

DOI: 10.7511/jslx20230125002

基于离散变量的多材料结构拓扑优化设计

刘宏亮^{1,2}, 王成¹, 梁缘^{*2}

(1. 沈阳航空航天大学 辽宁省飞行器复合材料结构分析与仿真重点实验室, 沈阳 110136;
2. 大连理工大学 工业装备结构分析优化与 CAE 软件全国重点实验室, 大连 116024)

摘要:多材料结构拓扑优化相比于单材料结构优化具有更大的设计空间,展现出巨大的设计潜力和应用前景。本文基于离散设计变量研究多材料结构拓扑优化,通过建立有效的设计优化方法,获得轻质高效的结构设计。首先,根据离散变量的特点,建立多材料结构拓扑优化模型,由离散变量下约束函数和目标函数的灵敏度信息构造序列近似整数规划子问题,采用运动极限策略限制设计变量的改变量以保证整数规划子问题的近似精度。为了解决离散变量的组合复杂性,采用具有多项式复杂度的正则松弛算法来高效求解(和经典的连续变量算法效率相当)。本文利用多材料结构最小柔顺性优化问题以及最大传热效率优化问题研究离散变量方法的有效性。数值算例表明,离散变量优化方法可以获得稳定迭代收敛的多材料拓扑设计,优化构型中的材料界面清晰分明,有效避免了出现模糊区域。

关键词:拓扑优化; 离散设计变量; 整数规划; 多材料结构

中图分类号:O189

文献标志码:A

文章编号:1007-4708(2024)04-0611-07

1 引言

结构拓扑优化通过在给定的设计空间内对结构的材料布局进行优化从而获得新型优质结构设计。近三十年来,结构拓扑优化技术得到了快速发展,取得了很多成功应用^[1-3]。各种优化方法的发展,获得创新的拓扑设计,已成为工程结构设计的有力工具^[4]。如均匀化方法^[5]、变密度方法^[1,2]、渐进优化方法^[6]、水平集方法^[7]、相场法^[8]、独立连续映射方法^[9]、移动变形组件/孔洞方法^[10]和特征驱动拓扑优化方法^[11]等。这些方法已广泛应用于解决各种结构设计问题。

多材料结构拓扑优化通过考虑结构性能要求,进而决定设计域内每一点具体选用哪种材料。随着增材制造技术的快速发展,多材料结构拓扑优化的设计应用前景更加广阔,其相关研究也受到更多的关注。Gibiansky 等^[12]采用单材料密度法插值扩展格式研究了具有极端体积模量的多材料微结构优化问题。Gao 等^[13]提出了一种质量约束下的多材料问题优化列式,质量约束可以与结构的轻量

化直接联系,并且该公式可推广到稳态温度和机械载荷条件下的多材料结构设计问题^[14]。此外,Fujii 等^[15]研究了基于均匀化方法的二维结构多材料拓扑优化设计。Zuo 等^[16]提出了一种求解多材料拓扑优化的有序密度法插值方案。Yin 等^[17]引入了峰值函数用于多材料结构拓扑优化插值,但是如果材料相增多时,会由于峰值函数的非线性升高而出现求解困难的问题。

在已有的多材料结构拓扑优化研究中,变密度法因其实现简单、计算效率高而得到广泛应用。需要注意的是,常用的变密度法采用 0 或 1 来表示结构的特定位置是否有材料存在。该方法本质上将非线性整数规划的拓扑优化问题转化为连续变量规划问题,从而克服了离散变量问题的巨大计算负担。目前流行的 SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) 方法通过惩罚使设计变量接近于 0 或 1,会产生由于灰度单元导致的边界模糊问题,给拓扑优化结果的制造带来一些不便^[18]。

为了方便拓扑优化设计构型的制造,多材料相之间的界面清晰是非常必要的。然而传统的变密

收稿日期:2023-01-25; 修改稿收到日期:2023-03-24.

基金项目:国家自然科学基金(12002218;12202092);工业装备结构分析国家重点实验室开放基金(GZ22108)资助项目.

作者简介:梁缘*(1993-),男,博士,助理研究员(E-mail:yuanliangdut@dlut.edu.cn).

