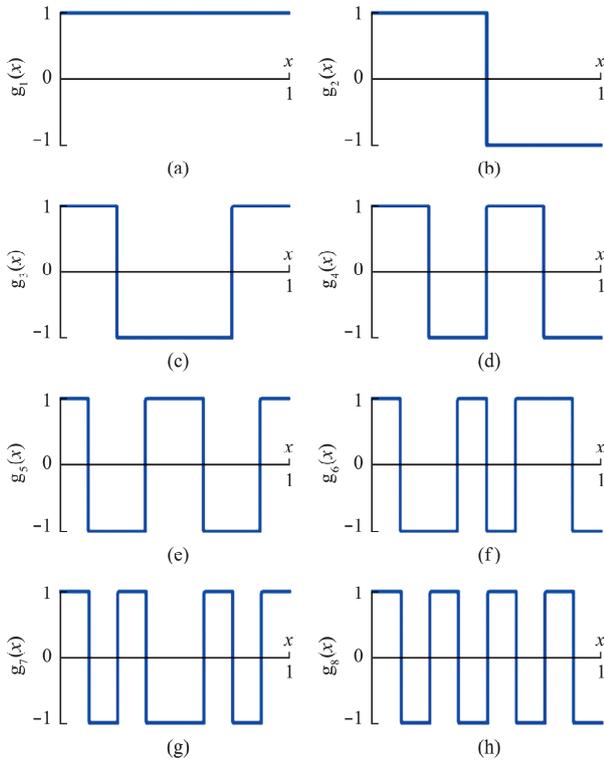


图2 前八阶Walsh函数
Fig. 2 First 8th Walsh series

对于在 $[0, 1]$ 区间绝对可积函数 $y(x)$ 可展开成Walsh级数形式

$$y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i g_i(x) \quad (12)$$

式中 α_i 为第 i 阶Walsh函数系数,可由式(13)求得

$$\alpha_i = \int_0^1 y(x) g_i(x) dx \quad (13)$$

受限于计算机性能,在实际计算中,级数需截断前 $N(N=2^P, P$ 为截断指数)项

$$y(x) \cong \sum_{i=1}^N \alpha_i g_i(x) = \mathbf{A}_y^T \mathbf{\Pi}(x) \quad (14)$$

式中 \mathbf{A}_y 为系数向量, $\mathbf{\Pi}(x)$ 为Walsh函数向量

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_y &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)^T \\ \mathbf{\Pi}(x) &= (g_1(x), g_2(x), \dots, g_N(x))^T \end{aligned} \quad (15)$$

考虑到Walsh函数是矩形波函数不可导,因此应用Walsh级数求解含有导数的数学物理方程需要定义积分向量 \mathbf{h}_n

$$\int_0^x g_n(s) ds = \mathbf{h}_n \mathbf{\Pi}(x) \quad (16)$$

将在区间 $[0, 1]$ 的积分上限函数 $\int_0^x g_n(s) ds$ 展开成Walsh级数形式。向量 \mathbf{h}_n 中元素为展开后的Walsh级数系数。将积分向量按序排列可得积分矩阵 $\mathbf{A} = (\mathbf{h}_1^T, \mathbf{h}_2^T, \dots, \mathbf{h}_N^T)^T$ 。式(17)给出了前 8×8 阶积分矩阵。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{16} & \dots \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{16} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{16} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (17)$$

计算中积分矩阵截断 $N \times N$ 项。向量 $\mathbf{\Pi}(x)$ 的积分可近似为

$$\int_0^x \mathbf{\Pi}(t) dt \cong \mathbf{A} \mathbf{\Pi}(x) \quad (18)$$

定义 $f(x)$ 为 $y(x)$ 的函数积分,则 $f(x)$ 的Walsh级数形式可表示为

$$f(x) \cong \sum_{i=1}^N \beta_i g_i(x) = \mathbf{A}_f^T \mathbf{\Pi}(x) \quad (19)$$

