

DOI: 10.7511/jslx20220930001

# 考虑外载荷方向不确定性的稳健性拓扑优化

费晨\*, 王晓拓, 倪成功, 孙彦, 田斌, 杨艳山

(苏州农业职业技术学院 智慧农业学院, 苏州 215008)

**摘要:** 外载荷方向不确定是实际工程中普遍存在的问题。本文研究了考虑外载荷方向不确定性下的稳健性连续体拓扑优化。首先,使用区间变量描述外载荷方向不确定性问题。随后,通过使用旋转矩阵的方式描述名义载荷方向上的扰动,并利用了旋转矩阵导数的特殊性质,通过二阶泰勒展开式以及名义载荷处柔顺度对角度的一阶和二阶导数信息获得不确定性区间内任意角度处的灵敏度。最后运用 SIMP 模型和优化准则法(OC)对考虑外载荷方向不确定性的连续体结构进行拓扑优化。结果表明,采用该方法得到的优化结果的柔顺度对于载荷方向的变化不敏感,即对于不同方向的外载荷,结构刚度更具稳健性。

**关键词:** 稳健性拓扑优化; 载荷方向不确定; 变密度法; 优化准则法

**中图分类号:** O342 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-4708(2024)03-0582-06

## 1 引言

连续体结构拓扑优化是一种满足一定约束条件,通过改变结构内部材料分布,使得结构的某些性能达到最优的方法。传统的拓扑优化把结构的物理量和外部载荷视为确定的常量,但在实际的工程应用中,结构中会存在材料参数、尺寸结构及外部载荷等诸多因素的不确定性,这些因素会使得优化结果在某些情况下力学性能显著降低。为了减小不确定性因素对优化结果的影响,需要在结构设计的初步阶段就将其纳入考虑。

解决这类问题的方法主要有可靠性拓扑优化方法 RBTO(Reliability-based Topology Optimization)<sup>[1-3]</sup>和稳健性拓扑优化方法 RTO(Robust Topology Optimization)<sup>[4-6]</sup>。RBTO 是一种使优化结构的性能满足各种设计可靠性指标的方法,而 RTO 侧重于得到具有抵抗不确定性因素扰动的结构。文献[5-8]采用 RTO 对桁架等离散体的不稳定因素进行了拓扑优化。连续体结构的 RTO 问题更具实际工程意义,因此引起了众多学者的关注。文献[9]构造了基于概率的连续体结构动力特性拓扑优化设计数学模型。文献[10,11]基于最坏

准则,对外载荷不确定性进行了研究。文献[12]则基于非概率的 RTO 实现承受大变形的连续体结构设计。文献[13]提出一种具有外载荷及材料不确定性的柔性结构优化模型。文献[14]考虑载荷大小和方向不确定性,采用有效参数方法获得了具有稳健性的结构。文献[15]利用云模型将外载荷方向和作用点的不确定性转化为确定性优化问题。文献[16]考虑载荷大小和方向的不确定性,将改进的比例拓扑优化算法与多目标优化算法相结合,提出了一种非梯度的 RTO 方法。

本文主要研究外载荷方向不确定性情况下的 RTO 方法。为了提高结构抵抗载荷变动的能力,从所有加载条件中,筛选出刚度对设计变量的变化最敏感的加载条件,以最小化最敏感加载条件下的柔顺度作为目标函数,从而实现不确定性载荷的稳健性设计。首先使用区间变量描述外载荷方向不确定性,并建立优化数学模型。通过使用旋转矩阵描述载荷在方向上的扰动,并利用了旋转矩阵导数的特殊性质和二阶泰勒展开式获得灵敏度。最后运用 SIMP 模型和优化准则法对考虑外载荷方向不确定性的连续体结构进行拓扑优化。

通过两个数值算例,将采用 RTO 方法的结果

收稿日期:2022-09-30; 修改稿收到日期:2022-11-09.

基金项目:苏州农业职业技术学院青年教师科研能力提升计划(QN[2022]11);苏州农业职业技术学院博士提升基金(BS2018)资助项目.

作者简介:费晨\*(1995-),男,硕士,助教(E-mail: feic@szai.edu.cn).

引用本文:费晨,王晓拓,倪成功,等.考虑外载荷方向不确定性的稳健性拓扑优化[J].计算力学学报,2024,41(3):582-587.  
FEI Chen, WANG Xiao-tuo, NI Cheng-gong, et al. Robust topology optimization considering the uncertainty of load direction[J].  
Chinese Journal of Computational Mechanics, 2024, 41(3): 582-587.