引用本文:刘宏亮,王成,梁缘. 基于离散变量的多材料结构拓扑优化设计[J]. 计算力学学报,2024,41(4):611-617.

LIU Hong-liang, WANG Cheng, LIANG Yuan. Topology optimization design of multi-material structure based on discrete variables[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2024, 41(4): 611-617.

度方法设计中存在过多的中间密度区域,导致多材料结构拓扑优化设计的各材料相之间边界模糊。为此,Huang 等^[19]利用材料插值方案,提出了一种带惩罚参数的基于渐进优化的连续体结构拓扑优化方法。Yang 等^[20]采用启发式准则以演化更新多材料离散设计变量并求解质量约束下的多材料设计问题,获得了界面清晰的多材料设计。Zhuang 等^[21]采用水平集方法和伴随灵敏度分析研究了多材料热传导拓扑优化问题。Wang 等^[22]基于水平集函数列式提出了一种多材料拓扑和形状优化新方法。为了提高多材料结构的设计效率,一种基于移动变形组件的优化方法应用于多材料拓扑优化设计并得到了边界清晰的高分辨率优化构型^[23]。另外,Huang 等^[24]采用浮动投影方法研究了结构质量约束下的多材料拓扑优化设计,并通过大量数值试验总结提出了材料共存的必要性条件。值得指出,Sivapurama 等^[25]利用整数设计变量和数学规划提出了一种多材料结构拓扑设计的优化方法,但是需要采用一种杨氏模量约束来限制每一步迭代结构的杨氏模量变化。

Liang 等^[26,27]提出一种离散变量拓扑优化方法,通过利用离散变量灵敏度构造序列近似整数规划 SAIP (Sequential Approximate Integer Programming)子问题,并开发了正则松弛算法求解该子问题。为了避免多材料结构拓扑优化设计的材料界面不清晰和模糊边界问题,基于上述离散变量方法的设计思路,本文构造出多材料框架下的序列近似整数规划和正则松弛算法求解更新多个离散设计变量,建立多材料结构的离散变量拓扑优化方法,进而获得有效的拓扑设计。数值算例展示了本文方法对于多材料结构最小柔顺性问题和最大传热效率问题的有效性。

2 多材料结构离散变量拓扑优化 列式及求解

2.1 离散变量下的多材料拓扑优化列式

假设结构中除了空白相材料之外有 M 种备选材料,各相材料杨氏模量的关系为 $E_M > E_{M-1} > \dots > E_2 > E_1 > E_{\min}$ 。由于离散设计变量的取值只有 0 或 1 的特点,不会出现中间密度,也就不需要引入惩罚系数。因此,离散变量下单元 i 的杨氏模量的多材料优化插值格式可以表示为

$$E_i = \prod_{m=1}^M x_{im} E_m + \sum_{m=2}^M (1 - x_{im}) \left[\prod_{\xi=1}^{m-1} x_{i\xi} \right] E_{m-1} + (1 - x_{i1}) E_{\min} \quad (1)$$

式中 x_{im} 为设计变量 ($x_{im} = 0$ 或 1), E_i 为第 i 个单元的杨氏模量, E_m 为第 m 个固体相材料的杨氏模量, E_{\min} 为空白相材料的杨氏模量。为了避免刚度矩阵奇异,取 $E_{\min} = 10^{-9}$ 。当 $M=1$ 时,即为单材料杨氏模量的插值格式

$$E_i = x_{i1} E_1 + (1 - x_{i1}) E_{\min} \quad (2)$$

由于质量约束会引入材料的质量密度,因此当结构中有 M 个备选材料时,与杨氏模量的插值格式类似,单元 i 的材料密度插值格式可以表示为

$$\rho_i = \prod_{m=1}^M x_{im} \rho_m + \sum_{m=2}^M (1 - x_{im}) \left[\prod_{\xi=1}^{m-1} x_{i\xi} \right] \rho_{m-1} + (1 - x_{i1}) \rho_{\min} \quad (3)$$

式中 ρ_i 为第 i 个单元的材料密度, ρ_m 为第 m 个固体相材料的材料密度, ρ_{\min} 为空白相材料的材料密度。同理,为了避免矩阵奇异,取 $\rho_{\min} = 10^{-9}$ 。本文采用结构的平均密度约束来代表结构的总体质量约束,即

