

DOI: 10.7511/jslx20221222001

含 V 型缺口分数阶黏弹性复合材料 反平面界面断裂的辛方法

徐成辉^{1,2}, 孙义国^{1,2}, 冷森^{1,2}, 邓子辰^{*1,2}

(1. 西北工业大学 力学与土木建筑学院, 西安 710129;

2. 西北工业大学 复杂系统动力学与控制工信部重点实验室, 西安 710129)

摘要: 本文提出求解含 V 型缺口的分数阶黏弹性复合材料反平面界面断裂问题的辛方法。分数阶 Kelvin-Zener 模型用于描述材料的黏弹性特征; 借助 Laplace 变换, 将时域内黏弹性反平面断裂问题的基本方程转换到频域空间; 通过引入位移的对偶变量广义应力, 建立问题的哈密顿求解体系。在该体系下, 对偶方程的本征值和本征解可以利用分离变量法求解, 本征解级数展开的系数通过本征解的辛共轭正交关系和外边界条件确定。这样将得到含缺口黏弹性复合材料反平面应力/应变强度因子的解析表达式。最后通过 Laplace 逆变换, 得到时域空间内的应力/应变强度因子。数值算例验证本文方法的准确性, 并揭示了分数阶参数、缺口角度和外载荷对应力/应变强度因子的影响。

关键词: 辛方法; 分数阶黏弹性; 界面断裂; 反平面; 应力强度因子

中图分类号: O346.1

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2024)04-0689-07

1 引言

黏弹性材料广泛存在于自然界并应用于各类工程结构中, 如皮肤和肌肉等生物组织^[1]、乳胶和环氧树脂等工业材料。为了准确描述材料黏弹性特性, 众多学者提出基于多个弹簧元件和黏弹性元件的经典组合模型^[2]。组合模型概念直观且物理意义明确, 但是参数多且难确定, 本构关系复杂, 在某些情况下蠕变和松弛初期与实验数据不能很好吻合。近年的研究表明, 基于分数阶导数的本构模型能使用更少的参数描述出与实验结果相吻合的黏弹性行为^[3-5], 并已成功用于描述生物组织的复杂动力学和黏弹性行为^[6]。另外, 如果黏弹性材料存在内部缺陷, 在持续外荷载作用下会缓慢变形, 这一过程最终可能导致材料发生突然的延迟断裂。延迟断裂一个重要特点是具有很强的时间效应, 发生断裂毫无防备, 严重危害人体健康和工程结构安全, 如动脉血管破裂^[7]及火箭固体推进剂断裂^[8]。

因此, 研究黏弹性材料相关裂纹问题对治疗相关疾病和提高结构安全性具有重要的工程意义和理论价值。

过去几十年众多学者对整数阶黏弹性材料的断裂进行了深入的研究^[9]。近年来, 文献^[10, 11]采用弹性-黏弹性对应原理研究了黏弹性材料的断裂。Zhou 等^[12]基于微观力学研究了岩石的三维断裂问题。Yang 等^[13, 14]利用奇异积分方程分析了半无限热黏性断裂问题。文献^[15-17]提出辛方法求解了有限尺寸黏弹性介质的平面断裂。此外, 随着计算速度的提高, 越来越多的数值方法用于求解黏弹性断裂问题。基于有限元方法, 文献^[18-20]求解了黏弹性介质断裂参数(如 J 积分、应力强度因子和 M 积分等)。Hamidpour 等^[21]利用无网格方法研究了黏弹性材料的断裂问题。He 等^[22]采用边界元法求解了非均匀黏弹性介质的断裂问题。文献^[23-25]结合相场法分析了黏弹性材料的断裂。

收稿日期: 2022-12-22; 修改稿收到日期: 2023-04-02.

基金项目: 陕西省自然科学基金(2022JM-016); 国家自然科学基金(12072266, 11702221); 西北工业大学教育教学改革研究项目(双碳专项)(ST2023JGY02)资助。

作者简介: 徐成辉(1987-), 男, 博士, 讲师(E-mail: xuch@nwpu.edu.cn).

引用本文: 徐成辉, 孙义国, 冷森, 等. 含 V 型缺口分数阶黏弹性复合材料反平面界面断裂的辛方法[J]. 计算力学学报, 2024, 41(4): 689-695.

XU Cheng-hui, SUN Yi-guo, LENG Seng, et al. A symplectic method for the anti-plane fracture analysis of an interface V-notch in fractional viscoelastic media[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2024, 41(4): 689-695.

对于分数阶黏弹性材料断裂问题, Peng 等^[26]利用对应原理求解页岩气岩石裂纹的扩展。Xu 等^[27]将辛方法应用于有限尺寸平面分数阶黏弹性断裂分析中。Zhan 等^[28]使用 Fourier 积分变换模拟了半无限反平面分数阶黏弹性断裂问题。da Costa-Haveroth 等^[29]利用相场法求解了分数阶黏弹性介质的断裂。

总结上述文献发现, 目前的研究几乎都是针对整数阶黏弹性断裂, 对于分数阶黏弹性介质的断裂问题只有少数文献涉及^[26-29]。且只有一篇文章涉及到反平面分数阶均匀黏弹性材料的断裂问题^[28]。关于含有 V 型缺口的分数阶黏弹性复合材料反平面断裂问题的研究还未有文献报道。考虑到该类问题在工程实际中应用广泛, 迫切需要提出一种有效的分析方法来获得此类问题的精确解。为此, 本文采用辛方法^[30-32]对含 V 型缺口分数阶黏弹性复合材料反平面断裂展开研究, 分析分数阶黏弹性参数、缺口几何参数和外加载荷等对强度因子的影响, 为今后工程结构的安全评估提供理论支撑。

