

DOI: 10.7511/jslx20230420001

基于质量守恒的缆索计算理论与找形解析算法

朱伟华^{*1,2}, 颜东煌², 许红胜²

(1. 湖南城市学院 土木工程学院, 益阳 413000; 2. 长沙理工大学 土木工程学院, 长沙 410001)

摘要: 旨在解决既有缆索计算理论的基本假定不合理问题, 基于质量守恒原则推导了精细化缆索计算理论; 根据拉格朗日坐标建立了考虑缆索截面变形后受拉刚度变化的改进弹性悬链线计算理论。研究结果表明, 精细化缆索计算理论与改进的分段悬链线计算理论具有等价性; 自重下跨度为 888 m 的缆索找形计算案例中, 精细化缆索计算理论与悬链线方程理论的缆力及高程差值分别为 61.5 kN 和 -158.7 mm, 与弹性悬链线理论计算差值对应分别为 1.9 kN 和 0.5 mm; 受外载下跨度为 1038 m 缆索找形计算案例中, 推导的精细化缆索计算理论与悬链线方程理论缆力差值分别为 77.8 kN, 与弹性悬链线理论无应力长度计算差值控制为 1.0 mm。精细化缆索单元计算理论及缆索找形算法可作为缆索承载结构体系一种完备的精细化计算理论与方法。

关键词: 桥梁工程; 缆索计算理论; 主缆找形; 质量守恒原则; 缆索找形算法

中图分类号: TU448, O302

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2024)03-0605-06

1 引言

在悬索桥建设的高速发展趋勢下, 悬索桥缆索计算理论备受桥梁工程人员重视^[1-3], 成为悬索桥建造设计阶段首先需要确定的重要计算内容^[4,5]。当前, 悬链线方程理论^[6,7]、弹性悬链线理论^[8]及缆索单元有限元理论^[9-11]作为悬索桥常用的缆索计算理论。弹性悬链线理论相对于悬链线方程理论在计算精度上具有优势, 文献[12]验证了弹性悬链线理论在悬索桥成桥找形中计算误差在工程范畴内可忽略不计, 但是其计算表达式较为繁琐。由微分方程推导的弹性悬链线与悬链线方程理论, 未将变形前后缆索质量守恒作为基本条件; 由于既有理论的基本假定存在一定不合理, 其计算精度值得探究。近年来, 随着 Abaqus、Ansys 及 Midas Civil 等商用有限元软件的功能不断发展, 有限元软件已成为结构分析中的便捷工具。Ansys 软件的缆索单元有 Link 10 单元^[9]与 Cable280 单元^[10]; Midas Civil 软件中的缆索单元^[11]得到广泛应用。有限元分析通常比较复杂, 主要依赖于矩阵运算^[13,14]。有限元缆索单元作为由既有缆索计算理论推导而来的数值理论, 计算误差仍然存在。

悬索桥主缆找形计算方法近年来积累了大量研究^[15,16], 主要计算方法有基于弹性悬链线理论的迭代算法^[17]、基于悬链线方程理论的解析算法^[18-20]及有限元法^[21], 这 3 种计算方法都是将受外载的缆索结构进行分段计算^[12]。迭代算法具有计算精度高等优势, 广泛应用于悬索桥主缆找形, 但是其收敛性与初始迭代值和迭代增量相关^[12,20]。基于弹性悬链线理论的解析算法计算公式的复杂性, 其找形非线性方程组的计算维度较高; 基于悬链线方程理论建立的缆索找形解析算法具有计算维度低的优势, 因此解析算法得到广泛的应用^[19,20]。

为此, 本文基于缆索微分方程及质量守恒原则推导了精细化缆索单元非线性方程组; 基于拉格朗日坐标系推导考虑变形后缆索抗拉刚度变化的改进的弹性悬链线非线性方程组。通过针对两种推导的缆索计算理论进行定性与定量分析, 验证两者具有等价性。

2 基于质量守恒的缆索计算理论

2.1 基本假定

缆索结构计算理论满足基本假定, (1) 缆索只受拉, 不能受压及受弯; (2) 缆索满足胡克定律。

收稿日期: 2023-04-20; 修改稿收到日期: 2024-04-18.

作者简介: 朱伟华*(1992-), 男, 博士(E-mail: 1542475739@qq.com).