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \rho_i \leq \bar{\rho} \quad (4)$$

式中 N 为总单元个数, $\bar{\rho}$ 为结构的平均密度。

本文主要讨论两相备选材料和三相备选材料的情况,可以写出杨氏模量和密度的插值格式,即当 $M=2$ 和 $M=3$ 时单元 i 的杨氏模量与密度的插值格式分别为

$$\begin{cases} E_i = x_{i1} [x_{i2} E_2 + (1 - x_{i2}) E_1] + (1 - x_{i1}) E_{\min} \\ \rho_i = x_{i1} [x_{i2} \rho_2 + (1 - x_{i2}) \rho_1] + (1 - x_{i1}) \rho_{\min} \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} E_i = x_{i1} \{x_{i2} [x_{i3} E_3 + (1 - x_{i3}) E_2] + (1 - x_{i2}) E_1\} + (1 - x_{i1}) E_{\min} \\ \rho_i = x_{i1} \{x_{i2} [x_{i3} \rho_3 + (1 - x_{i3}) \rho_2] + (1 - x_{i2}) \rho_1\} + (1 - x_{i1}) \rho_{\min} \end{cases} \quad (6)$$

由式(5,6)可知 0~1 离散设计变量的取值与单元材料属性的关系,列入表 1 和表 2。由表 1 和表 2 可知, x_{i1} 可以表示第 i 个单元是否有材料,而 x_{i2} 和 x_{i3} 则可以表示第 i 个单元选择哪种材料。

表 1 两相材料的设计变量与单元材料属性的关系
Tab. 1 Relationship between design variables and elemental material properties of two-phase materials

材料名称	E_m	ρ_m	x_{i1}	x_{i2}
Void	E_{\min}	ρ_m	0	0
Void	E_{\min}	ρ_m	0	1
Mat1	E_1	ρ_1	1	0
Mat2	E_2	ρ_2	1	1

表 2 三相材料的设计变量与单元材料属性的关系
Tab. 2 Relationship between design variables and elemental material properties of three-phase materials

材料名称	E_m	ρ_m	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}
Void	E_{\min}	ρ_{\min}	0	0	0
Void	E_{\min}	ρ_{\min}	0	1	0
Void	E_{\min}	ρ_{\min}	0	0	1
Void	E_{\min}	ρ_{\min}	0	1	1
Mat1	E_1	ρ_1	1	0	0
Mat1	E_1	ρ_1	1	0	1
Mat2	E_2	ρ_2	1	1	0
Mat3	E_3	ρ_3	1	1	1

综上所述,基于离散变量的结构平均密度约束下的多材料结构拓扑优化列式可以表示为

$$\begin{aligned} \text{Find: } & \mathbf{x}_m \\ \text{min}_{\mathbf{x}_m}: & C(\mathbf{x}_m) = \mathbf{U}^T \mathbf{K}(\mathbf{x}_m) \mathbf{U} \\ \text{s.t.: } & \mathbf{K}(\mathbf{x}_m) \mathbf{U} = \mathbf{F} \\ & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \rho_i(\mathbf{x}_m) \leq \bar{\rho} \\ & x_{im} \in \{0, 1\} \quad (i=1, 2, \dots, N; m=1, 2, \dots, M) \end{aligned} \quad (7)$$

式中 C 为表示结构柔顺度的目标函数, \mathbf{U} 为结构的位移向量, $\mathbf{K}(\mathbf{x}_m)$ 为结构的总体刚度矩阵, \mathbf{F} 为载荷向量。另外,对于热传导最大传热效率问题,本文主要考虑稳态热传导优化问题。 C 为结构的散热弱度, \mathbf{U} 为结构的温度, $\mathbf{K}(\mathbf{x}_m)$ 为结构的整体热刚度矩阵, \mathbf{F} 为加热热源值的大小。

