

DOI: 10.7511/jslx20230105002

# 简支矩形薄壁箱梁受不确定移动偏载作用的 竖向振动响应研究

黄文建, 刘放\*, 杨明发, 李晨晖, 邓蓉

(西南交通大学 机械工程学院, 成都 610031)

**摘要:** 针对工程中薄壁箱梁受不确定移动偏载作用的振动问题, 给出了一种基于区间过程的求解简支矩形薄壁箱梁结构竖向振动响应边界的方法。基于修正 Timoshenko 梁理论、乌氏第二理论和箱梁畸变理论, 求得了移动偏载作用下考虑截面扭转和畸变的简支矩形薄壁箱梁受迫竖向振动解析解, 通过引入区间过程描述移动偏载的不确定性, 推导了简支矩形箱梁竖向振动响应边界的计算过程, 分析了不确定性参数的相关性和荷载速度对简支矩形薄壁箱梁竖向振动响应的的影响, 与有限元计算结果对比验证了本文方法的正确性。

**关键词:** 简支矩形薄壁箱梁; 移动偏载; 区间过程; 竖向振动; 动态响应边界

**中图分类号:** O327; TH113.1

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1007-4708(2024)04-0769-06

## 1 引言

薄壁箱梁在动荷载作用下的受力和变形属于复杂的空间问题, 在动荷载作用下梁结构的强迫振动响应是研究的重点之一。Nguyen 等<sup>[1]</sup>从 Hamilton 原理出发, 建立了基于 Timoshenko 梁的运动控制方程, 并与 Newmark 法结合计算了移动集中荷载激励下二维功能梯度 Timoshenko 梁的振动响应。Si 等<sup>[2]</sup>分析了简支箱梁在不同移动荷载作用下的动力响应差异。曹振等<sup>[3]</sup>利用修正 Timoshenko 梁的正交条件得出了梁在跨中冲击荷载作用下的剪力响应计算方法。对于动荷载为偏心荷载的情况, 箱梁的变形更加复杂。张霞等<sup>[4]</sup>建立了单车-桥面铺装动力学耦合模型, 在双车并行和偏载工况下, 分析了桥面铺装层的应力和挠度响应。

作用于箱梁的动荷载往往在时间上具有动态变化的特征, 即荷载的不确定。为了量化不确定性荷载, 常利用概率的方法来解决在不确定性激励作用下梁的振动问题, 称为随机振动分析法<sup>[5,6]</sup>。Zibdeh<sup>[7]</sup>研究了简支弹性梁在速度随时间变化的移动随机荷载作用下的随机振动问题。张琼等<sup>[8]</sup>利用

虚拟激励法将随机荷载转化为非平稳化函数, 得到了梁式结构的非平稳随机响应。

对于数据量少和样本难以获得的工程问题, 姜潮等<sup>[9]</sup>研究了概率分布参数中存在的区间混合不确定性, 解决了结构参数样本不足情况下的不确定性分析和量化问题。李金武等<sup>[10]</sup>提出了一种基于区间过程的时变可靠性分析方法来处理涉及区间变量和区间过程的问题。段民封等<sup>[11]</sup>引入区间过程模型对不确定性移动荷载进行描述, 并将基于区间过程的非随机振动方法应用于车桥耦合振动问题。

现有研究多半为确定荷载作用下梁的动力响应问题, 没有考虑荷载的随机性<sup>[1-4]</sup>; 或是利用参数的概率密度函数进行随机振动分析, 但无法摆脱实际工程问题, 难以获得样本数据的窘境<sup>[7,8]</sup>; 或是采用非概率的方法求解对心荷载下梁的纯弯曲挠度响应, 没有得到更一般的偏载梁的振动响应<sup>[10,11]</sup>。

因此, 本文提出一种求解不确定移动偏载作用下的简支矩形薄壁箱梁竖向振动响应边界的分析方法。以弹性无阻尼简支矩形薄壁箱梁为研究对象, 通过修正 Timoshenko 梁理论和乌氏第二理论

收稿日期: 2023-01-05; 修改稿收到日期: 2023-01-30.

作者简介: 刘放\* (1974-), 男, 博士, 副教授 (E-mail: liufang@swjtu.edu.cn)

引用本文: 黄文建, 刘放, 杨明发, 等. 简支矩形薄壁箱梁受不确定移动偏载作用的竖向振动响应研究 [J]. 计算力学学报, 2024, 41(4): 769-774.