2 分数阶黏弹性材料基本方程

考虑含 V 型缺口的由两种分数阶黏弹性材料构成的复合材料结构, 直角坐标 xOy 的坐标原点位于缺口尖端, 如图 1 所示, θ_1 和 θ_2 分别为上下材料单元的分布角度。

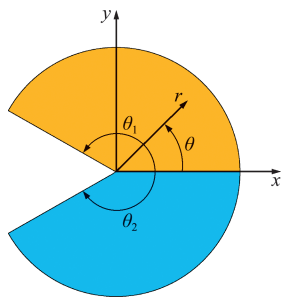


图 1 含 V 型缺口的分数阶黏弹性复合结构
Fig. 1 A V-notched fractional viscoelastic composite structure

2.1 分数阶黏弹性模型

采用分数阶标准线性固体模型来描述复合材料的黏弹性性质, 该模型包括四个参数, 即杨氏模量 E_κ 、应力松弛参数 τ_σ 、应变松弛参数 τ_ϵ 和分数阶参数 κ 。对于 3D 分数阶 Kelvin-Zener 模型, 应力张量和应变张量之间的关系为

$$s(t) + \tau_\sigma \frac{d^\kappa s(t)}{dt^\kappa} = s_0(t) + \tau_\epsilon \frac{d^\kappa s_0(t)}{dt^\kappa} \quad (1)$$

式中 $d^\kappa f(t)/dt^\kappa$ 表示函数 $f(t)$ 对时间 t 的 κ 阶 Riemann-Liouville 分数阶导数 ${}^{\text{RL}}D_t^\kappa f(t)$, 在初始条件

为 0 时, 其 Laplace 变换为 $L[{}^{\text{RL}}D_t^\kappa f(t)] = s^\kappa \bar{f}(s) (\kappa \geq 0)$, 函数上面的横线表示频域 (s 域) 的变量; $s_0(t) = \lambda_\kappa \text{tr}[e(t)]\mathbf{I} + 2G_\kappa e(t)$, $s(t)$ 为 Piola-Kirchhoff 应力张量, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{kk}/3$, 应变张量 $e(t) = [(\partial \mathbf{u}/\partial \mathbf{X})^T + \partial \mathbf{u}/\partial \mathbf{X}]/2$, $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ 为位移场, $e_{ij} = \epsilon_{ij} - \delta_{ij}\epsilon_{kk}/3$, 应力 $\sigma_{ij}(r, \theta, t)$, 应变 $\epsilon_{ij}(r, \theta, t)$ ($i, j = 1, 2, 3$), $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ 是克罗内克函数; $G_\kappa = E_\kappa/[2(1 + \nu_\kappa)]$ 为剪切模量, $\lambda_\kappa = E_\kappa \nu_\kappa/(1 - \nu_\kappa^2)$ 为平面应变的拉梅常数, ν_κ 为泊松比。式(1)由时域转换为频域

$$\bar{s}_{ij}(s) = 2\bar{G}(s)\bar{e}_{ij}(s), \bar{\sigma}_{kk}(s) = 3\bar{K}(s)\bar{\epsilon}_{kk}(s) \quad (2)$$

式中 $\bar{G}(s) = G_\kappa \bar{\xi}$, $\bar{K}(s) = (\lambda_\kappa + 2G_\kappa/3)\bar{\xi}$, $\bar{\xi} = (1 + \tau_\epsilon s^\kappa)/(1 + \tau_\sigma s^\kappa)$ 。

对于本文的反平面(称为 III 型撕开型)界面断裂问题, 含 V 型缺口的黏弹性复合介质位于 xOy 平面, z 方向选取为反平面方向, 当黏弹性介质受到垂直于 xOy 方向(即 z 方向)的机械荷载, 介质发生反平面界面断裂, 弹性场非零变量为反平面位移 $w(x, y, t)$, 剪应力 $\sigma_{rz}(x, y, t)$ 和 $\sigma_{\theta z}(x, y, t)$ 。因此, 在频域内黏弹性材料的应变-位移关系、本构方程和平衡方程分别表示为

$$\epsilon_{rz}^{(i)} = \partial_r \bar{w}^{(i)}, \bar{\epsilon}_{\theta z}^{(i)} = \partial_\theta \bar{w}^{(i)}/r \quad (3)$$

$$\bar{\sigma}_{rz}^{(i)} = \bar{G}^{(i)} \bar{\epsilon}_{rz}^{(i)}, \bar{\sigma}_{\theta z}^{(i)} = \bar{G}^{(i)} \bar{\epsilon}_{\theta z}^{(i)} \quad (4)$$

$$\partial_r(r\bar{\sigma}_{rz}^{(i)}) + \partial_\theta \bar{\sigma}_{\theta z}^{(i)} + r\bar{F}^{(i)} = 0 \quad (5)$$

式中 $i = 1, 2$ 表示上下两种材料。两种材料在界面($\theta = 0$)理想连接, 界面连续条件为

$$\bar{w}^{(1)}|_{\theta=0} = \bar{w}^{(2)}|_{\theta=0}, \bar{\sigma}_{\theta z}^{(1)}|_{\theta=0} = \bar{\sigma}_{\theta z}^{(2)}|_{\theta=0} \quad (6)$$

