

DOI: 10.7511/jslx20221101001

# 黏弹性纳米流体在垂直板上的自然对流与传热分析

许晓勤

(福建船政交通职业学院 汽车学院, 福州 350007)

**摘要:** 基于分数阶 Maxwell 模型和分数阶 Fourier 定律构建黏弹性纳米流体在垂直板上的非定常二维边界层自然对流与传热控制方程, 利用有限差分法和 L1 算法获得数值稳定解, 对不同物理参数下的速度、温度、平均表面摩擦系数和平均 Nusselt 数的变化趋势进行图形化分析。结果显示, 速度和温度边界层均表现出短暂记忆和延迟特性; 速度分数阶参数削弱了自然对流, 而速度松弛时间的影响却相反; 温度分数阶参数削弱了自然对流和热传导, 而温度松弛时间的影响却相反。

**关键词:** 分数阶 Maxwell 模型; 分数阶 Fourier 定律; 黏弹性纳米流体; 自然对流; 垂直板; 有限差分法

**中图分类号:** O315.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-4708(2024)03-0599-06

## 1 引言

随着人类科技的高速发展和对产品性能追求的不斷提高以及对环保意识的增强, 迫切需要高效制冷装置。但传统工质导热系数低, 难以满足热系统高负荷的传热冷却要求。作为一种新型换热工质, 纳米流体突破了传统工质导热性能的瓶颈, 可有效提高热系统的传热性能及高效低阻紧凑等性能指标, 在强化传热领域具有十分广阔的应用前景和潜在的重大经济价值, 称为未来的冷却散热技术。对纳米流体导热特性的研究已成为国内外学术界和工业界的研究热点。

在纳米流体的实际应用中, 基础流体一般不满足牛顿黏滞定律, 将其视为黏弹性流体更为合理<sup>[1]</sup>。黏弹性流体同时具有黏性和弹性, 属于非牛顿流体, 经典的 Navier-Stokes 线性本构方程不再可靠地描述黏弹性流体的流变性。经典的黏弹性流体模型有 Maxwell 模型、Oldroyd-B 模型及 Burgers 模型等。Maxwell<sup>[2]</sup>首次发现应力松弛现象, 并提出 Maxwell 模型, 该模型由一个虎克弹簧和一个牛顿黏壶串联而成, 该模型可用于描述黏弹性液体的流动状态。

分数阶微积分是一个新兴的数学领域, 在物

理、控制、信号和图像处理、力学与动力系统、生物、环境科学、材料和经济等科学和工程的各个相关领域都有着广泛的应用<sup>[3]</sup>。由于分数阶导数的记忆性, 可以准确描述黏弹性材料的长期记忆特性<sup>[4]</sup>。由于分数阶算子的全局依赖性, 应用分数阶微积分理论来描述黏弹性纳米流体反常热输运具有重要意义<sup>[5]</sup>。Povstenko<sup>[6]</sup>讨论了时空分数阶热传导方程, 然后用广义 Cattaneo 型方程和 Caputo 的时间分数阶导数建立了相应的热应力理论<sup>[7]</sup>。Sherief 等<sup>[8]</sup>利用分数阶微积分提出一个新的热弹性理论, 然后 Li 等<sup>[9]</sup>利用分数阶导数修正 Fourier 定律和 Darcy 定律。白羽等<sup>[10]</sup>探索了非稳态分数阶 Oldroyd-B 流体在多孔介质中通过楔形拉伸板的驻点流动问题。Cao 等<sup>[11]</sup>研究了磁场作用下分数阶 Maxwell 黏弹性纳米流体在水平移动板上的非定常边界层流动与传热现象。目前对于具有分数阶导数的黏弹性纳米流体导热特性的研究还比较少, 这一具有挑战性的问题还需进一步研究。

由于实际应用场合多样, 本文将在文献<sup>[11]</sup>的基础上研究垂直板上纳米流体的流动与传热现象, 首先基于分数阶 Maxwell 模型和分数阶 Fourier 定律构建黏弹性纳米流体在垂直板上的流动与传热控制方程, 然后利用有限差分法和 L1 算法获得数值稳定

收稿日期: 2022-11-01; 修改稿收到日期: 2022-12-16.

基金项目: 福建省科技厅自然科学基金面上项目(2021J01110248); 福建船政交通职业学院博士启动基金(X21206001)资助项目。

作者简介: 许晓勤(1981-), 女, 博士, 副教授(E-mail: xu\_xiaoqin2014@163.com).

引用本文: 许晓勤. 黏弹性纳米流体在垂直板上的自然对流与传热分析[J]. 计算力学学报, 2024, 41(3): 599-604.