由式(5,6)可得到基于离散变量的目标函数以及约束函数的灵敏度计算表达式为

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial x_{im}} = -\frac{\partial E_i}{\partial x_{im}} (\mathbf{u}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{u}) & (x_i = 1) \\ \frac{\partial C}{\partial x_{im}} = x_{\min} (\mathbf{u}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{u}) & (x_i = 0) \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_i}{\partial x_{i1}} = \frac{\partial \rho_i}{\partial x_{im}} & (x_i = 1) \\ \frac{\partial \rho_i}{\partial x_{i2}} = x_{\min} & (x_i = 0) \end{cases} \quad (9)$$

式中 \mathbf{K}_0 为单元刚度矩阵, x_{\min} 为设计变量取值的下限,本文取 $x_{\min} = 10^{-3}$ 。然后,对目标函数灵敏度进行过滤,以避免出现棋盘格现象。因此,可以构造出序列线性整数规划子问题为

$$\begin{aligned} \text{Find: } & \mathbf{x}_m \\ \text{min}_{\mathbf{x}_m}: & \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{\delta \tilde{C}}{\delta x_{im}^k} x_{im} \\ \text{s.t.: } & \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{\delta \rho}{\delta x_{im}^k} (x_{im} - x_{im}^k) + \rho(\mathbf{x}_m^k) \leq \bar{\rho} \\ & x_{im} \in \{0, 1\} \quad (i=1, 2, \dots, N; m=1, 2, \dots, M) \end{aligned} \quad (10)$$

式中 \tilde{C} 为过滤后的目标函数灵敏度。优化列式(10)共有 $N \times M$ 个离散设计变量,如文献[26]所述,正则松弛算法可以从正则对偶空间高效求解,计算效率和连续变量算法相当,因此即使当备选材料很多时,该算法的效率依然可以得到保证。

2.2 设计优化的正则松弛算法和运动极限策略

采用正则松弛算法求解多材料结构离散变量拓扑优化,离散变量约束替换为等式约束(11)

$$\begin{aligned} & x_{im} (1 - x_{im}) = 0 \\ & (0 \leq x_{im} \leq 1; i=1, 2, \dots, N; m=1, 2, \dots, M) \end{aligned} \quad (11)$$

通过引入拉格朗日乘数,则拉格朗日函数表示为

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\rho}, \lambda, \sigma) = & \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M b_{im} x_{im} + \lambda \left(\sum_{i=1}^N \rho_i(\mathbf{x}_m) - \bar{\rho} \right) + \\ & \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M [\sigma_{im} (x_{im}^2 - x_{im})] \end{aligned} \quad (12)$$

因此,初始设计变量和对偶变量之间的关系可以表示为

$$\begin{aligned} x_{im} = & [\sigma_{im} - \lambda (\partial \rho_i / \partial x_{im}) - b_{im}] / 2\sigma_{im} \\ (i=1, 2, \dots, N; m=1, 2, \dots, M) \end{aligned} \quad (13)$$

利用等式(13)消除等式(12)的初始设计变量,因此正则对偶问题可以写为

$$\begin{aligned} \min_{\lambda, \sigma}: & -P^d(\lambda, \sigma) = \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{\left(b_{im} + \lambda \frac{\partial \rho_i}{\partial x_{im}} - \sigma_{im} \right)^2}{4\sigma_{im}} + \lambda \bar{\rho} \\ \text{s.t.: } & \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\sigma_{im} \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, N; m=1, 2, \dots, M)$$

为了限制设计变量的改变量,采用运动极限策略来控制结构的平均密度,即令初始铺满材料设计的平均密度为 1, 利用平均密度缩减因子 $\alpha \in [0.95, 1)$ 逐步降低结构的平均密度,直至满足设定的平均密度约束值。本文取 $\alpha = 0.99$, 另外定义一个参数 $\bar{\rho}^{ls+1}$, 则运动极限策略可表示为

$$\bar{\rho}^{ls+1} = \begin{cases} \alpha \bar{\rho}^{ls} & (\alpha \bar{\rho}^{ls} > \bar{\rho}) \\ \bar{\rho} & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (15)$$