在 $\theta = \theta_1$ 和 $\theta = -\theta_2$ 上无剪力

$$\bar{\sigma}_{\theta z}^{(1)}|_{\theta=\theta_1} = \bar{\sigma}_{\theta z}^{(2)}|_{\theta=-\theta_2} = 0 \quad (7)$$

2.2 分数阶黏弹性复合材料的哈密顿体系

为将分数阶黏弹性问题由拉格朗日体系转换到哈密顿体系, 定义广义径向坐标 $\eta = \ln r$, 函数上一点表示对 η 的微分, 问题的拉格朗日函数表示为 $\tilde{L}^{(i)} = \bar{G}^{(i)} [(\bar{w}^{(i)})^2 + (\partial_\theta \bar{w}^{(i)})^2]/2 - e^{2\eta} \bar{F}^{(i)} \bar{w}^{(i)}$ (8) 相应的哈密顿函数为

$$H^{(i)}(\bar{q}^{(i)}, \bar{p}^{(i)}) = \bar{p}^{(i)} \dot{\bar{q}}^{(i)} - \tilde{L}^{(i)}(\bar{q}^{(i)}, \dot{\bar{q}}^{(i)}) \quad (9)$$

式中 $\bar{q}^{(i)} = \bar{w}^{(i)}$, $\bar{p}^{(i)} = \partial \tilde{L}^{(i)}/\partial \dot{\bar{q}}^{(i)} = r\bar{\sigma}_{rz}^{(i)} = \bar{s}_{rz}^{(i)}$ 。定义 $\bar{\Psi}^{(i)} = \{\bar{q}^{(i)}, \bar{p}^{(i)}\}^T$ 哈密顿对偶方程为

$$\dot{\bar{\Psi}}^{(i)} = \mathbf{H}^{(i)} \bar{\Psi}^{(i)} + \bar{\mathbf{f}}^{(i)} \quad (10)$$

式中 $\mathbf{H}^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\bar{G}^{(i)} \\ -\bar{G}^{(i)} \partial_\theta^2 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{\mathbf{f}}^{(i)} = -e^{2\eta} \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{F}^{(i)} \end{Bmatrix}$ 。

为了简化计算, 假设方程(10)没有体力, 只考虑方程齐次部分, 其通解利用分离变量法求解。假设

$\bar{\Psi}^{(i)}(\eta, \theta) = e^{\mu_j \eta} \bar{\Psi}^{(i)}(\theta)$, 并将其代入 $\dot{\bar{\Psi}}^{(i)} = \mathbf{H}^{(i)} \bar{\Psi}^{(i)}$, 得到 $\mathbf{H}^{(i)} \bar{\Psi}_j^{(i)}(\theta) = \mu_j \bar{\Psi}_j^{(i)}(\theta)$, 其 μ_j 和 $\bar{\Psi}_j$ 是辛本征值和辛本征解。如果 μ_j 是哈密顿算子矩阵 $\mathbf{H}^{(i)}$ 的本征值, 则 $-\mu_j$ 也是其本征值。因此, 可将本征值分为 α 类和 β 类两类, 即

α -类: $\mu_j^{(\alpha)} = \mu_j (j=1, 2, \dots)$, $\text{Re}(\mu_j) > 0$ 或 $\text{Re}(\mu_j) = 0, \text{Im}(\mu_j) > 0$ 。

β -类: $\mu_j^{(\beta)} = -\mu_j (j=1, 2, \dots)$ 。

其相应的本征解也分为 $\bar{\Psi}_j^{(\alpha)}$ 和 $\bar{\Psi}_j^{(\beta)}$ 两类。其满足辛共轭正交关系, 即

$$\begin{cases} \langle \bar{\Psi}_i^{(\alpha)}, \bar{\Psi}_j^{(\alpha)} \rangle = \langle \bar{\Psi}_i^{(\beta)}, \bar{\Psi}_j^{(\beta)} \rangle = 0 \\ \langle \bar{\Psi}_i^{(\alpha)}, \bar{\Psi}_j^{(\beta)} \rangle = -\langle \bar{\Psi}_i^{(\beta)}, \bar{\Psi}_j^{(\alpha)} \rangle = \delta_{ij} \end{cases} \quad (11)$$

双黏弹性材料的辛内积定义为

$$\begin{aligned} \langle \bar{\Psi}_m, \bar{\Psi}_n \rangle = & \int_0^{\theta_1} [\bar{q}_m^{(1)} \bar{p}_n^{(1)} - \bar{q}_n^{(1)} \bar{p}_m^{(1)}] d\theta + \\ & \int_{-\theta_2}^0 [\bar{q}_m^{(2)} \bar{p}_n^{(2)} - \bar{q}_n^{(2)} \bar{p}_m^{(2)}] d\theta \end{aligned} \quad (12)$$

3 含V型缺口分数阶黏弹性复合材料的解析解

3.1 本征值和本征解求解

对于断裂问题, β 类本征解会导致裂纹尖端位移奇异, 因此该类本征解应该忽略。当 $\mu=0$, 求解特征方程 $\mathbf{H}^{(i)} \bar{\Psi}_j^{(i)} = 0$ 得到 α 类本征解为

$$\bar{\Psi}_0^{(i)} = \{1, 0\}^T \quad (13)$$

当 $\mu \neq 0$ 时, 求解特征方程 $(\mathbf{H}^{(i)} - \mu \mathbf{I}) \bar{\Psi}_j^{(i)} = 0$ 得到 α 类本征解为

$$\bar{\Psi}_j^{(i)} = \begin{Bmatrix} c_1^{(i)} \cos(\mu_j \theta) + c_2^{(i)} \sin(\mu_j \theta) \\ \mu_j \bar{G}^{(i)} [c_1^{(i)} \cos(\mu_j \theta) + c_2^{(i)} \sin(\mu_j \theta)] \end{Bmatrix} \quad (14)$$