XU Xiao-qin. Natural convection and heat transfer of viscoelastic nanofluid on a vertical plate [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2024, 41(3): 599-604.

解,最后图形化分析相关参数对速度、温度、平均表面摩擦系数和平均 Nusselt 数的影响规律。

## 2 数学模型

数学模型如图 1 所示。

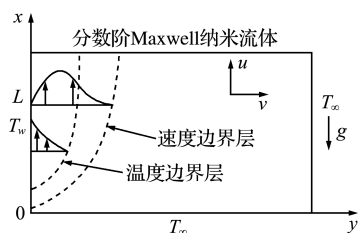


图 1 模型  
Fig. 1 Model

考虑垂直板上 Maxwell 黏弹性纳米流体二维非定常层流边界层自然对流与传热问题。假设  $x$  轴平行于板,  $y$  轴与板垂直, 忽略黏性耗散项, 则其切应力分数阶本构方程为<sup>[12,13]</sup>

$$\sigma_{xy} + \lambda^\alpha \frac{\partial^\alpha \sigma_{xy}}{\partial t^\alpha} = \mu_{nf} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (0 \leq \alpha \leq 1) \quad (1)$$

式中  $\sigma_{xy}$  为切应力,  $\lambda$  为松弛时间,  $\mu_{nf}$  为纳米流体黏度,  $\partial^\alpha / \partial t^\alpha$  为 Caputo 分数导数算子,  $\alpha = 0$  和  $\alpha = 1$  分别对应传统牛顿流体和广义 Maxwell 流体,  $\alpha$  阶分数导数定义为<sup>[10,13]</sup>

$$\frac{\partial^\alpha f(t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \quad (0 \leq \alpha \leq 1) \quad (2)$$

式中  $\Gamma(\cdot)$  为 Gamma 函数。

动量方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{(\rho \beta_0)_{nf}}{\rho_{nf}} g (T - T_\infty) \quad (3)$$

将方程(1)代入方程(3)可得分数阶动量边界层控制方程为

$$\left(1 + \lambda_1^\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(1 + \lambda_1^\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\right) \frac{(\rho \beta_0)_{nf}}{\rho_{nf}} g (T - T_\infty) \quad (4)$$

考虑黏弹性纳米流体的热弹性, 采用分数阶 Fourier 定律<sup>[8,9]</sup>

$$\left(1 + \lambda_2^\beta \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}\right) \mathbf{q} = -k_{nf} \nabla T \quad (5)$$

能量方程

$$(\rho C_p)_{nf} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}\right) = -\nabla \cdot \mathbf{q} \quad (6)$$

将方程(5)代入方程(6)得分数阶能量控制方程为

$$\left(1 + \lambda_2^\beta \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}\right) \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}\right) = \alpha_{nf} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{式中} \quad \rho_{nf} &= \phi \rho_s + (1-\phi) \rho_f \\ \mu_{nf} &= \mu_f / (1-\phi)^{2.5}, \quad \alpha_{nf} = k_{nf} / (\rho C_p)_{nf} \\ (\rho \beta_0)_{nf} &= \phi (\rho \beta_0)_s + (1-\phi) (\rho \beta_0)_f \\ (\rho C_p)_{nf} &= \phi (\rho C_p)_s + (1-\phi) (\rho C_p)_f \\ \frac{k_{nf}}{k_f} &= \frac{(k_s + 2k_f) - 2\phi(k_f - k_s)}{(k_s + 2k_f) + \phi(k_f - k_s)} \end{aligned} \quad (8)$$

初始条件和边界条件

$$t \leq 0: u = 0, v = 0, T = T_\infty;$$

$$t > 0, x = 0: u = 0, v = 0, T = T_\infty$$

$$y = 0: u = 0, T = T_w; y \rightarrow \infty: u \rightarrow 0, T \rightarrow T_\infty \quad (9)$$

式中  $u$  和  $v$  分别为沿  $x$  轴和  $y$  轴的速度分量,  $t$  为时间,  $T, T_w$  和  $T_\infty$  分别为纳米流体、壁面和无穷远处温度,  $\alpha$  和  $\beta$  分别为速度和温度分数导数参数,  $\beta_0$  为体积热膨胀系数,  $\mu$  为黏度,  $\alpha$  为热扩散率,  $\rho$  为密度,  $k$  为热导率,  $\rho C_p$  为热容, 下标  $s, f$  和  $nf$  分别代表纳米颗粒、基液和纳米流体,  $\mathbf{q}$  为热通量,  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  分别为速度和温度松弛时间,  $\phi$  为纳米颗粒体积分数。