引用本文: 朱伟华, 颜东煌, 许红胜. 基于质量守恒的缆索计算理论与找形解析算法[J]. 计算力学学报, 2024, 41(3): 605-610.

ZHU Wei-hua, YAN Dong-huang, XU Hong-sheng. Cable theory of computation and analytical form finding algorithm based on mass conservation[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2024, 41(3): 605-610.

相对于两种既有的缆索计算理论,即悬链线方程计算理论和弹性悬链线计算理论,本文计算推导过程分别对应减少忽略变形后缆索自重荷载集度的变化和忽略变形后缆索抗拉刚度的变化的基本假定。

2.2 精细化缆索单元计算理论推导

如图1所示的缆索索段力学模型, h 和 l 分别为索段高度及跨度; H 和 V 分别表示初始端水平及竖向缆力; H_s 和 V_s 分别表示为末端水平及竖向缆力。建立笛卡尔坐标系, 坐标原点为索段始端。不变量 λ 表示缆索容重, 为材料固有属性; 变量 A_1 为主缆变形后的截面面积; g 为重力加速度。 s 为自重荷载作用下的几何长度。索段变形后的水平及竖向力学平衡微分方程组见式(1)。

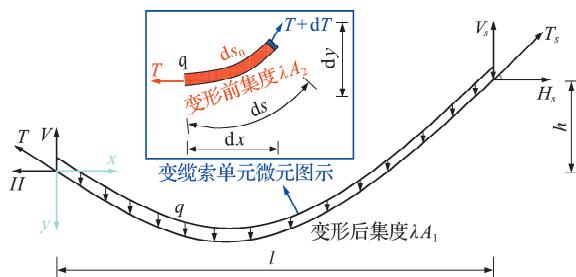


图1 考虑变形后的缆索单元力学简图
Fig. 1 Cable element considering deformation

$$\begin{cases} \sum X = 0; d\left(T \frac{dx}{ds}\right) = 0 \\ \sum Y = 0; d\left(T \frac{dy}{ds}\right) + \lambda A_1 ds = 0 \end{cases} \quad (1)$$

索变形后的水平分量可表示为 $H = T dx / ds$, 将其代入式(1)得

$$\begin{cases} dH = 0 \\ H \frac{d^2y}{dx^2} + \lambda A_1 \frac{ds}{dx} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

将 $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ 代入式(2)第二式, 进一步化简可得式(3)。

$$\begin{aligned} H \frac{d^2y}{dx^2} + \lambda A_1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} &= 0 \\ \Rightarrow y'' &= -\frac{\lambda A_1}{H} \sqrt{1 + (y')^2} \end{aligned} \quad (3)$$

以索段初始端为坐标原点建立坐标系, 对微分方程式(3)进行积分, 可得索段高程表达式

$$\begin{aligned} y &= -\frac{H}{\lambda A_1} \left\{ \cosh \left[\sinh^{-1} \left(\frac{V}{H} \right) - \frac{\lambda A_1 l}{H} \right] - \right. \\ &\quad \left. \cosh \left[\sinh^{-1} \left(\frac{V}{H} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

根据索段变形后长度积分公式可推导得

$$\begin{aligned} s &= \int ds = \int_0^l \sqrt{1 + y'^2} dx = \\ &= -\frac{H}{\lambda A_1} \left\{ \sinh \left[\sinh^{-1} \left(\frac{V}{H} \right) - \frac{\lambda A_1 l}{H} \right] - \frac{V}{H} \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

由 $T = H ds / dx = H \sqrt{1 + y'^2}$ 推导得到 $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$, 将其代入弹性伸长量计算公式 $\Delta s = \int \frac{T}{EA} ds$ 中, 索段变形后的应变在曲线索段内进行积分, 可得索段弹性变形量式(6)。根据胡克定律及缆索弹性伸长量的积分公式的定义, 主缆应变采用缆力与变形前主缆面积 A_2 的比值(即无应力状态下的面积)。

$$\begin{aligned} \Delta s &= \int \frac{T}{EA_2} ds = (EA_2)^{-1} \int H (1 + y'^2) dx = \\ &= (EA_2)^{-1} \int H \cosh^2 \left[\sinh^{-1} \left(\frac{V}{H} \right) - \frac{\lambda A_1 l}{H} \right] dx = \\ &= \frac{H}{2EA_2} \left\{ l - \frac{H}{2\lambda A_1} \left[\sinh \left(2 \sinh^{-1} \left(\frac{V}{H} \right) - \frac{2\lambda A_1 l}{H} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \sinh \left(2 \sinh^{-1} \left(\frac{V}{H} \right) \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