式中 $\mathbf{A}_f = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)^T$ 为函数 $f(x)$ 的系数向量。通过联立式(14, 19)可确定Walsh离散后原函数 $y(x)$ 及积分函数 $f(x)$ 的系数关系,即

$$\mathbf{A}_f^T = \mathbf{A}_y^T \mathbf{A} \quad (20)$$

此外,应用WSM法求解有限域问题需要将位移域转化为单位域 $[0, 1]$,因此需要进行变量替换

$$\xi = x/L \quad (21)$$

相应的积分变量变为

$$\begin{aligned} x &= L\xi, \quad u(x) = u(\xi) \\ dx &= L d\xi, \quad \frac{du(x)}{dx} = \frac{1}{L} \frac{du(\xi)}{d\xi} \\ dx^2 &= L^2 d\xi^2, \quad \frac{du^2}{dx^2} = \frac{1}{L^2} \frac{du^2(\xi)}{d\xi^2} \end{aligned} \quad (22)$$

在了解WSM法原理后,下面准备计算工作。式(10)中,位移 u, w 和转角 φ 的最高阶导数为二阶,因此可将位移与转角的二阶导数以Walsh级数展开并进行积分

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\xi^2} u(\xi) &= (\mathbf{A}^T + \mathbf{A}_0^T \mathbf{F}_0) \mathbf{\Pi}(\xi) \\ \frac{d}{d\xi} u(\xi) &= L(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{A}_0^T \mathbf{F}_1) \mathbf{\Pi}(\xi) \\ u(\xi) &= L^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}_0^T \mathbf{F}_2) \mathbf{\Pi}(\xi) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\xi^2}w(\xi) &= (\mathbf{B}^T + \mathbf{B}_0^T \mathbf{F}_0) \mathbf{\Pi}(\xi) \\ \frac{d}{d\xi}w(\xi) &= L(\mathbf{B}^T \mathbf{A} + \mathbf{B}_0^T \mathbf{F}_1) \mathbf{\Pi}(\xi) \\ w(\xi) &= L^2(\mathbf{B}^T \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}_0^T \mathbf{F}_2) \mathbf{\Pi}(\xi) \\ \frac{d^2}{d\xi^2}\varphi(\xi) &= (\mathbf{C}^T + \mathbf{C}_0^T \mathbf{F}_0) \mathbf{\Pi}(\xi) \\ \frac{d}{d\xi}\varphi(\xi) &= L(\mathbf{C}^T \mathbf{A} + \mathbf{C}_0^T \mathbf{F}_1) \mathbf{\Pi}(\xi) \\ \varphi(\xi) &= L^2(\mathbf{C}^T \mathbf{A}^2 + \mathbf{C}_0^T \mathbf{F}_2) \mathbf{\Pi}(\xi) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (a_1, a_2, \dots, a_N)^T, \mathbf{A}_0 = \left(\frac{du(0)}{d\xi}, u(0) \right)^T \\ \mathbf{B} &= (b_1, b_2, \dots, b_N)^T, \mathbf{B}_0 = \left(\frac{dw(0)}{d\xi}, w(0) \right)^T \\ \mathbf{C} &= (c_1, c_2, \dots, c_N)^T, \mathbf{C}_0 = \left(\frac{d\varphi(0)}{d\xi}, \varphi(0) \right)^T \\ \mathbf{F}_0 &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{\Upsilon}^T \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{\Upsilon}^T \mathbf{A} \\ \mathbf{\Upsilon}^T \end{pmatrix} \\ \mathbf{\Upsilon}_{N \times 1} &= (1, 0, \dots, 0)^T \end{aligned} \quad (25)$$

式中 \mathbf{A}, \mathbf{B} 和 \mathbf{C} 为系数向量, $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0$ 和 \mathbf{C}_0 为与边界条件相关的积分常数, $\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1$ 和 \mathbf{F}_2 为常数矩阵, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (a_1, a_2, \dots, a_N)^T, \mathbf{A}_0 = \left(\frac{du(0)}{d\xi}, u(0) \right)^T \\ \mathbf{B} &= (b_1, b_2, \dots, b_N)^T, \mathbf{B}_0 = \left(\frac{dw(0)}{d\xi}, w(0) \right)^T \\ \mathbf{C} &= (c_1, c_2, \dots, c_N)^T, \mathbf{C}_0 = \left(\frac{d\varphi(0)}{d\xi}, \varphi(0) \right)^T \\ \mathbf{F}_0 &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{\Upsilon}^T \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{\Upsilon}^T \mathbf{A} \\ \mathbf{\Upsilon}^T \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{\Upsilon}_{N \times 1} = (1, 0, \dots, 0)^T \quad (26)$$