本文选用的纳米流体为 Cu 纳米颗粒分散在黏弹性表面活性剂溶液、十六烷基三甲基氯化铵 (CTAC) 和水杨酸钠 (NaSal) 水溶液中制备而成, CTAC/NaSal 水溶液和纳米颗粒 Cu 的热物理特性列入表 1。

表 1 CTAC/NaSal 水溶液和 Cu 纳米颗粒的热物理特性

Tab. 1 Thermophysical properties of CTAC/NaSal-water and Cu

Physical properties	$C_p$ /J·kg <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup>	$\rho$ /kg·m <sup>-3</sup>	$k$ /W·m <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup>	$\beta_0 \times 10^{-5}$ /K <sup>-1</sup>
CTAC/NaSal-water	4179	997.1	0.613	21
Cu	385	8933	400	1.67

引入如下无量纲变量

$$x^* = \frac{x/L}{\text{Re}} = \frac{xv_f}{UL^2}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad u^* = \frac{u}{U},$$

$$v^* = \frac{vL}{v_f}, \quad t^* = \frac{tv_f}{L^2}, \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty},$$

$$\lambda_1^* = \frac{\lambda_1 v_f}{L^2}, \quad \lambda_2^* = \frac{\lambda_2 v_f}{L^2}, \quad \text{Re} = \frac{UL}{v_f}, \quad \text{Pr} = \frac{v_f}{\alpha_f} \quad (10)$$

式中  $\text{Re}$  为 Reynolds 数,  $\text{Pr}$  为 Prandtl 数,  $v_f$  为基液运动黏度,  $L$  为特征长度,  $U$  为特征速度, 将无量纲变量(10)代入边界层方程, 为了简略, 去掉上标 \* 得

$$\partial u / \partial x + \partial v / \partial y = 0 \quad (11)$$

$$(1+\lambda_1^\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}) (\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}) = \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{1}{(1-\phi)^{2.5}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (1+\lambda_1^\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}) (\frac{E_0 Gr}{Re} \theta) \quad (12)$$

$$(1+\lambda_2^\beta \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}) (\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y}) = \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (13)$$

式中  $E_0 = \frac{(1-\phi) + \phi(\rho\beta_0)_s / (\rho\beta_0)_f}{(1-\phi) + \phi\rho_s / \rho_f}$

$$Gr = [gL^3(\beta_0)_f(T_w - T_\infty)] / \nu_f^2 \quad (14)$$

对应的初始条件和边界条件为

$$\begin{aligned} t \leq 0: u = 0, v = 0, \theta = 0; \\ t > 0, x = 0: u = 0, v = 0, \theta = 0, \\ y = 0: u = 0, \theta = 1; y \rightarrow \infty: u \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (15)$$

在整数阶模型中,局部表面摩擦系数和局部 Nusselt 数定义如下

$$C_f = \frac{\mu_{nf}}{\rho_f U^2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}, Nu_x = - \frac{k_{nf}}{k_f} \frac{x}{T_w - T_\infty} \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (16)$$

在 Maxwell 分数阶模型中,局部表面摩擦系数和局部 Nusselt 数分别为

$$\begin{aligned} C_f + \lambda_1^\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} C_f &= \frac{1}{(1-\phi)^{2.5}} \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \\ Nu + \lambda_2^\beta \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} Nu &= -x \frac{k_{nf}}{k_f} Re \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0} \end{aligned} \quad (17)$$

### 3 数值方法

由于引入 Maxwell 分数阶模型,非线性边界层控制方程(12,13)对流项中含有混合分数阶导数,求解困难。本文采用有限差分法,结合 L1 算法进行求解。

离散格式。定义  $x_i = i \Delta x (i = 0, 1, 2, \dots, M)$ ;  $y_j = j \Delta y (j = 0, 1, 2, \dots, N)$ ;  $t_k = k \Delta t (k = 0, 1, 2, \dots, R)$ ; 其中空间步长  $\Delta x = L/M, \Delta y = Y_{max}/N$ , 时间步长为  $\Delta t, u_{ij}^k$  是方程(11~13)中速度  $u$  在点  $(x_i, y_j, t_k)$  的数值解。方程(11~13,17)的有限差分格式详见附录。

为了验证数值方法的可靠性,利用有限差分法求解方程(11~13)稳态数值解,将无量纲坐标  $x_{max} = 1, y = 0$  处  $-\partial\theta/\partial y$  的值与文献[14,15]结果进行对比。注意  $\partial\theta/\partial y = \partial\theta/\partial\eta \cdot \partial\eta/\partial y = \theta'(0) \cdot (Gr/4)^{1/4}/Re$ 。令  $Re = 4, Gr = 160$ , 本文结果  $-\partial\theta/\partial y$  乘以 1.59 再与文献[14,15]相似解  $-\partial\theta'(0)$  比较,结果吻合(表 2)。