根据主缆索段变形前后质量不变原则, 推导得 $g^{-1} \lambda A_1 \cdot s = g^{-1} \lambda A_2 \cdot s_0 \Rightarrow (A_1 - A_2) \cdot s = -A_2 \Delta s$ (7)

将计算参数代入式(5~7)中, 化简可得式(8); 由方程式(4)推导的索段非线性方程见式(9), 从而推导得到精细化缆索计算理论的计算方程组

$$\begin{aligned} \frac{2E(A_1 - A_2)}{\lambda A_1} \left[\sinh \left(a - \frac{\lambda A_1 l}{H} \right) - \sinh(a) \right] &= \\ \left\{ l - \frac{H}{2\lambda A_1} \left[\sinh \left(2a - \frac{2\lambda A_1 l}{H} \right) - \sinh(2a) \right] \right\} & \quad (8) \end{aligned}$$

$$h = -\frac{H}{\lambda A_1} \left[\cosh \left(a - \frac{\lambda A_1 l}{H} \right) - \cosh(a) \right] \quad (9)$$

式中 $a = \sinh^{-1}(V/H)$, 计算公式中含有参数 H , V , A_1 , l 和 h 。相对于弹性悬链线理论, 精细化缆索计算理论的方程组的形式较为简洁, 同时无应力长度与弹性伸长量可使用计算参数 H , V , A_1 和 l 进行表达, 与缆索找形中的关键计算参数 h 无关。

2.3 改进的弹性悬链线计算理论的推导

由于弹性悬链线理论不考虑截面面积变化对主缆刚度的影响, 计算过程产生一定计算误差。根据弹性悬链线理论计算误差产生的原因, 基于缆索质量守恒原则推导了改进的弹性悬链线计算理论。

力学简图如图2所示, h , l , H , V , H_s , V_s , λ , g , A_1 和 A_2 表示的物理意义与2.2节一致, S_0 表示索段无应力长度。联合笛卡尔与拉格朗日坐标系, s 表示索段上点 P 变形前无应力索长轮廓线上的拉

格朗日坐标,在自重及外载作用下, x 和 y 分别表示点 P 在笛卡尔坐标系下的水平及竖向坐标, p 表示其变形后轮廓线上的拉格朗日坐标。

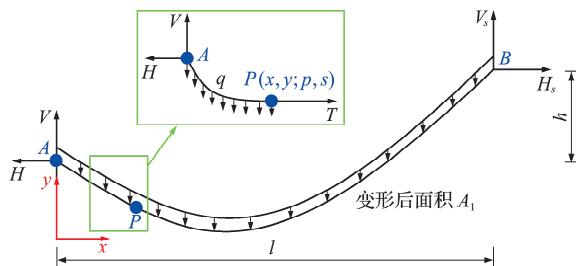


图 2 拉格朗日坐标系下的缆索单元力学简图
Fig. 2 Mechanical diagram of cable element in Lagrangian coordinate system

索段满足几何约束条件可构建微分方程表示为

$$\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2 = 1 \quad (10)$$

在拉格朗日坐标系下, 缆索荷载集度取值为变形前荷载集度 λA_2 , 根据质量守恒定理及力学平衡条件得

$$T \frac{dx}{dp} = -H, T \left(-\frac{dy}{dp}\right) = V - qs = V - \lambda A_2 s \quad (11)$$

根据胡克定律定义, 缆索截面面积取变形后面积 A_1 , 缆力与应变微分计算公式为

$$T = EA_1 \epsilon = EA_1 \left(\frac{dp - ds}{ds} \right) = EA_1 \left(\frac{dp}{ds} - 1 \right) \quad (12)$$

将式(11)的第一式与第二式的等式两端的平方求和可得

$$T = \sqrt{H^2 + (V - \lambda A_2 s)^2} \quad (13)$$

由式(11, 12)推导得到式(14), 将式(13)代入联立计算公式可得

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{dx}{dp} \cdot \frac{dp}{ds} = \frac{-H}{T} \cdot \left(\frac{T}{EA_1} + 1 \right) = \\ &= -\frac{H}{EA_1} - \frac{H}{\sqrt{H^2 + (V - \lambda A_2 s)^2}} \end{aligned} \quad (14)$$