只有当目标函数在两次连续迭代后收敛时,式(15)才会触发,从而降低结构的平均密度约束。否则,结构的平均密度约束值将保持不变。该优化过程的流程如图 1 所示。

3 数值算例

本文通过最小柔顺性设计问题和最大传热效率设计问题来研究多材料结构的拓扑优化,并展示离散变量方法的有效性。各相备选材料的材料属

性列入表3,且设定的平均密度约束均为 $\bar{\rho}=0.4$ 。算例中的参数为无量纲参数。

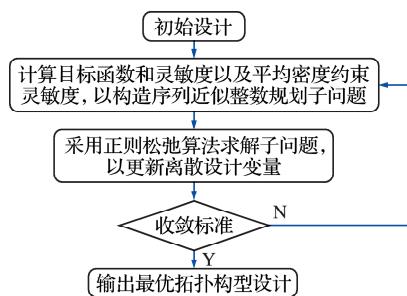


图1 优化流程

Fig. 1 Optimization flow chart

表3 备选材料属性
Tab. 3 Candidate material properties

材料名称	杨氏模量 E	材料密度 ρ	材料颜色
Mat1	0.6	0.5	绿
Mat2	0.8	0.7	蓝
Mat3	1.0	1.0	红

3.1 最小柔顺性优化设计

考虑连续体结构的多材料最小柔顺性优化设计问题。以悬臂梁结构为例,结构的设计域、载荷和边界条件如图2所示,载荷大小为1。设计域采用 120×60 的有限单元离散,相应的计算规模为 $120\times 60\times M$ 。首先,选用表3中的Mat1和Mat3,优化的结果以及平均密度和目标函数的迭代曲线如图3所示,收敛设计的目标函数值为 $C=64.61$ 。然后,将三种材料均作为结构的备选材料,优化的结果及迭代曲线如图4所示。由于本文方法是从初始铺满材料开始迭代,目标函数的变化是呈现出逐渐增大直至收敛的趋势,收敛设计的目标函数值为 $C=63.84$ 。

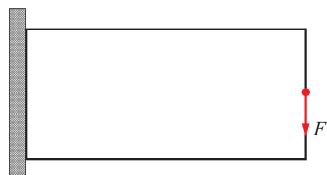


图2 悬臂梁结构

Fig. 2 Cantilever beam structure

从图3的优化设计结果可以看出,绿色区域表示Mat1,红色区域表示Mat3,由于离散设计变量的0~1性质,得到了两种材料相之间的界面较为清晰的拓扑设计。由于Mat3的刚度较大,因此Mat3总是分布在结构的主传力路径上,即施加载荷处和支撑约束端,而刚度较小的Mat1则主要分

布在传力路径周围。这种材料分布有利于在约束条件下提高结构的整体刚度。另外,从图4的结果可以看出,三种材料相之间的界面也是清晰分明,并且相较于两相材料的结果,三相材料结果的目标值更优,说明了多材料设计的优势及重要性。对于最小柔顺性问题,本文方法的设计迭代过程稳定收敛。

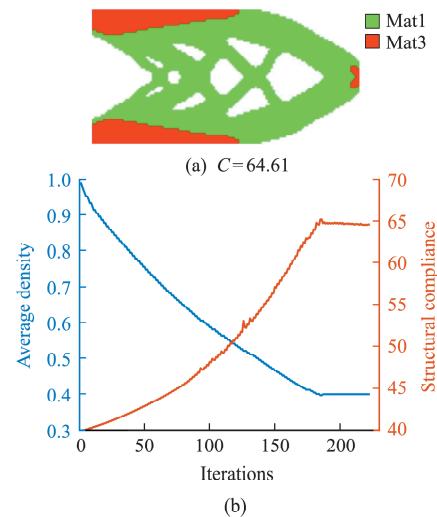


图3 悬臂梁两相材料优化结果及迭代曲线
Fig. 3 Optimization result and iterative curves of cantilever beam of two-phase materials

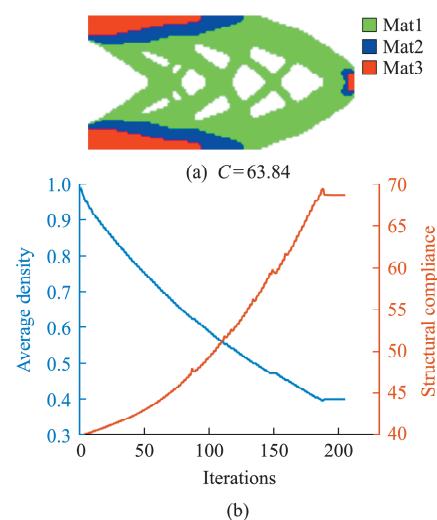


图4 悬臂梁三相材料优化结果及迭代曲线
Fig. 4 Optimization result and iterative curves of cantilever beam of three-phase materials