与确定性优化结果进行对比,分析该方法得到的结果在载荷方向上的稳健性。

## 2 优化模型及方法

### 2.1 拓扑优化模型

本文通过区间变量,即数组  $(\theta_0, \theta_{cw}, \theta_{ccw})$  表示外部载荷方向的有界变动。其中  $\theta_0$  为名义载荷的方向,  $\theta_{cw}$  和  $\theta_{ccw}$  为角度不确定性的范围,前者代表顺时针方向偏转的角度,后者则为逆时针。如若载荷方向用  $(270^\circ, 5^\circ, 5^\circ)$  表示,则名义载荷竖直向下,该载荷绕着作用点在顺时针和逆时针方向均有  $5^\circ$  的不确定性。

本文以单元密度  $\rho$  为设计变量,以最敏感加载条件的结构柔顺度  $C$  最小化为目标函数,约束为结构体积,其数学模型可表示为

$$\begin{aligned} \text{find } \boldsymbol{\rho} &= [\rho_1 \quad \rho_2 \quad \cdots \quad \rho_n]^\text{T} \\ \min C(\boldsymbol{\rho}) &= \mathbf{F}(\theta_{ms})^\text{T} \mathbf{U} = \mathbf{U}^\text{T} \mathbf{K} \mathbf{U} \\ \text{s.t. } &\begin{cases} \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}(\theta) \\ V \leq f V_0 \\ 0 < \rho_{\min} \leq \rho_e \leq 1 (e = 1, 2, \dots, n) \\ \theta_0 - \theta_{cw} \leq \theta \leq \theta_0 + \theta_{ccw} \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

式中  $\mathbf{F}(\theta)$  为方向不确定性载荷,  $\mathbf{F}(\theta_{ms})$  为最敏感加载条件,  $\mathbf{U}$  为结构各个节点的位移向量,  $\mathbf{K}$  为结构刚度矩阵,  $V$  为结构体积,  $V_0$  为设计域体积,  $f$  为体积约束体分比,为避免刚度矩阵奇异,取  $\rho_{\min} = 0.001$ 。采用固体各项同性材料惩罚模型 SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) 作为材料插值模型,刚度与密度关系为

$$E(\rho_e) = \rho_e^p E_0 \quad (2)$$

式中  $E(\rho_e)$  为单元的杨氏模量,  $p$  为惩罚因子,取  $p = 3$ ,  $E_0$  为实体材料的杨氏模量。

本文采用如下方法来计算灵敏度,先计算任意角度下  $C$  对  $\boldsymbol{\rho}$  的导数  $\partial C(\theta) / \partial \rho$  (2.2 节),再找出最敏感加载条件获得灵敏度 (2.3 节)。

### 2.2 任意角度下柔顺度对设计变量导数计算

采用二阶泰勒展开式法<sup>[17]</sup> 计算  $\partial C(\theta) / \partial \rho$ 。结构平衡方程为

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}(\theta) = \mathbf{F}(\theta_0 + \theta_{rot}) = \mathbf{R}(\theta_{rot}) \mathbf{F}(\theta_0) \quad (3)$$

$\mathbf{F}(\theta)$  为载荷,其方向包含两个角度,即名义载荷方向  $\theta_0$  和不确定性微扰  $\theta_{rot}$ ,可将载荷  $\mathbf{F}(\theta)$  视为旋转矩阵  $\mathbf{R}(\theta_{rot})$  乘名义载荷  $\mathbf{F}(\theta_0)$ 。旋转矩阵含二阶旋转矩阵  $\mathbf{r}(\theta_{rot})$ ,数量和位置取决于载荷作用点数量和位置,  $\mathbf{R}(\theta_{rot})$  对角线其他位置均为 1,即

$$\mathbf{R}(\theta_{rot}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & & & \\ & \mathbf{r}(\theta_{rot}) & & \\ & & \cdots & \\ & & & \mathbf{r}(\theta_{rot}) \\ & & & & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}(\theta_{rot}) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{rot}) & -\sin(\theta_{rot}) \\ \sin(\theta_{rot}) & \cos(\theta_{rot}) \end{bmatrix} \quad (4)$$

式(3)对  $\theta$  求导,即对  $\theta_{rot}$  求导,得

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \theta} = \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}(\theta_{rot})}{\partial \theta_{rot}} \mathbf{F}(\theta_0) \quad (5)$$