HUANG Wen-jian, LIU Fang, YANG Ming-fa, et al. Study on vertical vibration response of simply supported rectangular thin-walled box girder subjected to uncertain moving eccentric load [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2024, 41(4): 769-774.

和箱梁畸变理论求得箱梁弯扭复合变形的解析解,引入区间过程模型给出确定矩形箱梁在不确定性偏载作用下的动力响应边界解析解的方法;利用算例分析荷载相关系数、偏心距相关系数和荷载移动速度对简支矩形箱梁竖向振动响应的影响。

## 2 移动偏心荷载作用于矩形薄壁箱梁的振动解析解

### 2.1 移动偏载的形式与分解

以对称的等截面简支矩形薄壁箱梁为研究对象,以矩形箱梁端部的截面形心为坐标原点建立左手坐标系, $x$ 轴沿梁长方向, $y$ 轴沿箱梁截面垂向, $z$ 轴沿箱梁截面横向,如图1所示。规定矩形箱梁的竖向挠度正方向为图1中 $y$ 轴正方向,矩形箱梁的剪力与弯矩遵循梁的正负号惯例,即剪力使该截面邻近微元段有做顺时针转动趋势时取正号,弯矩使该截面邻近微元段向下凹时取正号。

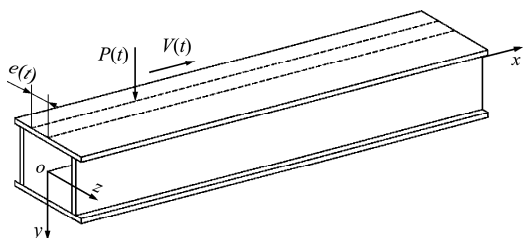


图1 移动偏载作用于箱梁  
Fig. 1 Moving eccentric load acting on box girder

利用 Dirac 函数将移动偏载表示为

$$P(x, t) = \delta(x - \int_0^t V(\tau) d\tau) P(t) \quad (1)$$

$$T(x, t) = P(x, t) \cdot e(t) \quad (2)$$

式中  $\delta(\cdot)$  为 Dirac delta 函数,  $P(t)$  为荷载大小,  $e(t)$  为荷载偏心距,  $V(t)$  为荷载移动速度。

对于受偏心荷载的矩形薄壁箱梁,通常将偏心荷载分解成对称荷载与反对称荷载,如图2所示。

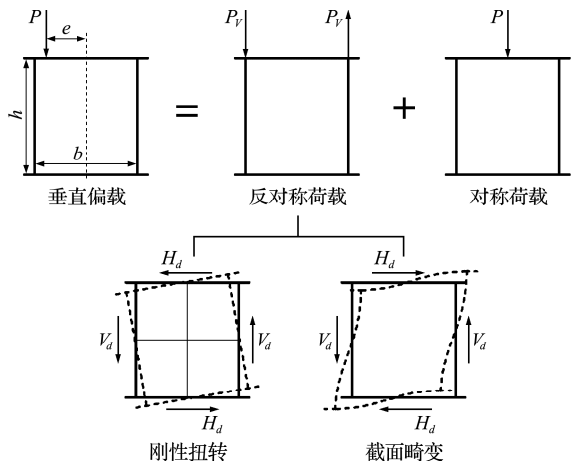


图2 垂直偏载的分解  
Fig. 2 Decomposition of vertical eccentric load

图2中各荷载之间关系为

$$P_V = \frac{P \cdot e}{b}, V_d = \frac{P_V}{2}, H_d = V_d \frac{b}{h}, T = P \cdot e \quad (3)$$

式中  $V_d$  为畸变垂直荷载,  $H_d$  为畸变水平荷载,  $T$  为刚性扭转的扭矩。

### 2.2 矩形箱梁的竖向弯曲

修正 Timoshenko 梁的基本运动方程<sup>[12]</sup>为

$$EI_z \frac{\partial^4 y_B}{\partial x^4} - (p - \rho A \frac{\partial^2 y_B}{\partial t^2}) - \rho I_z \frac{\partial^4 y_B}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{EI_z}{AG\kappa} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (p - \rho A \frac{\partial^2 y_B}{\partial t^2}) = 0 \quad (4)$$

式中  $A$  为截面面积,  $G$  为梁的剪切模量,  $p$  为分解后的对称荷载,  $\kappa$  为梁的剪切系数,  $x$  为距梁端面的距离,  $y_B$  为梁的竖向挠度,  $E$  为梁的弹性模量,  $\rho$  为梁的密度,  $I_z$  为梁截面对  $z$  轴的惯性矩,  $t$  为时间。