计算公式(14)在 $(0, S_0)$ 区间内进行积分, 缆索索段变形后水平方向计算见式(15); 缆索变形后高度计算方程见式(16); 缆索弹性伸长量 ΔS 计算表达式可利用式(10, 11)推导, 根据引入的缆索变形前后质量守恒原则 $g^{-1} \lambda A_2 \cdot S_0 = g^{-1} \lambda A_1 \cdot (S_0 + \Delta S)$, 推导得到式(17)。式(15~17)构成了改进的弹性悬链线计算理论的方程式。

$$\begin{aligned} l &= -\frac{HS_0}{EA_1} - \frac{H}{\lambda A_2} \left\{ \ln(V + \sqrt{H^2 + V^2}) - \right. \\ &\quad \left. \ln[(V - \lambda A_2 S_0) + \sqrt{H^2 + (V - \lambda A_2 S_0)^2}] \right\} \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h &= \frac{\lambda A_2 S_0^2 - 2VS_0}{2EA_1} - \frac{1}{\lambda A_2} \left[\sqrt{H^2 + V^2} - \right. \\ &\quad \left. \sqrt{H^2 + (V - \lambda A_2 S_0)^2} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} (A_2 - A_1)S_0 &= \frac{1}{2\lambda EA_2} \left\{ V\sqrt{H^2 + V^2} - \right. \\ &\quad (V - \lambda A_2 S_0) \sqrt{H^2 + (V - \lambda A_2 S_0)^2} + \\ &\quad \left. H^2 \left[\ln \frac{V + \sqrt{H^2 + V^2}}{(V - \lambda A_2 S_0) + \sqrt{H^2 + (V - \lambda A_2 S_0)^2}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

3 缆索找形计算算例

利用几何闭合条件、力学平衡条件及推导的缆索计算理论, 依次可构建各类算例的解析算法^[2,7]。

3.1 缆索单元计算算例

为了验证两种推导的缆索计算理论的等价性及对比推导计算理论与既有计算理论间的计算差值, 设置缆索索段计算案例: 索段初始端水平及竖向缆力分别为 163760.9 kN 和 71234.3 kN, 计算跨距为 23.0 m, 缆索自重荷载集度为 21.770 kN/m, 截面面积为 282987 mm², 求解索段高程及无应力长度。计算结果对比列入表 1, 推导的精细化计算理论与改进的弹性悬链线理论计算数值基本一致。精细化计算理论与既有理论(悬链线方程理论及弹性悬链线理论)存在一定计算差值

根据 Matlab 软件中计时功能, 四种理论中耗时最多的为改进的弹性悬链线理论, 耗时最小的为悬链线方程理论, 但是悬链线方程理论的计算误差值是最大的。综合考虑计算效率与计算精度, 精细化缆索计算理论可为一种理想的缆索计算理论。

表 1 缆索索段的计算结果
Tab. 1 Calculation results of cable segments

缆索计算理论	高度/mm	无应力长度/mm	计算时长/s
精细化缆索计算理论	9966.5550	24986.7203	0.035
改进弹性悬链线理论	9966.5550	24986.7203	0.052
悬链线方程理论	9966.4330	24986.6721	0.021
弹性悬链线理论	9966.5546	24986.9737	0.047

3.2 自重恒载下一跨缆索的计算案例

为了进一步验证本文推导的精细化缆索计算理论的计算精度, 通过建立自重下一跨缆索的计算案例进行对比分析。索段力学模型如图 3 所示, 缆索荷载集度 $q = 62.8$ kN/m, 弹性模量 $E = 2.0 \times 10^5$ MPa。针对缆索结构常见的力学求解问题, 分为两类工况进行计算分析。(1) 已知两端跨距、高

度及无应力长度,求解缆索首端缆力,其中跨度为888 m,高度为68.920 m,无应力长度为901.710 m。

(2) 成桥状态下迭代找形计算中,缆索索段端部处缆力及跨度为已知量,待求缆索高度及无应力长度,水平及竖向缆力分别为99540 kN和36240 kN,跨度为888 m。