令 $\mathbf{Z}^{(i)} = \{c_1^{(i)}, c_2^{(i)}\}$, 将方程(14)代入界面连续条件(6), 得出未知向量之间的关系 $\mathbf{Z}^{(2)} = \mathbf{R} \mathbf{Z}^{(1)}$, $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{G}^{(1)}/\bar{G}^{(2)} \end{bmatrix}$ 。将方程(14)代入界面连续条件(7)

得 $\mathbf{K} \mathbf{Z}^{(1)} = 0$, 系数矩阵 \mathbf{K} 为

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \sin(\mu \theta_1) & \bar{G}^{(1)}/\bar{G}^{(2)} \cos(\mu \theta_1) \\ -\sin(\mu \theta_2) & \cos(\mu \theta_2) \end{bmatrix} \quad (15)$$

上述方程具有非零解的必要条件是其系数行列式的值为零, 即

$$\bar{G}^{(1)} \cos(\mu \theta_1) \sin(\mu \theta_2) = -\bar{G}^{(2)} \sin(\mu \theta_1) \cos(\mu \theta_2) \quad (16)$$

对于有缺口界面断裂问题 ($\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$), 相应的非零本征值为

$$\mu_{n,1} = (2n-1)\pi/(2\theta_0), \mu_{n,2} = n\pi/\theta_0 \quad (17)$$

相应的本征解为

$$\begin{cases} \bar{\Psi}_{n,1}^{(1,\alpha)} = \sin(\mu_{n,1}\theta) \{1, \mu_{n,1} \bar{G}^{(1)}\}^T \\ \bar{\Psi}_{n,2}^{(1,\alpha)} = \cos(\mu_{n,2}\theta) \{1, \mu_{n,2} \bar{G}^{(1)}\}^T \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} \bar{\Psi}_{n,1}^{(2,\alpha)} = \sin(\mu_{n,1}\theta) \{\bar{G}^{(1)}/\bar{G}^{(2)}, \mu_{n,1} \bar{G}^{(1)}\}^T \\ \bar{\Psi}_{n,2}^{(2,\alpha)} = \cos(\mu_{n,2}\theta) \{1, \mu_{n,2} \bar{G}^{(2)}\}^T \end{cases} \quad (19)$$

问题的解可以统一表示为零本征解和非零本征解的线性组合

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}^{(i)} = & \bar{c}_0 \bar{\Psi}_0^{(i)} + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^2 \bar{c}_{n,m} \bar{\Psi}_{n,m}^{(i,\alpha)} e^{\mu_{n,m} \eta} = \\ & \sum_{n=1}^{2N+1} \bar{c}_n \bar{\Psi}_n^{(i,\alpha)} e^{\mu_n \eta} \end{aligned} \quad (20)$$

\bar{c}_n 为由外边界条件确定的未知系数, N 为非零本征解项数。假设外边界条件表示为 $\bar{q}^{(1)}|_{r=a} (0 \leq \theta \leq \theta_1)$ 和 $\bar{p}^{(2)}|_{r=a} (-\theta_2 \leq \theta \leq 0)$, 利用辛共轭正交关系得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2N+1} \sum_{j=1}^{2N+1} \bar{c}_j a^{\mu_j} \left[\int_0^{\theta_1} \bar{p}_j^{(1)} \bar{q}_k^{(1)} d\theta - \int_{-\theta_2}^0 \bar{q}_j^{(2)} \bar{p}_k^{(2)} d\theta \right] = \\ \int_0^{\theta_1} \bar{p}_k^{(1)} \bar{q}^{(1)}|_{r=a} d\theta - \int_{-\theta_2}^0 \bar{q}_k^{(2)} \bar{p}^{(2)}|_{r=a} d\theta \end{aligned} \quad (21)$$

求解方程(21)得到未知系数 \bar{c}_j 即可得到问题的最终解。

3.2 断裂强度因子

对于含V型缺口分数阶黏弹性复合介质, 裂纹尖端物理场可以用本征值为 $\mu_{1,1} = \pi/(2\theta_0)$ 的本征解来表示, 即 $\bar{c}_{1,1}^{(1)} \bar{\Psi}_{1,1}^{(1)} r^{\pi/(2\theta_0)}$, 其中

$$\bar{\Psi}_{1,1}^{(1)} = \sin(\pi\theta/(2\theta_0)) \{1, \pi/(2\theta_0) \bar{G}^{(1)}\}^T \quad (22)$$

根据断裂力学概念, 裂纹尖端奇异性可以用强度因子描述。黏弹性材料在频域 III型应力/应变强度因子定义为 $\{\bar{K}^\epsilon, \bar{K}^\sigma\} = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi} r^{1-\pi/2\theta_0} \{\bar{\sigma}_{\theta z}^{(1)}, \bar{\epsilon}_{\theta z}^{(1)}\}|_{\theta=0})$, 即

$$\{\bar{K}^\epsilon, \bar{K}^\sigma\} = c_{1,1}^{(1)} \pi \sqrt{\pi/2}/\theta_0 \{1, \bar{G}^{(1)}\} \quad (23)$$