自由振动时,简支梁的归一化固有振型为

$$Y_n(x) = \sin_{2n} x \quad (5)$$

令梁在荷载作用下第  $n$  阶振型的挠度函数为

$$y_n(x, t) = Y_n(x) T_n(t) \quad (6)$$

式中  $Y_n(x)$  为  $n$  阶固有振型函数,  $T_n(t)$  为时间函数。

根据修正 Timoshenko 梁振型的正交条件,令  $M_n, Q_n$  和  $T_n$  分别为第  $n$  阶振型系统分布参数的广义质量、广义力和时间函数<sup>[13]</sup>,可得到简支无阻尼弹性矩形箱梁在任意对称荷载作用下其弯曲挠度  $y_B$  的时程函数为

$$y_B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Y_n(x)}{M_n \omega_n} \int_0^t \int_0^L P(x, \tau) Y_n(x) dx \sin \omega_n (t - \tau) d\tau \quad (7)$$

### 2.3 矩形薄壁箱梁的约束扭转畸变

薄壁箱梁在反对称荷载作用下,截面将发生刚性扭转和畸变。扭转角  $\theta$  的4阶偏微分方程<sup>[14]</sup>

$$\theta''''(x) - k^2 \theta''(x) = -(\mu/EJ_\omega) m(x) \quad (8)$$

式中  $k^2 = \mu G J_d / EJ_\omega$  为约束扭转的弯扭特性系数,  $\mu = 1 - J_d / J_\rho$  为截面约束系数,  $J_\omega$  为主扇性惯性矩,  $J_d$  为自由扭转惯性矩,  $J_\rho$  为方向惯性矩,  $m(x)$  为梁上的分布扭矩。

根据式(8)齐次式的初参数解<sup>[14]</sup>,应用简支梁的边界条件可得扭转角  $\theta(x, t)$  的解析解为

$$\theta(x, t) = T(x_i, t) \xi_i(x, t) \quad (9)$$

式中  $T(x_i, t)$  为  $t$  时刻作用于梁  $x_i$  处的集中扭矩,当  $0 \leq x \leq Vt$  时,  $i$  取1;当  $Vt \leq x \leq L$  时,  $i$  取2。

$$\begin{cases} \xi_1(x,t) = \frac{1}{kGJ_d} \left[ kx \left(1 - \frac{Vt}{L}\right) - \frac{\mu \operatorname{sh}[k(L-Vt)]}{\operatorname{sh}kL} \operatorname{sh}kx \right] \\ \xi_2(x,t) = \frac{1}{kGJ_d} \left[ kVt \left(1 - \frac{x}{L}\right) - \frac{\mu \operatorname{sh}[k(L-Vt)]}{\operatorname{sh}kL} \operatorname{sh}kx + \mu \operatorname{sh}[k(x-Vt)] \right] \end{cases} \quad (10)$$

反对称荷载作用于箱梁上将导致箱梁畸变变形,畸变挠度  $W$  与畸变角  $\gamma$  的关系近似认为

$$W = 0.25b \tan \gamma \quad (11)$$

箱梁的畸变微分方程<sup>[14]</sup>为

$$\gamma'''' + 4\lambda^4 \gamma = (V_d/EI_D)b \quad (12)$$

式中  $\lambda = \sqrt{EI_R/4EI_D}$ ,  $EI_D$  为箱梁畸变翘曲刚度,  $EI_R$  为箱梁横向框架刚度。

对于无限长梁 ( $\lambda L \geq 4$ ), 根据初参数法得到偏载作用箱梁跨中时截面畸变角  $\gamma(x,t)$  的解析解为

$$\gamma(x,t) = \frac{\lambda P(x,t)e^{-\lambda x}(\cos \lambda x + \sin \lambda x)}{4EI_D} \quad (13)$$

### 2.4 矩形薄壁箱梁受偏载作用的总挠度

因约束扭转与畸变效应的存在,矩形薄壁箱梁受偏载一侧的挠度会增大,如图3所示,该增大值为刚性扭转附加挠度  $y_\theta$  与畸变附加挠度  $y_\gamma$  的叠加。