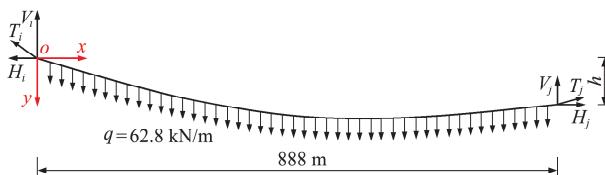


图3 索段力学模型
Fig. 3 Cable segment mechanical model

在工况(1)计算案例的初始端缆力数据中,弹性悬链线理论与本文计算理论差值为1.9 kN,差值率在 1×10^{-4} 以内;悬链线方程理论与本文计算理论差值为61.5 kN,差值率控制在 1×10^{-3} 以内。

在工况(2)计算案例中,弹性悬链线理论与精细化缆索理论无应力长度差值约0.5 mm,差值率控制在 1×10^{-5} 以内;悬链线方程理论与精细化缆索理论的高度计算值差值为-158.7 mm,差值率达到 2×10^{-3} 。

3.3 一跨受外载作用下缆索找形计算案例

将推导的精细化缆索计算理论与改进的弹性悬链线理论的计算精度及效率进行探讨。构建一跨缆索受载计算案例,跨度为1038 m,矢跨比为1/9, $E=1.98 \times 10^5$ MPa,自重荷载集度为22.21 kN/m,吊点受集中荷载为1884.8 kN,吊点分布布置为(23+62×16+23) m。一跨受载缆索计算对比结果列入表2,精细化缆索理论与改进的弹性悬链线算法的计算结果基本一致;悬链线方程算法与精细化缆索理论的缆力差值为77802.7 N,差值率达到0.5%,满足工程精度要求。

表2 一跨受载缆索计算结果对比

Tab. 2 Comparison of calculation results for one span loaded cable

缆索找形 计算算法	H_i/kN	差值/N	V_i/kN	差值/N	无应力 长度/m
精细化缆索 计算理论	163760.9	—	71233.7	—	1068.001
改进弹性悬 链线理论	163760.9	0	71233.7	0	1068.001
弹性悬链线 理论	163761.6	675.8	71233.8	98.9	1068.000
悬链线方程 理论	163838.7	77802.7	71269.6	35911.8	1068.000

4 等价性的验证

精细化缆索计算理论与改进的弹性悬链线理论的微分计算公式的假定条件与推导过程中闭环的计算路径具有一致性。在第3节算例中,推导的两种理论的计算结果具备一致性,综合分析两种推导的缆索计算理论具有等价性。缆索计算理论如图4所示,梳理了既有与推导的缆索计算理论及缆索找形算法的计算。

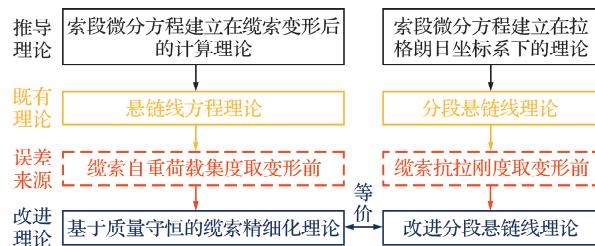


图4 缆索计算理论
Fig. 4 Block diagram of cable theory of computation

比较两种既有缆索计算理论,弹性悬链线理论的微分方程推导过程与精细化缆索计算理论更为接近,其计算值更为接近本文的计算值,说明主缆变形前后缆索抗拉刚度的变化对于计算结果影响相对较小。悬链线方程理论的微分方程推导过程中忽略变形前后缆索自重集度的影响,由此造成一定的计算误差。

两种既有缆索计算理论的基本假定与实际工程情况存在一定差异性,因此导致计算误差。推导的缆索计算理论相对于既有理论减少的基本假定,其本质可概括为考虑受载后缆索面积的变化,两种既有理论计算误差的差异性是由各自推导的微分方程的计算路径不一致造成的。

5 结论

考虑变形前后索段截面面积变化及总体质量守恒原则,构建了缆索计算理论与缆索找形解析算法,得出以下结论。

(1) 开展了缆索在满足只受拉、胡克定律的基本假定下,由两种不同的微分方程形式而推导出缆索计算新理论,即精细化缆索计算理论与改进弹性悬链线计算理论,并揭示了这两种计算理论具有等价性。

(2) 相比两种既有缆索计算理论,精细化缆索计算理论在计算精度和计算效率方面均具有优势;揭示了两种既有理论计算精度的差异性是由微分方程不同的推导路径而导致的。

(3) 在自重下一跨缆索找形计算案例中,基于悬链线方程理论的找形算法高度与缆力计算误差应引起重视。与本文推导的缆索计算理论相比较,弹性悬链线理论的计算误差在工程范畴内可忽略不计。