时域内强度因子可以由 Stehfest 算法^[33] 求出

$$f(t) = \ln 2/t \sum_{n=1}^{2N} V_n \bar{f}(n \ln 2/t) \quad (24)$$

式中 $\bar{f}(s)$ 为函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换函数和

$$V_n = (-1)^{n+N} \sum_{m=\text{int}[(n+1)/2]}^{\min(n,N)} \Theta m^N / (N-m)! \quad (25)$$

式中 $\Theta = (2m)! / [m!(m-1)!(n-m)!(2m-n)!]$ 。

4 数值算例

在数值计算中, 考虑两种加载条件下含V型缺口圆形分数阶黏弹性复合材料反平面断裂问题, 如图2所示。两种加载条件为, (1) 在 $\theta = \theta_0$ 作用一对集中反平面力 F ; (2) 外圆周上的 y 方向上的位移 w_0 , 分别代表蠕变和应力松弛反平面断裂。计算参数考虑为半径 $r=1$ 。鉴于目前尚未发现含V型缺口的分数阶黏弹性复合材料断裂的研究, 为了对比, 将复合结构考虑为弹性材料。表1给出了

$F=1, G^{(1)}/G^{(2)}=1/2$ 时,不同缺口角度下的应力强度因子。由表 1 可知,本文解与参考文献的解非常接近,相对误差不超过 0.0092%。

表 1 含 V 型缺口弹性双材料应力强度因子
Tab. 1 Stress intensity factors for the V-notched bimaterial

θ_0	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
本文解	2.39343	2.12754	1.91481	1.59570
文献[34]	2.39365	2.12769	1.91492	1.59577

在下面的计算中,研究分数黏弹性参数对强度因子的影响。分数阶黏弹性复合结构上层考虑为鲫鱼皮肤,下层考虑为皮下肌肉,相应的黏弹性参数列入表 2。

表 2 鲫鱼皮肤和肌肉的分数阶黏弹性参数^[35]
Tab. 2 Fractional-order viscoelastic parameters of crucian carp shin and muscle

	κ_i	τ_{ei}	τ_{oi}	$E_{\kappa i}$	$\nu_{\kappa i}$
鱼皮	0.5665	36.2403	14.5541	0.4016×10^6	0.4
肌肉	0.5892	47.0171	12.0928	0.2572×10^6	0.6

当 $\theta_0 = \pi$,其他材料参数保持不变,图 3 给出了 $F=1$ 和 $w_0 = \sin(\theta/2)$ 两种加载条件下鱼皮分数阶参数 κ_1 对强度因子的影响。上半平面材料 $\kappa_1=0$ 表示弹性模型, $\kappa_1=1$ 表示整数阶黏弹性模型,此时下半平面为分数阶黏弹性材料。如图 3 所示, $0 < \kappa_1 < 1$ 的断裂参数位于弹性模型和标准线性黏弹性模型之间。对于蠕变断裂, K^ϵ 随着时间的增大而增大,且 κ_1 越大,开始阶段增大的速率越慢,达到稳定需要时间越长。图 3(a)中,相比于其他分数阶参数, $\kappa_1=0$ 时, K^ϵ 增大趋势并不明显(在 10^{-5} 量级),如图 4 所示。与蠕变断裂相比,应力松弛 K^σ 变化趋势完全相反。图 5 给出了两种加载条件下鱼皮应力松弛参数 τ_{o1} 对强度因子的影响。可以看出,蠕变断裂问题 K^ϵ 随 τ_{o1} 增大而减小,而应力松弛断裂问题 K^σ 呈现相反变化趋势。

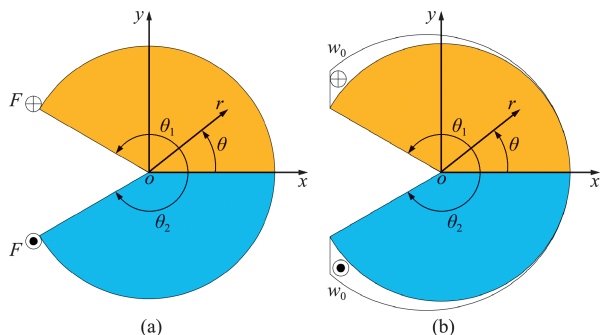


图 2 两种加载条件下含 V 型缺口圆形分数阶黏弹性复合介质
Fig. 2 A edge V-notched circular fractional viscoelastic media under two kinds of loading conditions

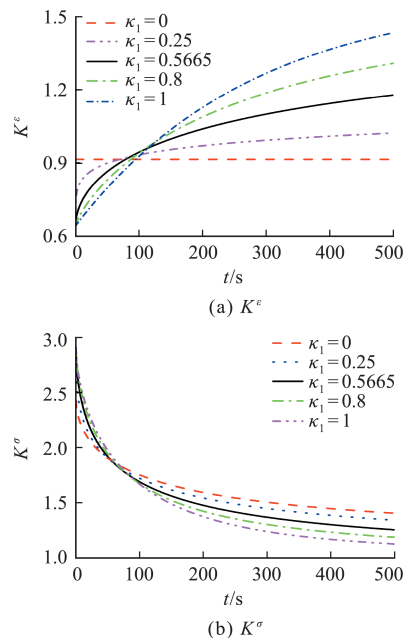


图 3 两种加载条件分数阶参数对强度因子的影响
Fig. 3 Effects of fractional order on the intensity factors