3.2 最大传热效率优化设计

考虑结构的最大传热效率优化设计问题。以方形平面结构为例,考虑两种情况,第一种为四边中点为绝热边界 $T=0$,中心加热 $q=1$;第二种情况为四角为绝热边界 $T=0$,在两条中线的中点处加热 $q=1$ 。在两种情况下结构的设计域、载荷和边界条件如图5所示。设计域采用 200×200 的有

限单元离散, 相应的计算规模为 $200 \times 200 \times M$ 。由于两种设计域均是中心对称的结构, 本文选取结构的 1/4 左下部分来进行拓扑优化计算。

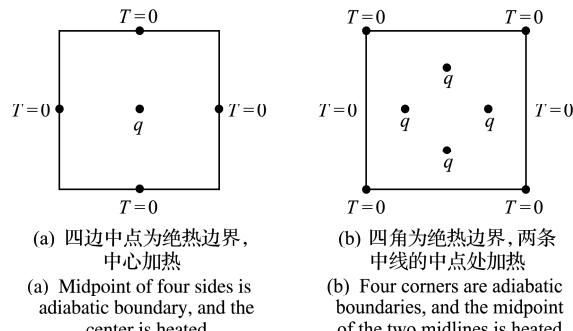


Fig. 5 Design domain of maximum heat transfer efficiency problem

首先, 选用表 3 的 Mat1 和 Mat3, 拓扑优化结果以及迭代曲线如图 6 和图 7 所示, 收敛设计的目标函数值分别为 $C = 6.40$ 和 $C = 23.90$ 。然后, 本文将三种材料均作为结构的备选材料, 优化的结果如图 8 所示, 收敛设计的目标函数值分别为 $C = 6.38$ 和 $C = 23.71$ 。

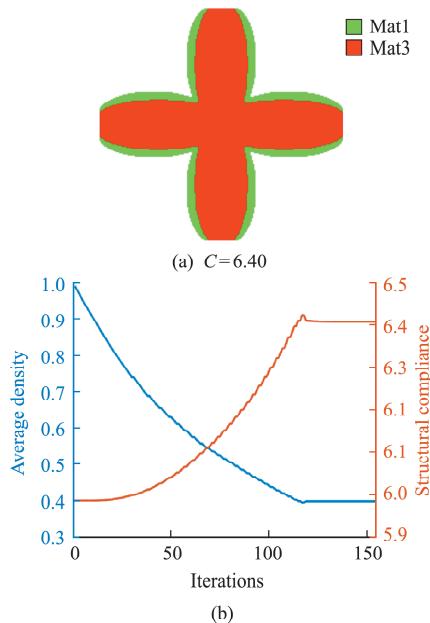


Fig. 6 Optimization result and iterative curves of two-phase materials

同样地, 从优化结果可以看出, 强材料 Mat3 分布在主传热路径上, 较弱的材料 Mat1 或 Mat2 则分布在主传热路径周围。而且, 无论是两相材料的优化设计还是三相材料的优化设计, 均获得了各材料相之间界面清晰的结果, 并且, 三相材料结果的目标值相比两相材料结果的目标值较小。另外, 本文方法可以获得稳定收敛的优化设计。