## 4 结果与讨论

### 4.1 速度分数导数参数 $\alpha$ 的影响

从图2可以看出,速度轮廓先增大后减小,峰

表 2 当  $\lambda_1 = \lambda_2 = \phi = 0$  时,  $x = 1, y = 0$  处  $-1.59\partial\theta/\partial y$  的值与相似解  $-\theta'(0)$  比较  
Tab. 2 Comparison of  $-1.59\theta/y$  when  $x = 1, y = 0$  with  $-\theta'(0)$  for  $\lambda_1 = \lambda_2 = \phi = 0$

Pr	1	10	100
Ref. [14]	0.5671	1.1690	2.1910
Ref. [15]	0.5646	1.1720	2.1943
Present work	0.5692	1.1734	2.1952

值随  $\alpha$  增大而减小,这是因为黏弹性纳米流体黏度随  $\alpha$  增大而增大。另外,随着  $\alpha$  增大,出现峰值的位置距离垂直板越远,对外力响应更慢,表现出短期记忆特征。峰值后不同  $\alpha$  对应的速度轮廓出现交叉,速度边界层厚度随  $\alpha$  增大而增大,可见牛顿纳米流体( $\alpha = 0$ )流动性能最好。温度轮廓由 1 平滑下降至 0,满足边界条件,温度变化几乎不受  $\alpha$  影响。从图 3 可以看出,对于每个特定的  $\alpha$ , 平均表面摩擦系数单调递增,随着  $\alpha$  增大,平均表面摩擦系数减小。对于每个特定的  $\alpha$ , 平均 Nusselt 数单调递减,随着  $\alpha$  增大,平均 Nusselt 数减小,这与图 2 不符,可见,在分数阶模型中,平均 Nusselt 数不取决于温度梯度,是温度梯度的复杂函数,与初始条件有关,见式(28)。

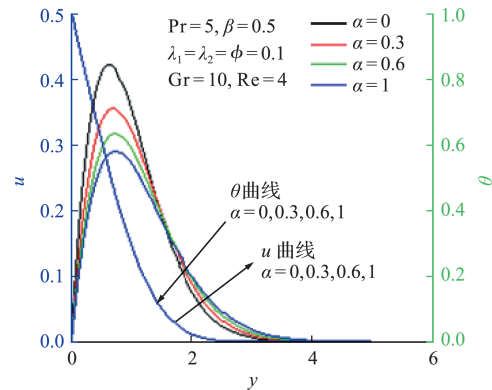


图 2  $\alpha$  对速度和温度的影响  
Fig. 2 Effects of  $\alpha$  on  $u$  and  $\theta$  friction coefficient

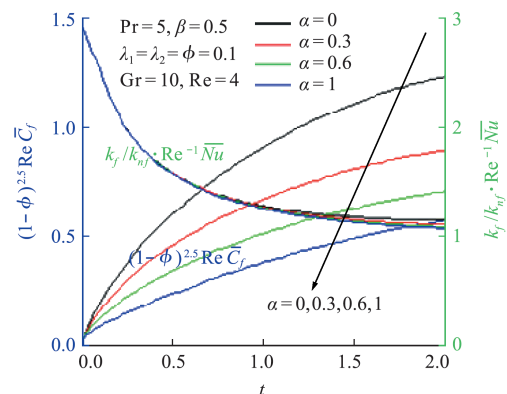


图 3  $\alpha$  对平均表面摩擦系数和 Nusselt 数的影响  
Fig. 3 Effects of  $\alpha$  on  $C_f$  and  $N_u$

### 4.2 温度分数导数参数 $\beta$ 的影响

从图4和图5可以看出,  $\beta$  越大, 速度峰值出现位置距离垂直板越远, 对外力响应更慢, 表现出短暂记忆特征。但与  $\alpha$  对各物理量的影响不同, 当  $\beta$  增大时, 速度、温度、平均表面摩擦系数和平均 Nusselt 数均增大。相邻两条曲线之间的差值随  $\beta$  增大而缩小。传统牛顿流体 ( $\beta=0$ ) 速度和热边界层厚度最薄, 自然对流和传热性能最好。分数阶导数  $\beta$  越大, 自然对流和传热性能越差, 这是因为黏弹性会增大动力黏度和热阻。平均 Nusselt 数随  $\alpha$  增大而减小(图3), 而随  $\beta$  增大而增大(图5), 两种相反的结果进一步说明在分数阶模型中, Nusselt 数不再取决于垂直板上的温度梯度, 而是温度梯度的复杂函数, 见式(28)。类似的平均表面摩擦系数也不再取决于速度梯度, 而是速度梯度的复杂函数, 见式(27)。