参考文献(References):

- [1] 齐东春. 大跨径悬索桥主缆精细化计算研究[D]. 西南交通大学, 2012. (QI Dong-chun. A Refined Analysis Method of Main Cable for Long-Span Suspension Bridge[D]. Southwest Jiaotong University, 2012. (in Chinese))
- [2] Zhang W M, Chen Y P. Predicting the maximum deflection and girder-end rotation of a three-tower suspension bridge under live load: An analytical algorithm[J]. *Structures*, 2022, **44**: 295-305.
- [3] Duan M J, Suo X C, Dong F H, et al. Research on the control method for the reasonable state of self-anchored symmetry suspension bridge stiffening girders [J]. *Symmetry*, 2022, **14**(5): 935.
- [4] 曹鸿猷,陈志军,吴巧云,等. 基于单索理论的多塔悬索桥简化计算模型[J]. 中国公路学报, 2016, **29**(4): 77-84. (CAO Hong-you, CHEN Zhi-jun, WU Qiao-yun, et al. Simplified calculation model for multi-span suspension bridges based on single cable theory[J]. *China Journal of Highway and Transport*, 2016, **29**(4): 77-84. (in Chinese))
- [5] Huang C, Jia G, Ding Z H. Multiple periodic solutions for suspension bridge systems[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2019, **477**(1): 463-475.
- [6] Gwon S G, Choi D H. Continuum model for static and dynamic analysis of suspension bridges with a floating girder[J]. *Journal of Bridge Engineering*, 2018, **23**(10): 4018079.
- [7] Zhang W M, Lu X F, Chang J Q, et al. An analytical algorithm for estimating the Deck's maximum deflection and deck-end rotation angle of a suspension bridge under live load [J]. *Journal of Bridge Engineering*, 2022, **27**(7): 1-11.
- [8] 毛勇,单或诗,黄侨,等. 大跨径缆索承重桥梁静力稳定性分析方法探讨[J]. 中外公路, 2020, **40**(2): 115-118. (MAO Yong, SHAN Yu-shi, HUANG Qiao, et al. Discussion on static stability analysis method for long-span cable-supported bridges [J]. *Journal of China & Foreign Highway*, 2020, **40**(2): 115-118. (in Chinese))
- [9] Sun Y, Zhu H P, Xu D. New method for shape finding of self-anchored suspension bridges with three-dimen-
- sionally curved cables [J]. *Journal of Bridge Engineering*, 2015, **20**(2): 04014063.
- [10] 唐亮,张皓,刘玉擎,等. 协作桥合理成桥状态确定方法研究[J]. 公路交通科技, 2015, **32**(8): 107-112. (TANG Liang, ZHANG Hao, LIU Yu-qing, et al. Research on method for determining reasonable completion state of a combined cable-stayed and suspension bridge[J]. *Journal of Highway and Transportation Research and Development*, 2015, **32**(8): 107-112. (in Chinese))
- [11] 郑鹏,王小庆,陈伟. 潜水器动态收放缆索过程的动力学仿真研究[J]. 舰船科学技术, 2022, **44**(7): 55-61. (ZHENG Peng, WANG Xiao-qing, CHEN Wei. Research on coupled dynamics simulation of towing and lifting mission load by submersible[J]. *Ship Science and Technology*, 2022, **44**(7): 55-61. (in Chinese))
- [12] 唐茂林. 大跨度悬索桥空间几何非线性分析与软件开发[D]. 西南交通大学, 2003. (TANG Mao-lin. 3D Geometric Nonlinear Analysis of Long-span Suspension Bridge and Its Software Development[D]. Southwest Jiaotong University, 2003. (in Chinese))
- [13] 陈曦,王冬勇,任俊,等. GPU混合计算构架在岩土工程有限元分析中的应用[J]. 土木工程学报, 2016, **49**(6): 105-112. (CHEN Xi, WANG Dong-yong, REN Jun, et al. Application of hybrid CPU-GPU computing platform in large-scale geotechnical finite element analysis [J]. *China Civil Engineering Journal*, 2016, **49**(6): 105-112. (in Chinese))
- [14] 李元松,宋伟俊,陈宁贤,等. 大跨径自锚式悬索桥斜拉法施工关键技术研究[J]. 桥梁建设, 2018, **48**(4): 108-112. (LI Yuan-song, SONG Wei-jun, CHEN Ning-xian, et al. Study of key techniques for construction of a long span self-anchored suspension bridge using cable-staying method[J]. *Bridge Construction*, 2018, **48**(4): 108-112. (in Chinese))
- [15] 黄雯,郑明万,徐丰,等. 景观悬索桥装饰缆索的找形与内力计算[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2015, **36**(1): 143-147. (HUANG Wen, ZHENG Mingwan, XU Feng, et al. Form finding and internal force calculation of the cable in ornamental suspension bridge[J]. *Journal of Northeastern University(Natural Science)*, 2015, **36**(1): 143-147. (in Chinese))
- [16] 王晓明,雷晓鸣,王成树,等. 空间索形悬索桥主缆线形施工过程空间转换控制方法[J]. 工程力学, 2017, **34**(4): 187-195. (WANG Xiao-ming, LEI Xiao-ming, WANG Cheng-shu, et al. Spatial transformation control method of main cable alignment during construction process in suspension bridge with spatial cables [J]. *Engineering Mechanics*, 2017, **34**(4): 187-195.