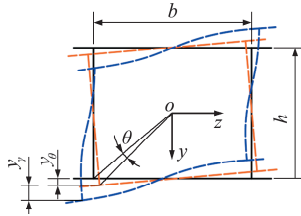


图3 箱梁附加挠度  
Fig. 3 Additional deflection of box girder

由图3几何关系及式(11)可知

$$y_\theta(x,t) = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2} \cos\left(\arctan \frac{b}{h} - \theta\right) - \frac{h}{2} \quad (14)$$

$$y_\gamma(x,t) = 0.25b \tan[\gamma(x,t)] \cos[\theta(x,t)] \quad (15)$$

故在偏载作用下,矩形薄壁箱梁偏载一侧的总挠度  $y$  为弯曲挠度  $y_B$ 、刚性扭转附加挠度  $y_\theta$  与畸变附加挠度  $y_\gamma$  的叠加结果,可表示为

$$y(x,t) = y_B(x,t) + y_\theta(x,t) + y_\gamma(x,t) \quad (16)$$

## 3 不确定移动偏载作用于矩形薄壁箱梁的竖向振动求解

### 3.1 区间过程模型

引入区间过程<sup>[15]</sup>来描述作用于矩形薄壁箱梁的移动偏载的多源不确定性。对区间过程  $X^I(t)$ , 记  $X^U(t)$  为上边界函数,  $X^L(t)$  为下边界函数, 则其中值函数  $X^m(t)$ 、半径函数  $X^r(t)$  和方差函数  $D_{X^I}(t)$  为

$$\begin{cases} X^m(t) = 0.5(X^U(t) + X^L(t)) \\ X^r(t) = 0.5(X^U(t) - X^L(t)) \\ D_{X^I}(t) = [X^r(t)]^2 \end{cases} \quad (17)$$

根据文献[15]的定义可知区间过程协方差函数的构建方法,且当  $t_i = t_j = t$  时,协方差与方差关系为

$$D_{X^I}(t) = \operatorname{Cov}_{X^I X^I}(t,t) \quad (18)$$

区间变量  $X_i$  和  $X_j$  的相关系数<sup>[16]</sup>为

$$\rho_{X_i^I X_j^I} = \operatorname{Cov}_{X_i^I X_j^I} / (X_i^r X_j^r) \quad (19)$$

### 3.2 矩形薄壁箱梁非随机振动的响应边界

令  $P^I(t)$  和  $E^I(t)$  分别为荷载大小和偏心距的平稳区间过程,根据 Dirac 函数的性质,将矩形箱梁在匀速移动偏载下的弯曲挠度表示为如下区间过程

$$y_B^I(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Y_n(x)}{M_n \omega_n} \int_0^t P^I(\tau) Y_n(V\tau) \sin \omega_n(t-\tau) d\tau \quad (20)$$

$$y_B^m(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Y_n(x)}{M_n \omega_n} \int_0^t P^m(\tau) Y_n(V\tau) \sin \omega_n(t-\tau) d\tau \quad (21)$$

根据文献[11,16]的方法,可以求得广义力、时间函数的互协方差函数和挠度自协方差函数为

$$\operatorname{Cov}_{Q_i^I Q_j^I}(t_i, t_j) = Y_i(Vt_i) \operatorname{Cov}_{P^I P^I}(t_i, t_j) Y_j(Vt_j) \quad (22)$$

$$\operatorname{Cov}_{T_i^I T_j^I}(t_i, t_j) = \frac{1}{M_i \omega_i M_j \omega_j} \int_0^{t_j} \int_0^{t_i} \sin \omega_i(t_i - \tau_1) \times \operatorname{Cov}_{Q_i^I Q_j^I}(\tau_1, \tau_2) \sin \omega_j(t_j - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (23)$$

$$\operatorname{Cov}_{y_B^I y_B^I}(x_1, x_2, t_1, t_2) = \sum_{n=1}^{+\infty} Y_n(x_1) \times \operatorname{Cov}_{T_n^I T_n^I}(t_1, t_2) Y_n(x_2) \quad (24)$$

将式(22,23)代入式(24),结合式(20)可得出简支矩形箱梁在  $t$  时刻  $x$  处的弯曲挠度响应方差为

$$D_{y_B^I}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Y_n^2(x)}{M_n^2 \omega_n^2} \int_0^t \int_0^t Y_n(V\tau_1) Y_n(V\tau_2) \times \sin \omega_n(t-\tau_1) \operatorname{Cov}_{P^I P^I}(\tau_1, \tau_2) \times \sin \omega_n(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (25)$$

简支矩形箱梁弯曲挠度的上下界函数为

$$\begin{cases} y_B^U(x,t) = y_B^m(x,t) + y_B^r(x,t) \\ y_B^L(x,t) = y_B^m(x,t) - y_B^r(x,t) \end{cases} \quad (26)$$