至此, WSM 法求解的准备工作的完成, 控制方程中的位移及导数都转化为 Walsh 级数形式, 接下来只需将式(23~25)代入控制方程(10)与边界条件(11), 整理即可得到离散后的控制方程

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (27)$$

式中 \mathbf{K} 为系统的刚度阵, \mathbf{M} 为系统的质量阵, ω 为角频率, $\mathbf{X} = (\mathbf{A}^T, \mathbf{B}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{A}_0^T, \mathbf{B}_0^T \text{ 和 } \mathbf{C}_0^T)^T$ 为待求系数向量。至此, 层合梁的振动问题已转化为线性特征值问题。式(27)可通过 MATLAB 的 eig/eigs 命令求解。

4 数值验证与讨论

上文已给出了 WSM 法求解一般边界条件下纤维层合梁振动频率的详细过程。由于是首次应用 WSM 法求解层合梁振动问题, 因此有必要对其收敛性和准确性进行验证。首先验证 WSM 法的收敛性, 图 3 给出了 WSM 法计算出的纤维层合梁前六阶频率随截断指数 P 的变化情况。梁几何参数与材料参数为 $L = 1 \text{ m}, h = 0.1 \text{ m}, E_1 = 150 \text{ GPa}, E_2 = 10 \text{ GPa}, G_{12} = G_{13} = 5 \text{ GPa}, \mu_{12} = 0.3, \rho = 1500 \text{ kg/m}^3$, 铺层方式为 $[45^\circ / -45^\circ / 45^\circ / -45^\circ]$ 。边界条件设定为 $k_{u,0} = k_{w,0} = k_{\varphi,0} = k_{u,L} = k_{w,L} = k_{\varphi,L} = 10^{18}$ 。如图 3 所示, WSM 法具有良好的收敛性, 本文算例取 $P = 8$ 。

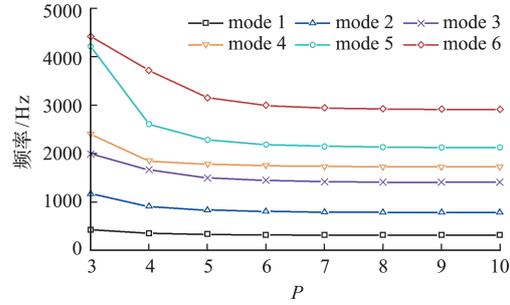


图 3 截断指数 P 对层合梁前六阶频率的影响
Fig. 3 Variation of first 6th order frequency versus truncated number P of the series

本文采用的边界条件为权参数边界, 在边界条件为固支的情况下, 需将弹簧刚度设定为无穷大, 这会导致特征值无法求解, 因此需要讨论固支边界的弹簧刚度系数。讨论方式为将左侧弹簧与右侧的两个弹簧刚度值设定为 10^{18} , 观察右侧剩余弹簧的刚度值在 $10^0 \sim 10^{18}$ 变化对层合梁前三阶频率的影响情况。算例的几何参数、材料参数和铺层方式同图 3, 计算结果如图 4 所示。