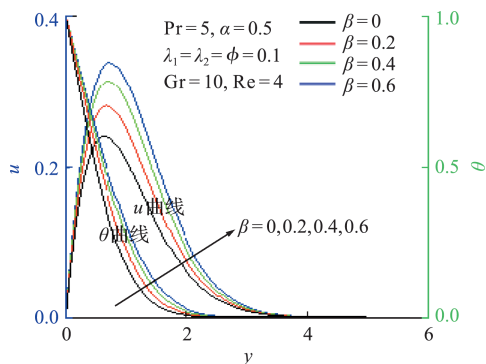


图4  $\beta$  对速度和温度的影响  
Fig. 4 Effects of  $\beta$  on  $u$  and  $\theta$

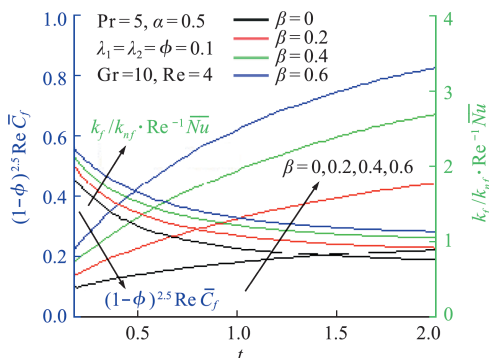


图5  $\beta$  对平均表面摩擦系数和 Nusselt 数的影响  
Fig. 5 Effects of  $\beta$  on  $C_f$  and  $N_u$

### 4.3 其他参数的影响

图6为速度松弛时间  $\lambda_1$  对速度和温度的影响。速度峰值随  $\lambda_1$  增大而增大,  $\lambda_1$  越大, 峰值出现位置距离垂直板越远, 表现出黏弹性纳米流体的延迟特性。峰值过后不同的  $\lambda_1$  对应的速度轮廓出现交叉,  $\lambda_1$  越大, 速度边界层厚度越薄, 因此速度松弛时间强化了自然对流。温度几乎不受  $\lambda_1$  影响, 如图6所示。

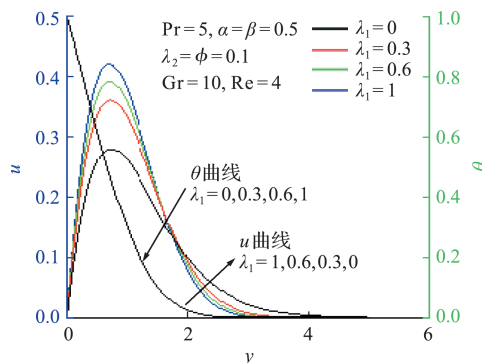


图6  $\lambda_1$  对速度和温度的影响  
Fig. 6 Effects of  $\lambda_1$  on  $u$  and  $\theta$

图7为温度松弛时间  $\lambda_2$  对速度和温度的影响。在整个流场中, 速度和温度及其边界层厚度均随  $\lambda_2$  增大而减小, 与黏弹性纳米流体 ( $\lambda_2 > 0$ ) 相比, 牛顿纳米流体 ( $\lambda_2 = 0$ ) 的传热性能最差。与  $\alpha$  和  $\lambda_1$  对速度的影响不同, 对于不同的  $\lambda_2$ , 速度轮廓并没有出现交叉。速度峰值随  $\lambda_2$  增大而减小。

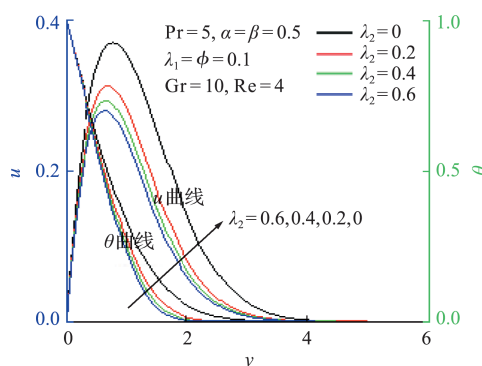


图7  $\lambda_2$  对速度和温度的影响  
Fig. 7 Effects of  $\lambda_2$  on  $u$  and  $\theta$