扭转角  $\theta(x,t)$  同时受荷载大小和偏心距的不确定性影响,根据工程经验可知  $P^I(t)$  和  $E^I(t)$  是相互独立的,即任意时刻都满足  $\operatorname{Cov}(P^I(t_i),$

$E^l(t_j) = 0$ 。简支矩形箱梁在不确定性偏心移动荷载下的扭转角响应的中值函数  $\theta^m(x, t)$  与半径函数  $\theta^r(x, t)$  为

$$\theta^m(x, t) = P^m(t)E^m(t)\xi_i(x, t) \quad (27)$$

$$\theta^r(x, t) = |\xi_i(x, t)|\sqrt{\text{Cov}_{P^l P^l} \text{Cov}_{E^l E^l}} \quad (28)$$

式中当  $0 \leq x \leq Vt$  时,  $i$  取 1; 否则,  $i$  取 2。

无限长简支矩形箱梁在不确定性偏心匀速移动荷载作用下的畸变角中值函数与半径函数为

$$\gamma^m(x, t) = \frac{\lambda P^m(t)E^m(t)}{4EI_D} e^{-\lambda x} (\cos \lambda x + \sin \lambda x) \quad (29)$$

$$\gamma^r(x, t) = \left| \frac{\lambda}{4EI_D} e^{-\lambda x} (\cos \lambda x + \sin \lambda x) \right| \times \sqrt{\text{Cov}_{P^l P^l} \text{Cov}_{E^l E^l}} \quad (30)$$

至此, 可以将式(26~30)代入式(16)求得简支矩形薄壁箱梁总挠度  $y(x, t)$  的响应边界。上述理论公式的推导及结果仅适用于简支边界条件下, 对称截面矩形薄壁箱梁的竖向振动分析。

### 4 算例分析

对一集中荷载通过无阻尼弹性简支矩形薄壁箱梁桥(以下简称箱梁)进行计算分析说明。如图4所示, 两端简支的矩形箱梁  $L=40$  m,  $h=3.1$  m,  $b_f=3.4$  m,  $t_f=0.26$  m,  $t_w=0.2$  m,  $b=2.4$  m。材料为C50混凝土,  $\rho=2500$  kg/m<sup>3</sup>,  $E=34.5$  GPa,  $\nu=0.2$ ,  $G=14.375$  GPa。

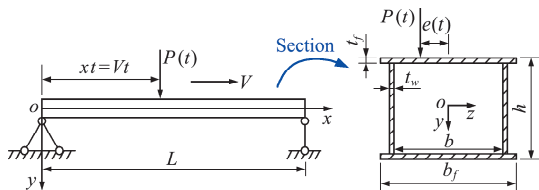


图4 工程算例  
Fig. 4 Engineering calculation example

设荷载中值函数  $P^m(t) = 8.5 \times 10^5$  N, 半径函数  $P^r(t) = 1.7 \times 10^5$  N; 偏心距中值函数  $E^m(t) = 0.8$  m, 半径函数  $E^r(t) = 0.4$  m。假定荷载大小和偏心距在时间上的自相关系数函数分别为  $\rho_1(\tau)$  和  $\rho_2(\tau)$

$$\rho_1(\tau) = e^{-\zeta_1 \Delta x(\tau)}, \rho_2(\tau) = e^{-\zeta_2 \Delta x(\tau)} \quad (31)$$

式中  $\Delta x(\tau) = V\tau/L$ ,  $\tau$  为时间间隔,  $\zeta$  越小则  $\rho(\tau)$  越大, 表明相关性越强。

本算例的矩形箱梁截面关于  $y$  轴和  $z$  轴均对称, 因此其截面形心即为扭转中心和剪切中心, 按文献[14]的方法计算出各项几何特征参数, 列入表1。

表1 箱梁截面几何特征参数

Tab. 1 Geometric characteristic parameters of box girder section

几何特征参数	本文计算数值	几何特征参数	本文计算数值
$I_z/\text{m}^4$	4.14741	$\mu$	0.14104
$\kappa$	0.41078	$k/\text{m}^{-1}$	5.55065
$J_d/\text{m}^4$	5.73617	$I_D/\text{m}^6$	0.87021
$J_p/\text{m}^4$	6.67802	$I_R/\text{m}^2$	0.00373
$J_w/\text{m}^6$	0.01094	$\lambda/\text{m}^{-1}$	0.18095