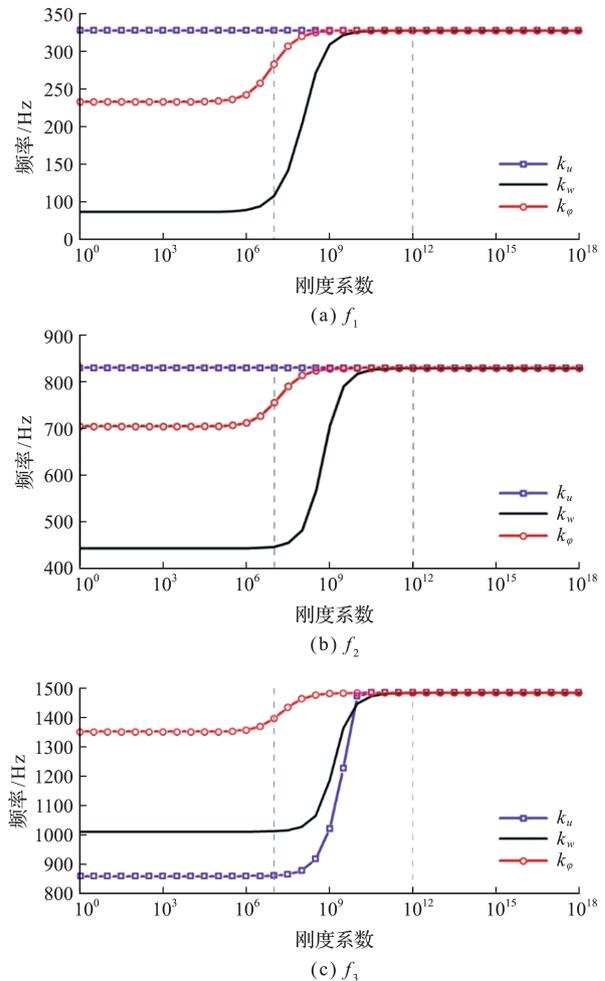


图 4 边界刚度参数对层合梁前三阶频率的影响情况
Fig. 4 Variation of first third order frequency versus boundary weight parameters

可以看出,弹性边界的弹簧刚度区间为 $10^7 \sim 10^{12}$,固定边界只需将边界弹簧刚度设定为 10^{14} 。边界条件弹簧刚度值列入表 1。

表 1 边界弹簧刚度设定

Tab.1 Setting of spring stiffness value under boundary conditions

| 边界条件 | $k_{u,0}, k_{u,L}$ | $k_{w,0}, k_{w,L}$ | $k_{\varphi,0}, k_{\varphi,L}$ |
|------|--------------------|--------------------|--------------------------------|
| 固支 C | 10^{14} | 10^{14} | 10^{14} |
| 自由 F | 0 | 0 | 0 |
| 简支 S | 10^{14} | 10^{14} | 0 |
| 弹性 E | 10^8 | 10^8 | 10^8 |

在验证了方法的收敛性后,再验证方法的准确性。表 2 给出了在不同边界条件下,WSM 法与现有文献[13]计算层合梁频率的对照,材料参数为 $E_1=144.8$ GPa, $E_2=9.65$ GPa, $G_{12}=G_{13}=4.14$ GPa, $G_{23}=3.45$ GPa, $\mu_{12}=0.3$, $\rho=1389.23$ kg/m³;几何参数为 $L=0.381$ m, $h=L/15$,铺层方式 $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ 。从计算结果可以看出,本文方法与现有文献误差不超过 0.2%,说明 WSM 法计算层合梁频率是准确的。

表 2 不同边界条件下层合梁前五阶频率

Tab.2 Comparison of the natural first 5th order frequencies for laminated composite beam

| 边界 | Mode | Ref. [13] | WSM | Error/% |
|-----|------|-----------|---------|---------|
| C-C | 1 | 1054.47 | 1056.24 | 0.17 |
| | 2 | 2509.28 | 2513.06 | 0.15 |
| | 3 | 4281.58 | 4287.56 | 0.14 |
| | 4 | 6215.89 | 6224.04 | 0.13 |
| | 5 | 8242.21 | 8250.42 | 0.10 |
| C-F | 1 | 191.833 | 192.201 | 0.19 |
| | 2 | 1088.53 | 1090.44 | 0.18 |
| | 3 | 2693.85 | 2698.15 | 0.16 |
| | 4 | 4598.16 | 4604.82 | 0.14 |
| | 5 | 4905.04 | 4910.02 | 0.10 |
| F-F | 1 | 1177.81 | 1179.99 | 0.19 |
| | 2 | 2901.44 | 2906.34 | 0.17 |
| | 3 | 4976.09 | 4983.70 | 0.15 |
| | 4 | 7170.36 | 7180.01 | 0.13 |
| | 5 | 9329.19 | 9337.03 | 0.08 |
| S-S | 1 | 558.969 | 560.019 | 0.19 |
| | 2 | 1907.74 | 1911.03 | 0.17 |
| | 3 | 3787.24 | 3793.15 | 0.16 |
| | 4 | 5824.92 | 5833.23 | 0.14 |
| | 5 | 7982.47 | 7991.21 | 0.11 |
| S-C | 1 | 784.975 | 786.37 | 0.17 |
| | 2 | 2223.93 | 2227.51 | 0.16 |
| | 3 | 4038.60 | 4044.55 | 0.15 |
| | 4 | 6031.60 | 6039.83 | 0.14 |
| | 5 | 8106.91 | 8115.38 | 0.10 |