图8为纳米颗粒体积分数  $\phi$  对速度和温度的影响。速度峰值随  $\phi$  的增大而下降, 峰值过后对于不同的  $\phi$ , 速度轮廓出现交叉, 速度边界层厚度随  $\phi$  的增大而增大, 这是因为纳米颗粒的存在会增大流动阻力, 使黏弹性纳米流体流动性能变差。温度分布随  $\phi$  的增大而增大, 如图8所示。

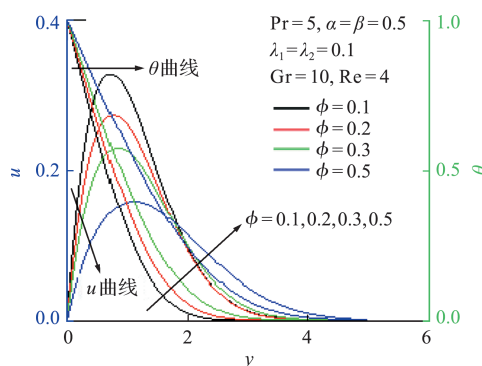


图8  $\phi$  对速度和温度的影响  
Fig. 8 Effects of  $\phi$  on  $u$  and  $\theta$

### 5 结 论

本文对垂直板上黏弹性 Maxwell 纳米流体非定常边界层自然对流与传热现象进行研究。由于分数阶能更好地描述黏弹性材料的记忆性和热弹性,在动量方程和能量方程中分别引入分数阶 Maxwell 切应力本构方程和修正的分数阶 Fourier 定律,分数阶边界层控制方程采用有限差分 and L1 算法进行求解,主要结论如下。

(1) 速度分数导数参数削弱了自然对流,而速度松弛时间的影响却相反。

(2) 温度分数导数参数削弱了自然对流和热传导,而温度松弛时间的影响却相反。

(3) 平均表面摩擦系数和平均 Nusselt 数均随速度分数导数参数的增大而减小,随温度分数导数的增大而增大。

### 附 录:

利用 L1 算法离散时间分数阶导数如下

$$\frac{\partial^\alpha f(t_k)}{\partial t^\alpha} = \frac{\Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{k-1} \alpha_s [f(t_{k-s}) - f(t_{k-s-1})] + O(\Delta t^{2-\alpha}) = \frac{\Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} [f(t_k) - \alpha_{k-1}f(t_0) - \sum_{s=1}^{k-1} (\alpha_{s-1} - \alpha_s)f(t_{k-s})] + O(\Delta t^{2-\alpha}) \quad (18)$$

式中  $\alpha_s = (s+1)^{1-\alpha} - s^{1-\alpha} (s = 0, 1, 2, \dots, R)$ 。

则控制方程(12)分数阶导数项离散格式为

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\Delta t^{-1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} [u_{i,j}^k - u_{i,j}^{k-1} - \sum_{s=1}^{k-1} (\alpha_{s-1} - \alpha_s) \times (u_{i,j}^{k-s} - u_{i,j}^{k-s-1})] + O(\Delta t^{2-\alpha} + \Delta t) \quad (19)$$

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\Delta t^{-\alpha}}{\Delta x \Gamma(2-\alpha)} [u_{i,j}^{k-1} (u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k) - \sum_{s=1}^{k-1} (\alpha_{s-1} - \alpha_s) u_{i,j}^{k-s-1} (u_{i,j}^{k-s} - u_{i-1,j}^{k-s})] + O(\Delta t^{2-\alpha} + \Delta x) \quad (20)$$

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left( v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\Delta t^{-\alpha}}{\Delta y \Gamma(2-\alpha)} [v_{i,j}^{k-1} (u_{i,j}^k - u_{i,j-1}^k) - \sum_{s=1}^{k-1} (\alpha_{s-1} - \alpha_s) v_{i,j}^{k-s-1} (u_{i,j}^{k-s} - u_{i,j-1}^{k-s})] + O(\Delta t^{2-\alpha} + \Delta y) \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k + u_{i,j+1}^{k-1} - 2u_{i,j}^{k-1} + u_{i,j-1}^{k-1}) / (2\Delta y^2) + O(\Delta y^2) \quad (22)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \theta = \frac{\Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} [\theta_{i,j}^k - \sum_{s=1}^{k-1} (\alpha_{s-1} - \alpha_s) \theta_{i,j}^{k-s}] + O(\Delta t^{2-\alpha}) \quad (23)$$