### 4.1 方法准确性验证

为验证本文方法的准确性, 使用有限元软件 ANSYS 建立简支矩形薄壁箱梁模型进行计算, 并将计算结果与本文方法计算结果进行对比。各项输入参数均一致, 计算结果对比如图5所示。

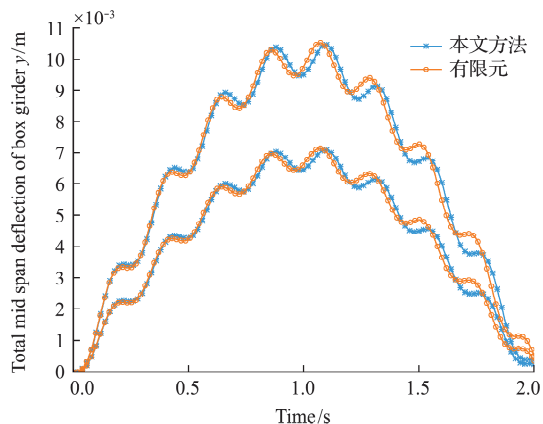


图5 箱梁跨中总挠度响应对比  
Fig. 5 Comparison of total mid span deflection of box girder

可以看出, 有限元计算结果与本文方法有较小的相位差, 挠度响应峰值最大误差为 1.21%, 两者结果基本吻合, 表明本文方法的准确性高。

### 4.2 荷载偏心距相关性对箱梁振动响应的影响

取  $V=20$  m/s,  $\zeta_1=10$ , 当  $\zeta_2$  分别为 10 和 400 时, 箱梁跨中截面扭转角的响应时程曲线如图6所示。

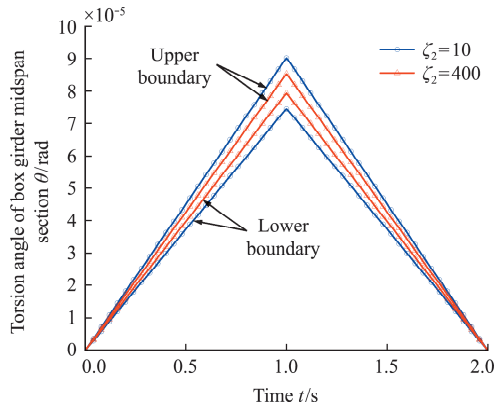


图6 箱梁跨中截面扭转角的响应边界时程曲线  
Fig. 6 Response boundary time-history curve of torsion angle of midspan section of box girder

可以看出,在偏心荷载逐渐靠近箱梁跨中的过程中(0 s~1 s),截面的扭转角单调递增;在偏心荷载逐渐远离箱梁跨中的过程中(1 s~2 s),截面的扭转角单调递减。 $\zeta_2 = 10$  时扭转角区间始终大于  $\zeta_2 = 400$  时的扭转角区间,表明  $\zeta_2$  的取值不同时,扭转角的响应边界也不同。

### 4.3 荷载大小相关性对箱梁振动响应的影响

取  $V = 20 \text{ m/s}$ ,  $\zeta_2 = 10$ ,当荷载相关系数  $\zeta_1$  分别为 10,200 和 500 时,求得箱梁跨中总挠度的响应边界时程曲线如图 8 所示。

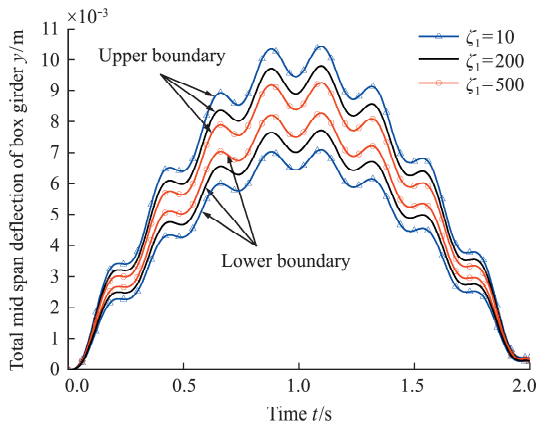


图 7 箱梁跨中挠度的响应边界时程曲线  
Fig. 7 Response boundary time-history curve of deflection at the midspan of box girder