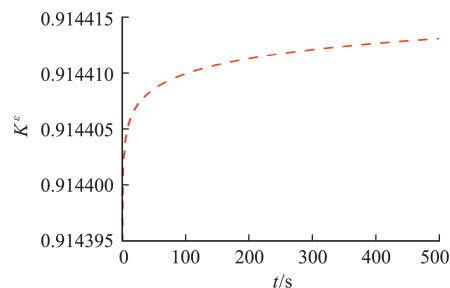


图 4 $F=1$ 时应变强度因子随时间的变化($\kappa_1=0$)
Fig. 4 Variation of strain intensity factor versus time ($\kappa_1=0$) when $F=1$

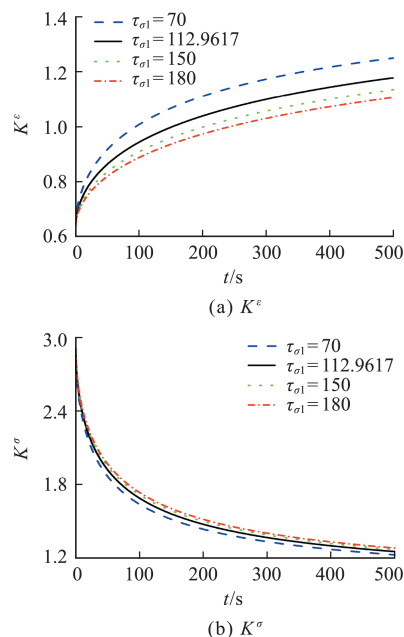


图 5 两种加载条件应力松弛参数对强度因子的影响
Fig. 5 Effects of stress relaxation parameter on the intensity factors

图6给出了在第1种加载 $F=1$ 条件下V型缺口角度 θ_0 对应变强度因子的影响。可以看出,应变强度因子随缺口角度的增大而减小。此外,图7给出了当 $\theta_0=\pi$ 时外加荷载对应力/应变强度因子的影响。外荷载经过一段时间 ($t > 10$ s) 后,荷载 $F=1$ 和 $F=1 + e^{-0.5t} \sin(0.5\pi t)$ 几乎相等。因此应力/应变强度变化趋势基本保持一致,数值几乎相等。对于 $F=1$,应变强度因子随时间的延

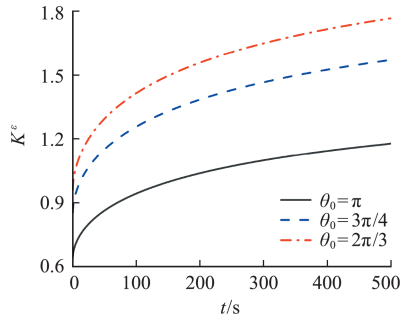


图6 V型缺口角度 θ_0 对应变强度因子的影响

Fig. 6 Effects of notch angle θ_0 on the strain intensity factors

长而增加,而应力强度因子值保持不变,这些现象可以用恒定应力下的蠕变解释,在蠕变过程中,应力基本保持不变,而应变不断变化。为了更好地理解裂纹尖端的蠕变过程,图8给出了 $F=1 + e^{-0.5t} \sin(0.5\pi t)$ 和 $\theta_0=2\pi/3, 5\pi/6, \pi$ 时的应力等高线,可以看出应力 $\sigma_{\theta z}$ 随时间的变化情况,当时间超过 10 s 时,应力趋于稳定,此结论与图7的预测一致。