5 结 论

本文采用 WSM 法求解了复合材料梁的自由振动问题。基于一阶剪切变形理论建立层合梁模型,采用参数化弹簧等效一般边界条件,利用哈密顿原理推导结构的控制微分方程。随后以 Walsh 级数离散梁的位移及其导数后代入控制方程,将偏微分方程转化为线性方程求解。对比已有文献的计算结果,验证了方法的正确性和计算精度。

参考文献(References):

- [1] Sayyad A S, Ghugal Y M. Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: A critical review of literature [J]. *Composite Structures*, 2017, **171**: 486-504.
- [2] Qu Y G, Long X H, Li H G, et al. A variational formulation for dynamic analysis of composite laminated beams based on a general higher-order shear deformation theory [J]. *Composite Structures*, 2013, **102**: 175-192.
- [3] Jin G, Ye T G, Su Z. *Structural Vibration* [M]. Beijing: Science Press, 2015.
- [4] Wang Q, Shi D, Liang Q. Free vibration analysis of axially loaded laminated composite beams with general boundary conditions by using a modified Fourier-Ritz approach [J]. *Journal of Composite Materials*, 2016, **50**(15): 2111-2135.
- [5] 赵长龙, 钟 锐, 周 强, 等. 弹性约束边界条件下复合材料层合梁振动特性研究 [J]. *机械科学与技术*, 2020, **39**(6): 954-959. (ZHAO Chang-long, ZHONG Rui, ZHOU Qiang, et al. Vibration analysis of laminated composite beams with elastic boundary conditions [J]. *Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*, 2020, **39**(6): 954-959. (in Chinese))
- [6] 贺 丹, 杨万里. 基于广义变分原理和锯齿理论的高精度层合梁模型 [J]. *宇航总体技术*, 2017, **1**(2): 26-32. (HE Dan, YANG Wan-li. A high-accuracy composite laminated beam model based on generalized variational principle and zigzag theory [J]. *Astronautical Systems Engineering Technology*, 2017, **1**(2): 26-32. (in Chinese))
- [7] Kim S, Kim K, Ri M, et al. A semi-analytical method for forced vibration analysis of cracked laminated composite beam with general boundary condition [J]. *海洋工程与科学(英文)*, 2021, **6**(1): 14.
- [8] 黄 欣, 郝浩然, 郝 颖. 单向复合材料直梁的自由振动研究 [J]. *建材与装饰*, 2021, **17**(13): 62-63.

- (HUANG Xin, GAO Hao-ran, HAO Ying. Study on free vibration of unidirectional composite beam [J]. *Construction Materials & Decoration*, 2021, **17**(13): 62-63. (in Chinese))
- [9] Fan J Y, Huang J, Zhang J X, et al. The Walsh series method for free vibration analysis of functionally graded cylindrical shells [J]. *Composite Structures*, 2018, **206**:853-864.
- [10] Guo S B, Hu P, Li S. The Walsh series Discretization method for free vibration analysis of composite spherical shells based on the shear deformation theory [J]. *Composite Structures*, 2022, **288**:115408.
- [11] Guo S B, Hu P, Li S. Free vibration analysis of composite conical shells using Walsh series method [J]. *Materials Research Express*, 2021, **8**(7):075303.
- [12] Gnoffo P A. Global series solutions of nonlinear differential equations with shocks using Walsh functions [J]. *Journal of Computational physics*, 2014, **258**:650-688.
- [13] Kim K, Choe K, Kim S, et al. A modeling method for vibration analysis of cracked laminated composite beam of uniform rectangular cross-section with arbitrary boundary condition [J]. *Composite Structures*, 2019, **208**:127-140.

Free vibration analysis of laminated beam with WSM

GUO Shi-bai, HU Ping*, LI Sheng

(School of Mechanics and Aerospace Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: A Walsh series Discretization method-based (WSM) solution approach is presented to conduct free vibration analysis of a composite laminated beam with general boundary conditions in this paper. The first-order shear deformation theory considering the shear effect and rotary inertia is used to establish the theoretical model, and weightings are introduced to obtain general boundary conditions. Walsh series are chosen as the basis functions of the meridional directions of the beam, and the integration constants generated in this process are determined by the boundary conditions. By using the WSM, the complex multivariable coupled equations can be transformed into simple linear algebraic equations of a single variable. On this basis, the frequencies of the composite laminated beam can be easily obtained by solving algebraic equations. Compared with the existing literature, the numerical results show that this method has good convergence and accuracy.

Key words: Walsh series Discretization method; free vibration; laminated beam