可以看出,荷载相关系数  $\zeta_1$  的取值不同将导致箱梁跨中总挠度响应区间宽度的不同,且箱梁跨中总挠度响应区间宽度在  $\zeta_1$  取小值时要恒大于  $\zeta_1$  取大值时。其次,  $\zeta_1$  的取值不同几乎不影响挠度响应边界的时间历程曲线形状,对于  $\zeta_1 = 10$ ,  $\zeta_1 = 200$  和  $\zeta_1 = 500$  这 3 种情况,箱梁跨中总挠度的响应均在  $t = 0.88 \text{ s}$  和  $t = 1.10 \text{ s}$  时出现极大值。

### 4.4 荷载运动速度对箱梁振动响应的影响

给定  $\zeta_1 = \zeta_2 = 10$ ,  $V$  分别为 20 m/s,40 m/s 和 80 m/s 时,定义荷载通过箱梁的总时间为  $\Delta T$ ,曲线横坐标归一化为  $t/\Delta T$ ,箱梁跨中总挠度的响应边界如图 8 所示。

可以看出,箱梁承受荷载的移动速度越大,箱梁振动的频率越低,同时拥有更长的振动周期,这表明移动荷载的速度对箱梁跨中总挠度响应边界有着较大影响。其次,箱梁跨中挠度响应的边界曲线波动的幅值随移动荷载速度的增大而增大,当  $V$  从 20 m/s 增大至 40 m/s 时,挠度响应边界幅值增大了 3.2%;当  $V$  从 20 m/s 增大至 80 m/s 时,挠度响应边界幅值增大了 12.4%。

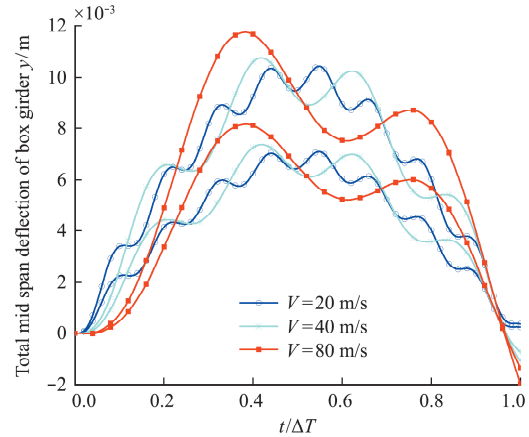


图 8 不同荷载速度下箱梁跨中总挠度响应区间  
Fig. 8 Response interval of total deflection at midspan of box girder subjected to different load-speeds

## 5 结 论

(1) 给出了一种求解简支矩形薄壁箱梁受不确定移动偏载作用的竖向振动响应边界的解析方法,与有限元计算结果对比验证了本文方法的正确性。

(2) 不确定性参数在时间上的相关性越弱,箱梁跨中挠度响应区间宽度则越小。不确定性参数时间相关性的强弱不影响挠度响应边界的曲线形状。荷载的移动速度越大,箱梁振动的频率越低,振动周期越长,箱梁跨中挠度振动响应的幅值越大。

(3) 使用区间过程模型进行简支矩形薄壁箱梁的振动分析,一定程度上减少了对大量样本数据的依赖,从而解决难以获得实验数据的工程问题。

## 参考文献(References):

[1] Nguyen D K, Nguyen Q H, Tran T T, et al. Vibration of bi-dimensional functionally graded Timoshenko beams excited by a moving load[J]. *Acta Mechanica*, 2017, **228**(1):141-155.

[2] Si C D, Su X, Chen E L, et al. Comparative study on dynamic response of deck pavement of two kinds of box girder bridges under moving loads[J]. *Shock and Vibration*, 2019, **2019**:1-13.

[3] 曹 振,马海英,周军勇,等.集中冲击荷载作用下修正 Timoshenko 梁剪力动载系数研究[J]. *振动与冲击*, 2019, **38**(3):44-50,58. (CAO Zhen, MA Hai-ying, ZHOU Jun-yong, et al. SDLF of a modified Timoshenko beam under a concentrated impact load at its mid-span[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2019, **38**(3):44-50,58. (in Chinese))

[4] 张 霞,陈恩利,李凌云.多车载荷作用下沥青桥面铺装动力学响应[J]. *振动与冲击*, 2021, **40**(11):109-115,133. (ZHANG Xia, CHEN En-li, LI Ling-yun. Dynamic response of asphalt bridge deck pavement under multi-vehicle load [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2021, **40**(11):109-115,133. (in Chinese))