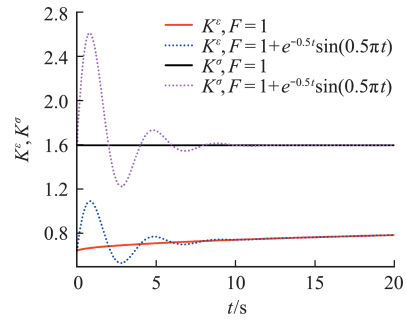


图7 外加荷载对应力/应变强度因子的影响

Fig. 7 Effects of applied load on the stress/strain intensity factors

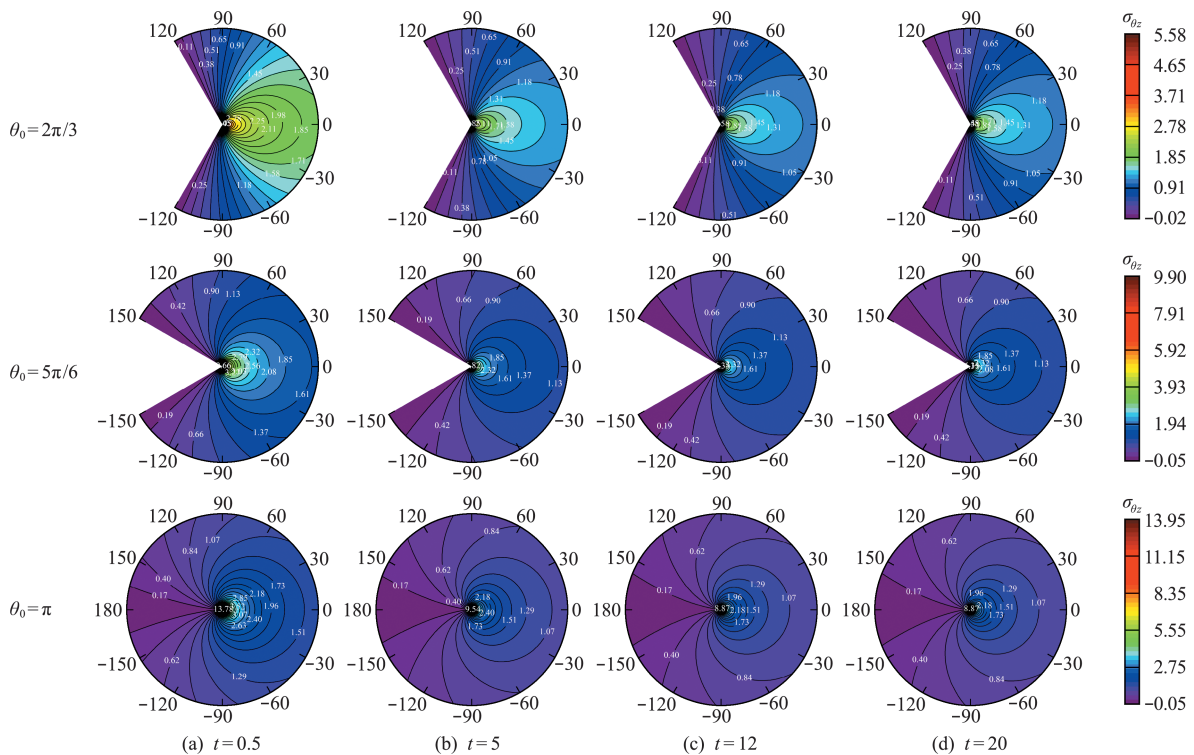


图8 不同缺口角度的应力 $\sigma_{\theta z}$ 等高线图

Fig. 8 Contours of the stress $\sigma_{\theta z}$ for different notch angle

5 结论

利用辛方法分析了含V型缺口分数阶黏弹性复合材料反平面界面断裂问题。在哈密顿体系下,可直接得到频域内V型缺口界面断裂的位移场和应力场解析表达式。通过Laplace逆变换,得到时域空间内的应力/应变强度因子。数值结果显示辛

方法在计算分数阶黏弹性反平面断裂问题具有较高的计算精度。研究表明,(1)蠕变断裂的应变强度因子和应力松弛断裂的应力强度因子的变化速率依赖于分数阶参数 κ ,参数 κ 值越大,强度因子的变化率越小,达到稳态的时间越长;(2)蠕变断裂的应变强度因子随应力松弛参数 τ_0 增大而减小,而应力松弛断裂的应力强度因子变化

趋势相反；(3) 在外力加载下，应变强度因子随缺口角度的增大而减小。

参考文献(References):

- [1] Mostafavi Yazdi S J, Baqersad J. Mechanical modeling and characterization of human skin: A review [J]. *Journal of Biomechanics*, 2022, **130**:110864.
- [2] Zhang C Y. *Viscoelastic Fracture Mechanics* [M]. Beijing: Science Press, 2006.
- [3] 周宏伟, 王春萍, 段志强, 等. 基于分数阶导数的盐岩流变本构模型[J]. 中国科学(物理学 力学 天文学), 2012, **42**(3): 310-318. (ZHOU Hong-wei, WANG Chun-ping, DUAN Zhi-qiang, et al. Time-based fractional derivative approach to creep constitutive model of salt rock [J]. *Scientia Sinica (Physica, Mechanica & Astronomica)*, 2012, **42**(3): 310-318. (in Chinese))
- [4] 银 花, 陈 宁. 分数阶导数粘弹性模型的有限元法[J]. 计算力学学报, 2012, **29**(6): 966-971. (YIN Hua, CHEN Ning. Finite element method for viscoelastic fractional derivative model [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2012, **29**(6): 966-971. (in Chinese))
- [5] Failla G, Zingales M. Advanced materials modelling via fractional calculus: Challenges and perspectives [J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical Physical and Engineering Sciences*, 2020, **378**(2172): 20200050.
- [6] Ionescu C, Lopes A, Copot D, et al. The role of fractional calculus in modeling biological phenomena: A review [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2017, **51**: 141-159.
- [7] FitzGibbon B, McGarry P. Development of a test method to investigate mode II fracture and dissection of arteries [J]. *Acta Biomaterialia*, 2021, **121**: 444-460.
- [8] Martínez M, López R, Rodríguez J, et al. Evaluation of the structural integrity of solid rocket propellant by means of the viscoelastic fracture mechanics approach at low and medium strain rates [J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2022, **118**: 103237.
- [9] Knauss W G. A review of fracture in viscoelastic materials [J]. *International Journal of Fracture*, 2015, **196**(1-2): 99-146.
- [10] Wang Z H, Zhang L, Guo L C. A viscoelastic fracture mechanics model for a functionally graded materials strip with general mechanical properties [J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2014, **44**: 75-81.
- [11] Ciavarella M, Zhang T, McMeeking R M. External work rate and dissipation during crack growth in a viscoelastic material [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2022, **169**: 105096.
- [12] Zhou X P, Huang X C, Berto F. A three-dimensional long-term strength criterion of rocks based on micro-mechanical method [J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2018, **97**: 409-418.
- [13] Yang W Z, Chen Z T. Thermo-viscoelastic response of a cracked, functionally graded half-plane under a thermal shock [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2019, **206**: 267-277.
- [14] Yang W Z, Chen Z T. Investigation of transient thermal-mechanical behavior of a cracked viscoelastic material using time-fractional dual-phase-lag theory [J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2020, **106**: 102500.
- [15] Yao W A, Li X, Hu X F. Viscoelastic crack analysis using symplectic analytical singular element combining with precise time-domain algorithm [J]. *International Journal of Fracture*, 2018, **214**(1): 29-48.
- [16] Li X, Yao W A, Hu X F, et al. Interfacial crack analysis between dissimilar viscoelastic media using symplectic analytical singular element [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2019, **219**: 106628.
- [17] Xu X S, Cheng X H, Zhou Z H, et al. An analytical approach for the mixed-mode crack in linear viscoelastic media [J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2015, **52**: 12-25.
- [18] Duan J B, Lei Y J, Li D K. Fracture analysis of linear viscoelastic materials using triangular enriched crack tip elements [J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2011, **47**(10): 1157-1168.
- [19] Toolabi M, Fallah A S, Baiz P M, et al. Dynamic analysis of a viscoelastic orthotropic cracked body using the extended finite element method [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2013, **109**: 17-32.
- [20] Hou J L, Zhang C, Li Q. The concept and numerical evaluation of M-integral based on domain integral method in cracked viscoelastic materials [J]. *Mechanics of Materials*, 2020, **145**: 103363.
- [21] Hamidpour M, Nami M R, Khosravifard A, et al. Modeling fracture in viscoelastic materials using a modified incremental meshfree RPIM and DIC technique [J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2022, **92**: 104456.
- [22] He J, Liu Q S, Wu Z J. Creep crack analysis of viscoelastic material by numerical manifold method [J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2017, **80**: 72-86.
- [23] Brighenti R, Rabczuk T, Zhuang X Y. Phase field approach for simulating failure of viscoelastic elasto-