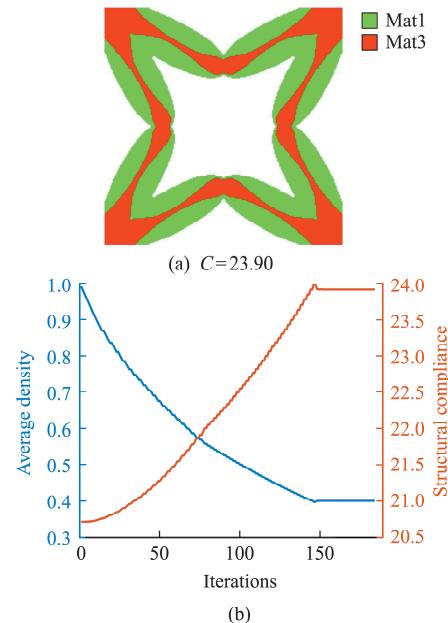


Fig. 7 Optimization result and iterative curves of two-phase materials

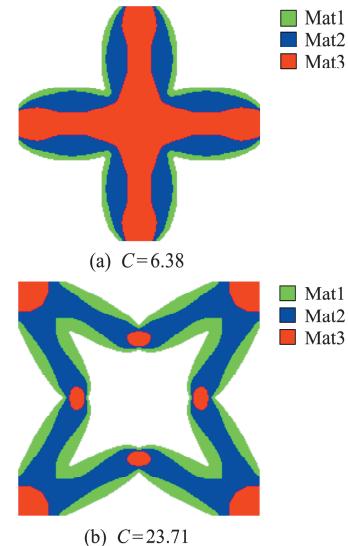


Fig. 8 Optimization results of three-phase materials in two design domains

4 结 论

本文采用离散设计变量研究了多材料结构的拓扑优化, 基于序列近似整数规划框架将离散拓扑优化问题构造出序列线性整数规划子问题, 并采用带有运动极限策略的正则松弛算法高效求解。通过考虑多材料结构的最小柔顺性优化问题以及最大传热效率优化问题, 本文方法可以有效地获得两相材料和三相材料的拓扑设计, 且结构中各材料相之间的界面显示清晰。设计优化的迭代过程平滑且收敛稳定, 说明了本文方法求解多材料结构拓扑

优化问题的稳定性。另外,在备选材料增多的情况下,如果各相材料均存在于结构中,那么结构的目标函数会相对更优,这也说明了多材料优化的设计空间更大,具有更广阔的应用前景。

参考文献(References) :

- [1] Bendsøe M P, Sigmund O. *Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications* [M]. Berlin: Springer, 2003.
- [2] Rozvany G I N. A critical review of established methods of structural topology optimization [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2009, **37**(3):217-237.
- [3] Deaton J D, Grandhi R V. A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: Post 2000 [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2014, **49**(1):1-38.
- [4] Sigmund O, Maute K. Topology optimization approaches[J]. *Struct Multidisc Optim*, 2013, **48**(6):1031-1055.
- [5] Bendsøe M P, Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988, **71**(2):197-224.
- [6] Xie Y M, Steven G P. A simple evolutionary procedure for structural optimization [J]. *Computers & Structures*, 1993, **49**(5):885-896.
- [7] 魏鹏,范海坚,李雪平,等.基于参数化水平集方法的微结构拓扑优化设计[J].计算力学学报,2021, **38**(4): 471-478. (WEI Peng, FAN Hai-jian, LI Xue-ping, et al. Topology optimization for the design of microstructure base on parameterized level set method[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2021, **38**(4): 471-478. (in Chinese))
- [8] 张晓鹏,康柯,杨东生.基于相场描述的拉压不对称强度结构拓扑优化[J].计算力学学报,2020, **37**(6): 670-676. (ZHANG Xiao-peng, KANG Ke, YANG Dong-sheng. Phase-field based topology optimization with Drucker-Prager yield stress constraints[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2020, **37**(6): 670-676. (in Chinese))
- [9] 隋允康,彭细荣,叶红玲,等.结构拓扑优化局部性能约束下轻量化问题的互逆规划解法[J].计算力学学报,2021, **38**(4): 479-486. (SUI Yun-kang, PENG Xi-rong, YE Hong-ling, et al. Reciprocal programming method for structural lightweight topology optimization with local performance constraints [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2021, **38**(4): 479-486. (in Chinese))
- [10] 薛日野,杜宗亮,郭旭.基于移动可变形孔洞方法的超弹性结构拓扑优化[J].计算力学学报,2019, **36**(4): 441-447. (XUE Ri-ye, DU Zong-liang, GUO Xu. Topology optimization of hyperelastic structures via Moving Morphable Void (MMV) approach[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2019, **36**(4): 441-447. (in Chinese))
- [11] Zhou Y, Zhang W H, Zhu J H, et al. Feature-driven topology optimization method with signed distance function[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2016, **310**: 1-32.
- [12] Gibiansky L V, Sigmund O. Multiphase composites with extremal bulk modulus[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2000, **48**(3): 461-498.
- [13] Gao T, Zhang W H. A mass constraint formulation for structural topology optimization with multiphase materials[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011, **88**(8): 774-796.
- [14] Gao T, Xu P L, Zhang W H. Topology optimization of thermo-elastic structures with multiple materials under massconstraint [J]. *Computers & Structures*, 2016, **173**: 150-160.
- [15] Fujii D, Chen B C, Kikuchi N. Composite material design of two-dimensional structures using the homogenization design method[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, **50**(9): 2031-2051.
- [16] Zuo W J, Saitou K. Multi-material topology optimization using ordered SIMP interpolation[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2017, **55**(2): 477-491.
- [17] Yin L, Ananthasuresh G K. Topology optimization of compliant mechanisms with multiple materials using a peak function material interpolation scheme [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2001, **23**(1): 49-62.
- [18] Zhang W S, Li D, Zhang J, et al. Minimum length scale control in structural topology optimization based on the moving morphable components (mmc) approach[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2016, **311**: 327-355.
- [19] Huang X, Xie Y M. Bi-directional evolutionary topology optimization of continuum structures with one or multiple materials[J]. *Computational Mechanics*, 2009, **43**(3): 393-401.
- [20] Yang X T, Li M. Discrete multi-material topology optimization under total mass constraint[J]. *Computer-Aided Design*, 2018, **102**: 182-192.