- [5] Nigam N C. *Introduction to Random Vibrations*[M]. Cambridge: MIT Press, 1983.
- [6] Newland D E. An introduction to random vibration and spectral analysis [J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 1986, **108**(2): 235-236.
- [7] Zibdeh H S. Stochastic vibration of an elastic beam due to random moving loads and deterministic axial forces [J]. *Engineering Structures*, 1995, **17**(7): 530-535.
- [8] 张 琼, 杜永峰, 朱前坤. 梁式结构受移动荷载作用非平稳随机振动的 DQ-PEM 方法 [J]. *计算力学学报*, 2022, **39**(4): 413-419. (ZHANG Qiong, DU Yong-feng, ZHU Qian-kun. DQ-PEM for non-stationary random vibration analysis of beam structures under moving loads [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2022, **39**(4): 413-419. (in Chinese))
- [9] 姜 潮, 黄新萍, 韩 旭, 等. 含区间不确定性的结构时变可靠度分析方法 [J]. *机械工程学报*, 2013, **49**(10): 186-193. (JIANG Chao, HUANG Xin-ping, HAN Xu, et al. Time-dependent structural reliability analysis method with interval uncertainty [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2013, **49**(10): 186-193. (in Chinese))
- [10] 李金武, 李金洋, 姜 潮, 等. 一种基于区间过程模型的时变可靠性分析方法 [J]. *计算力学学报*, 2021, **38**(4): 462-470. (LI Jin-wu, LI Jin-yang, JIANG Chao, et al. A time-variant reliability analysis method based on interval process model [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2021, **38**(4): 462-470. (in Chinese))
- [11] 段民封, 姜 潮, 李金武, 等. 不确定性移动荷载激励下弹性简支梁的动态响应边界分析及应用 [J]. *计算力学学报*, 2020, **37**(1): 34-41. (DUAN Min-feng, JIANG Chao, LI Jin-wu, et al. The analysis of dynamic response bounds of an elastic beam subjected to an uncertain moving load and its applications [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2020, **37**(1): 34-41. (in Chinese))
- [12] 陈 镨, 万春风, 薛松涛, 等. Timoshenko 梁运动方程的修正及其影响 [J]. *同济大学学报(自然科学版)*, 2005, **33**(6): 711-715. (CHEN Rong, WAN Chun-feng, XUE Song-tao, et al. Modification of motion equation of Timoshenko beam and its effect [J]. *Journal of Tongji University (Natural Science)*, 2005, **33**(6): 711-715. (in Chinese))
- [13] 夏 呈. 修正铁摩辛柯梁受迫振动响应分析及其应用 [D]. 东南大学, 2017. (XIA Cheng. Analysis and Application of Forced Vibration Response of Modified Iron Mosinko beam [D]. Southeast University, 2017. (in Chinese))
- [14] 郭金琼, 房贞政, 郑 振. 箱形梁设计理论(2 版) [M]. 北京: 人民交通出版社, 2008. (GUO Jin-qiong, FANG Zhen-zheng, ZHENG Zhen. *Design Theory of Box Girder* (2<sup>nd</sup> Edition) [M]. Beijing: China Communications Press, 2008. (in Chinese))
- [15] Jiang C, Ni B Y, Liu N Y, et al. Interval process model and non-random vibration analysis [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, **373**: 104-131.
- [16] Jiang C, Ni B Y, Han X, et al. Non-probabilistic convex model process: A new method of time-variant uncertainty analysis and its application to structural dynamic reliability problems [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2014, **268**(1): 656-676.

## Study on vertical vibration response of simply supported rectangular thin-walled box girder subjected to uncertain moving eccentric load

HUANG Wen-jian, LIU Fang\*, YANG Ming-fa, LI Chen-hui, DENG Rong

(School of Mechanical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

**Abstract:** Aiming at solving the vibration problem of a thin-walled box girder subjected to an uncertain moving eccentric load in engineering, a method based on interval process is proposed to determine the vertical vibration response boundary of a simply supported rectangular thin-walled box girder structure. Based on the modified Timoshenko beam theory, Umanskiy's second theory and box girder deformation theory, the analytical solution of the forced vertical vibration of a simply supported rectangular thin-walled box girder considering section torsion and distortion under a moving eccentric load is obtained. The calculation process of vertical vibration response boundary of simply supported rectangular box girder is derived by introducing interval process to describe the uncertainty of moving eccentric load, and the influence of the correlation of uncertain parameters and load speed on the vertical vibration response of the simply supported rectangular thin-walled box girder is analyzed. The correctness of the method in this paper is verified by comparison with the calculation results of the finite element method.

**Key words:** simply supported rectangular thin-walled box girder; moving eccentric load; interval process; vertical vibration; dynamic response boundary