将式(19~23)代入动量方程(12),整理得

$$-(1+r_1) \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{i,j}^{k-1} u_{i-1,j}^k - [(1+r_1) \frac{\Delta t}{\Delta y} v_{i,j}^{k-1} + r_2] \times u_{i,j-1}^k + [(1+r_1) (1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{i,j}^{k-1}) + (1+r_1) \frac{\Delta t}{\Delta y} v_{i,j}^{k-1} + 2r_2] u_{i,j}^k - r_2 u_{i,j+1}^k = (1+r_1 - 2r_2) u_{i,j}^{k-1} + r_2 u_{i,j+1}^{k-1} + r_2 u_{i,j-1}^{k-1} + r_1 A_1 + \frac{\Delta t r_1}{\Delta x} A_2 + \frac{\Delta t r_1}{\Delta y} A_3 + \frac{\Delta t E_0 Gr}{2Re} (\theta_{i,j}^{k-1} + \theta_{i,j}^k) + \frac{\Delta t E_0 Gr}{Re} r_1 A_4 \quad (24)$$

类似地,可得能量方程的迭代格式如下

$$(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{i,j}^{k-1}) + (1+r_3) \frac{\Delta t}{\Delta y} v_{i,j}^{k-1} + 2r_4] \theta_{i,j}^k - r_4 \theta_{i,j+1}^k = r_4 \theta_{i,j-1}^{k-1} - (1+r_3) \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{i,j}^{k-1} \theta_{i-1,j}^k - [(1+r_3) \frac{\Delta t}{\Delta y} v_{i,j}^{k-1} + r_4] \theta_{i,j-1}^k + [(1+r_3) \times (1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{i,j}^{k-1}) + (1+r_3) \frac{\Delta t}{\Delta y} v_{i,j}^{k-1} + 2r_4] \theta_{i,j}^k - r_4 \theta_{i,j+1}^k = r_4 \theta_{i,j-1}^{k-1} + (1+r_3 - 2r_4) \theta_{i,j}^{k-1} + r_4 \theta_{i,j+1}^{k-1} + r_3 C_1 + \frac{\Delta t r_3}{\Delta x} C_2 + \frac{\Delta t r_3}{\Delta y} C_3 \quad (25)$$

连续性方程(11)的迭代格式为

$$v_{i,j}^k = v_{i,j-1}^k - \frac{\Delta y}{\Delta x} (u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k) \quad (26)$$

式中  $r_1 = \frac{\lambda_1^\alpha \Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$ ,  $r_2 = \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{1}{(1-\phi)^{2.5}} \frac{\Delta t}{2\Delta y^2}$

$r_3 = \frac{\lambda_2^\beta \Delta t^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}$ ,  $r_4 = \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{\Delta t}{2Pr\Delta y^2}$

$A_1 = \sum_{s=1}^{k-1} (\alpha_{s-1} - \alpha_s) (u_{i,j}^{k-s} - u_{i,j}^{k-s-1})$

$A_2 = \sum_{s=1}^{k-1} (\alpha_{s-1} - \alpha_s) u_{i,j}^{k-s-1} (u_{i,j}^{k-s} - u_{i-1,j}^{k-s})$

$A_3 = \sum_{s=1}^{k-1} (\alpha_{s-1} - \alpha_s) v_{i,j}^{k-s-1} (u_{i,j}^{k-s} - u_{i,j-1}^{k-s})$

$A_4 = \theta_{i,j}^k - \sum_{s=1}^{k-1} (\alpha_{s-1} - \alpha_s) \theta_{i,j}^{k-s}$

$C_1 = \sum_{q=1}^{k-1} (b_{q-1} - b_q) (\theta_{i,j}^{k-q} - \theta_{i,j}^{k-q-1})$

$C_2 = \sum_{q=1}^{k-1} (b_{q-1} - b_q) u_{i,j}^{k-q-1} (\theta_{i,j}^{k-q} - \theta_{i-1,j}^{k-q})$

$C_3 = \sum_{q=1}^{k-1} (b_{q-1} - b_q) v_{i,j}^{k-q-1} (\theta_{i,j}^{k-q} - \theta_{i,j-1}^{k-q})$

$b_q = (q+1)^{1-\beta} - q^{1-\beta} \quad (q = 0, 1, 2, \dots, R)$

平均表面摩擦系数和平均 Nusselt 数分别满足

$$\bar{C}_f = [r_1 \sum_{s=1}^{k-1} (\alpha_{s-1} - \alpha_s) \bar{C}_f(t_{k-s}) + \frac{Re^{-1}}{(1-\phi)^{2.5}} \times \int_0^1 (\frac{\partial u}{\partial y})_{y=0} dx] / (1+r_1) \quad (27)$$

$$\bar{Nu} = [r_3 \sum_{q=1}^{k-1} (b_{q-1} - b_q) \bar{Nu}(t_{k-q}) - \frac{k_{nf} Re}{k_f} \times \int_0^1 (\frac{\partial \theta}{\partial y})_{y=0} dx] / (1+r_3) \quad (28)$$