- [21] Zhuang C G, Xiong Z H, Ding H. Topology optimization of multi-material for the heat conduction problem based on the level set method[J]. *Engineering Optimization*, 2010, **42**(9):811-831.
- [22] Wang Y Q, Luo Z, Kang Z, et al. A multi-material level set-based topology and shape optimization method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2015, **283**:1570-1586.
- [23] Zhang W S, Song J F, Zhou J H, et al. Topology optimization with multiple materials via moving morphable component (MMC) method[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2018, **113**(11):1653-1675.
- [24] Huang X D, Li W B. A new multi-material topology optimization algorithm and selection of candidate materials[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2021, **386**:114114.
- [25] Sivapuram R, Picelli R, Yoon G H, et al. On the design of multimaterial structural topologies using integer programming[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2021, **384**:114000.
- [26] Liang Y, Cheng G D. Topology optimization via sequential integer programming and canonical relaxation algorithm[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, **348**:64-96.
- [27] Liang Y, Cheng G D. Further elaborations on topology optimization via sequential integer programming and Canonical relaxation algorithm and 128-line MATLAB code [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2020, **61**(1):411-431.

Topology optimization design of multi-material structure based on discrete variables

LIU Hong-liang^{1,2}, WANG Cheng¹, LIANG Yuan^{*2}

(1. Key Laboratory of Liaoning Province for Composite Structural Analysis of Aircraft and Simulation, Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, China;

2. State Key Laboratory of Structural Analysis, Optimization and CAE Software for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: Topology optimization of multi-material structures has a larger design space and shows great design potential and application prospect than optimization of single material structures optimization. This paper studies the topology optimization of multi-material structures based on discrete design variables, and obtains lightweight and efficient structure designs by establishing an effective design optimization method. Firstly, according to the characteristics of discrete variables, a multi-material structure topology optimization model is established. The sequence approximate integer programming subproblem is constructed from the sensitivity information of the constraint function and objective function with discrete variables. The move limit strategy is used to limit the change of design variables to ensure the accuracy of the integer programming subproblem. In order to overcome the combinatorial complexity of discrete variables, the canonical relaxation algorithm with polynomial complexity is employed to solve it efficiently (which is equivalent to the classical continuous variable algorithm). In this paper, the optimization problems of the minimum compliance and the maximum heat transfer efficiency of multi-material structures are utilized to study the effectiveness of the discrete variable method. Numerical examples show that the discrete variable optimization method can obtain a stable iterative convergence of multi-material topology design, and the material interface in the optimization configuration is clear, effectively avoiding the appearance of fuzzy region.

Key words: topology optimization; discrete design variable; integer programming; multi-material structure