(in Chinese))

- [17] 唐茂林,强士中,沈锐利.悬索桥成桥主缆线形计算的分段悬链线法[J].铁道学报,2003,25(1):87-91.
(TANG Mao-lin, QIANG Shi-zhong, SHEN Rui-li. Segmental catenary method of calculating the cable curve of suspension bridge[J]. *Journal of the China Railway Society*, 2003, 25(1):87-91. (in Chinese))
- [18] 张志国,邹振祝,靳明君.悬索桥主缆线形静力解析解[J].铁道学报,2004,26(3):76-80. (ZHANG Zhi-guo, ZOU Zhen-zhu, JIN Ming-jun. Static analytical solution of the main cable curve of a suspension bridge[J]. *Journal of the China Railway Society*, 2004(3):76-80. (in Chinese))
- [19] 檀永刚,张哲.一种空间缆索结构静力分析的解析元法[J].计算力学学报,2008,25(4):585-588. (TAN Yong-gang, ZHANG Zhe. Analytical element method on the calculation of three-dimensional cable supported structures[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2008, 25(4):585-588. (in Chinese))

- [20] 王邵锐,周志祥,高燕梅,等.悬索桥主缆过三定点的精确线形数值解析计算方法[J].计算力学学报,2015,32(5):627-632. (WANG Shao-rui, ZHOU Zhi-xiang, GAO Yan-mei, et al. Analytical calculation method to calculate the precise main cable alignment of suspension bridge[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2015, 32(5):627-632. (in Chinese))
- [21] Niu W J, Yu H T. A new analytic solution to determine internal load of small span suspension bridge [J]. *KSCE Journal of Civil Engineering*, 2016, 20(4):1419-1428.

Cable theory of computation and analytical form finding algorithm based on mass conservation

ZHU Wei-hua^{*1,2}, YAN Dong-huang², XU Hong-sheng²

(1. School of Civil Engineering, Hunan City University, Yiyang 413000, China;

2. School of Civil Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410001, China)

Abstract: In order to solve the problem that the basic assumptions of the existing cable theory of computation are unreasonable, the refined cable theory of computation is derived based on the principle of mass conservation. Based on Lagrangian coordinates, an improved elastic catenary theory of computation considering the change of tensile stiffness after the cable section deformation is established. The results show that the refined cable theory of computation is equivalent to the improved piecewise catenary theory of computation. In the case of form finding of a cable with a span of 888 m under the dead weight, the difference in the cable force and elevation between the refined cable theory and the catenary theory is 61.7 kN and -156.5 mm respectively, and the corresponding difference with the elastic catenary theory is 1.6 kN and -0.2 mm respectively. In the case of form finding of a cable with a span of 1038 meters under external load, the difference in the cable force between the refined cable theory and the catenary theory of equations is 77.8 kN, and the difference in the unstressed length is made to be below 1.0 mm. The refined cable element theory of computation and cable form finding algorithm can be used as a complete refined theory of computation and method for the cable bearing structure system.

Key words: bridge engineering; cable theory of computation; main cable shape finding; the principle of conservation of mass;cable shape finding algorithm