## 参考文献(References):

- [1] Goyal M, Bhargava R. Numerical solution of MHD viscoelastic nanofluid flow over a stretching sheet with partial slip and heat source/sink [J]. *ISRN Nanotechnology*, 2013, **2013**:931021.
- [2] Maxwell J C. On the dynamical theory of gases [J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1867, **157**:49-88.
- [3] Sun H G, Yong Z, Baleanu D, et al. A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations*, 2018, **64**:213-231.
- [4] Xu C H, Leng S, Zhou Z H, et al. Accurate and straightforward symplectic approach for fracture analysis of fractional viscoelastic media [J]. *Applied Mathematics and Mechanics* (English Edition), 2022, **43**(3): 403-416.
- [5] Zhang M C, Shen M, Liu F W, et al. A new time and spatial fractional heat conduction model for Maxwell nanofluid in porous medium [J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2019, **78**(5):1621-1636.
- [6] Povstenko Y Z. Theory of thermoelasticity based on the space-time-fractional heat conduction equation [J]. *Physica Scripta*, 2009, **T136**:014017.
- [7] Povstenko Y Z. Fractional Cattaneo-type equations and generalized thermoelasticity [J]. *Journal of Thermal Stresses*, 2011, **34**(2):97-114.
- [8] Sherief H H, El-Sayed A M A, Abd El-Latif A M. Fractional order theory of thermoelasticity [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, **47**(2):269-275.
- [9] Li C R, Zheng L C, Zhang X X, et al. Flow and heat transfer of a generalized Maxwell fluid with modified fractional Fourier's law and Darcy's law [J]. *Computers & Fluids*, 2016, **125**:25-38.
- [10] 白羽, 万颢, 张艳. 非稳态分数阶 Oldroyd-B 流体绕楔形体流动研究 [J]. *计算力学学报*, 2023, **40**(4):546-551. (BAI Yu, WAN Sa, ZHANG Yan. Unsteady flow of fractional Oldroyd-B fluid towards a stretched wedge [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2023, **40**(4):546-551. (in Chinese))
- [11] Cao Z, Zhao J H, Wang Z J, et al. MHD flow and heat transfer of fractional Maxwell viscoelastic nanofluid over a moving plate [J]. *Journal of Molecular Liquids*, 2016, **222**:1121-1127.
- [12] Friedrich C. Relaxation and retardation functions of the Maxwell model with fractional derivatives [J]. *Rheologica Acta*, 1991, **30**(2):151-158.
- [13] 李亚杰, 吴志强, 章国齐. 基于 Caputo 导数的分数阶非线性振动系统响应计算 [J]. *计算力学学报*, 2018, **35**(4):466-472. (LI Ya-jie, WU Zhi-qiang, ZHANG Guo-qi. Calculation of the response of nonlinear vibration system based on the Caputo fractional derivative [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2018, **35**(4):466-472. (in Chinese))
- [14] Crepeau J C, Clarksean R. Similarity solutions of natural convection with internal heat generation [J]. *Journal of Heat Transfer*, 1997, **119**(1):183-185.
- [15] Chamkha A J, Khaled A R A. Similarity solutions for hydromagnetic simultaneous heat and mass transfer by natural convection from an inclined plate with internal heat generation or absorption [J]. *Heat and Mass Transfer*, 2001, **37**(2):117-123.

## Natural convection and heat transfer of viscoelastic nanofluid on a vertical plate

XU Xiao-qin

(College of Automobile, Fujian Chuanzheng Communications College, Fuzhou 350007, China)

**Abstract:** Based on the fractional Maxwell model and fractional Fourier law, the governing equations of unsteady two-dimensional boundary layer natural convection and heat transfer of viscoelastic nanofluid on a vertical plate are constructed. Numerical results are obtained by using the finite difference method and L1 algorithm. The trends of velocity, temperature, average skin friction coefficient and average Nusselt number under different physical parameters are graphically analyzed. Results show that both the velocity and temperature boundary layer exhibit a short-term memory and delay characteristics. The velocity's fractional derivative parameter decelerates the natural convection, while the velocity relaxation time has the opposite effect. The temperature's fractional derivative parameter weakens the natural convection and heat conduction, while the opposite influence is observed for the temperature relaxation time.

**Key words:** fractional Maxwell model; fractional Fourier law; viscoelastic nanofluid; natural convection; vertical plate; finite difference method