- mers [J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2021, **85**:104092.
- [24] Bui T Q, Hu X F. A review of phase-field models, fundamentals and their applications to composite laminates [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2021, **248**:107705.
- [25] Shen R L, Waisman H, Guo L C. Fracture of viscoelastic solids modeled with a modified phase field method [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, **346**:862-890.
- [26] Peng Y, Zhao J Z, Sepehrnoori K, et al. Fractional model for simulating the viscoelastic behavior of artificial fracture in shale gas [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2020, **228**:106892.
- [27] Xu C H, Leng S, Zhou Z H, et al. Accurate and straightforward symplectic approach for fracture analysis of fractional viscoelastic media [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(3):403-416.
- [28] Zhan R T, Li Z X, Wang L. A fractional differential constitutive model for dynamic stress intensity factors of an anti-plane crack in viscoelastic materials [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2014, **30**(3):403-409.
- [29] da Costa-Haverroth T C, Haverroth G A, Bittencourt M L, et al. A damage phase-field model for fractional viscoelastic materials in finite strain [J]. *Computational Mechanics*, 2022, **69**(6):1365-1393.
- [30] 姚伟岸, 钟万勰. 辛弹性力学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2002. (YAO Wei-an, ZHONG Wan-xie. *Symplectic Elasticity* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2022. (in Chinese))
- [31] Lim C W, Xu X S. Symplectic elasticity: Theory and applications [J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2010, **63**(5):050802.
- [32] 姚伟岸, 杨海天, 高强. 平面粘弹性问题的辛求解方法 [J]. 计算力学学报, 2010, **27**(1):14-20. (YAO Wei-an, YANG Hai-tian, GAO Qiang. A new approach to solve plane viscoelastic problems in the symplectic space [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2010, **27**(1):14-20. (in Chinese))
- [33] Stehfest H. Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms [J]. *Communications of the ACM*, 1970, **13**(1):47-49.
- [34] Chen C H, Wang C L, Ke C C. Analysis of composite finite wedges under anti-plane shear [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2009, **51**(8):583-597.
- [35] Cheng M, Jia L B, Yin X Z. Viscoelastic characteristics of fins, muscle and skin in crucian carp (*carassius auratus*) described by the fractional zener model [J]. *Chinese Physics Letters*, 2011, **28**(8):088703.

A symplectic method for the anti-plane fracture analysis of an interface V-notch in fractional viscoelastic media

XU Cheng-hui^{1,2}, SUN Yi-guo^{1,2}, LENG Seng^{1,2}, DENG Zi-chen^{*1,2}

(1. School of Mechanics, Civil Engineering and Architecture, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China;

2. MIIT Key Laboratory of Dynamics and Control of Complex Systems, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China)

Abstract: This paper presents a symplectic method for the anti-plane fracture analysis of an interface V-notch in fractional viscoelastic composite media. The fractional Kelvin Zener model is used to describe the viscoelastic characteristics of materials. With the help of Laplace transform, the fundamental equations of an anti-plane viscoelastic fracture problem in time domain are transformed into frequency domain. By introducing the dual generalized stress variables, the Hamiltonian system is established. Then the eigenvalues and eigensolutions of the Hamiltonian dual equation are obtained by the method of separation of variables, and the unknown coefficients of the symplectic series are determined by the symplectic adjoint orthogonal relationship and the outer boundary conditions. In this way, the analytical expression of the anti-plane stress/strain intensity factor of the viscoelastic media with a V-notch is derived. Finally, the intensity factor in time domain is found by inverse Laplace transform. In numerical examples, the accuracy of the presented method is verified, and the effects of fractional order parameters, notch angle and external load on the stress/strain intensity factor are revealed.

Key words: symplectic method; fractional viscoelastic media; interfacial fracture; anti-plane; stress intensity factor