根据柔顺度  $C$  的定义,  $\partial C / \partial \theta$  可表示为

$$\frac{\partial C}{\partial \theta} = 2 \mathbf{U}^\text{T} \frac{\partial \mathbf{F}(\theta)}{\partial \theta} = 2 \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{u}_e^\text{T} \frac{\partial \mathbf{f}_e(\theta)}{\partial \theta} \quad (6)$$

式中  $\mathbf{u}_e$  为单元节点位移矢量,  $n_e$  为载荷涉及的单元数量,  $\mathbf{f}_e$  为单元节点载荷矢量,也分为名义和扰动方向两部分,因此对  $\theta$  的导数为

$$\frac{\partial \mathbf{f}_e(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathbf{r}(\theta_{rot})}{\partial \theta_{rot}} \mathbf{f}_e(\theta_0) \quad (7)$$

同理,  $\partial C^2 / \partial \theta^2$  可表示为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2} &= 2 \frac{\partial \mathbf{U}^\text{T}}{\partial \theta} \frac{\partial \mathbf{F}(\theta)}{\partial \theta} + 2 \mathbf{U}^\text{T} \frac{\partial^2 \mathbf{F}(\theta)}{\partial \theta^2} = \\ &2 \sum_{e=1}^{n_e} \frac{\partial \mathbf{u}_e^\text{T}}{\partial \theta} \frac{\partial \mathbf{f}_e(\theta)}{\partial \theta} + 2 \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{u}_e^\text{T} \frac{\partial^2 \mathbf{f}_e(\theta)}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (8)$$

由于旋转矩阵的特殊性质,即

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}(\theta_{rot})}{\partial \theta_{rot}^2} = -\mathbf{r}(\theta_{rot}) \quad (9)$$

式中  $\partial \mathbf{f}_e^2(\theta) / \partial \theta^2$  可化简为

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}_e(\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}(\theta_{rot})}{\partial \theta_{rot}^2} \mathbf{f}_e(\theta_0) = -\mathbf{r}(\theta_{rot}) \mathbf{f}_e(\theta_0) \quad (10)$$

利用二次泰勒展开式,近似表示名义载荷方向附近任意角度下的柔顺度  $C(\theta)$  为

$$C(\theta) \approx C_0 + \frac{\partial C_0}{\partial \theta} \Delta \theta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_0}{\partial \theta^2} \Delta \theta^2 \quad (11)$$

$$\text{式中 } \Delta \theta = \theta - \theta_0 = \theta_{rot} \quad (12)$$

式(11)对  $\rho_e$  求导,得

$$\frac{\partial C(\theta)}{\partial \rho_e} = \frac{\partial C_0}{\partial \rho_e} + \frac{\partial C_0}{\partial \theta} \frac{\partial \Delta \theta}{\partial \rho_e} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_0}{\partial \theta^2} \frac{\partial \Delta \theta^2}{\partial \rho_e} \quad (13)$$

式中 等式右侧为

$$\frac{\partial C_0}{\partial \rho_e} = -p \rho_e^{p-1} \mathbf{u}_e^\text{T} \mathbf{k}_e \mathbf{u}_e \quad (14)$$

式中  $\mathbf{k}_e$  为单元刚度矩阵。

式(13)等号右侧第二和第三项可通过式(6,8)

对  $\rho_e$  求导获得

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_0^2}{\partial \theta \partial \rho_e} &= -2p \rho_e^{p-1} \mathbf{u}_e^\text{T} \mathbf{k}_e \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial \theta} \\ \frac{\partial C_0^3}{\partial \theta^2 \partial \rho_e} &= -2p \rho_e^{p-1} \frac{\partial \mathbf{u}_e^\text{T}}{\partial \theta} \mathbf{k}_e \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial \theta} - \\ &2p \rho_e^{p-1} \mathbf{u}_e^\text{T} \mathbf{k}_e \frac{\partial^2 \mathbf{u}_e}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (15)$$

式(14,15)中,  $\mathbf{u}_e$  相关信息可以由结构位移矢量  $\mathbf{U}$  及其各阶导数求得。

由于  $\mathbf{R}(\theta_{\text{rot}})$  和  $\mathbf{F}(\theta_0)$  在构成上的相关性, 即  $\mathbf{F}(\theta_0)$  的第  $i$  行为 0 时,  $\mathbf{R}(\theta_{\text{rot}})$  的  $i$  行  $i$  列为 1, 此时这些 1 换成 0, 乘积结果不会发生变化。因此有

$$\begin{aligned}\mathbf{U} &= \mathbf{K}^{-1} \mathbf{R}(\theta_{\text{rot}}) \mathbf{F}(\theta_0) \\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \theta} &= \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}(\theta_{\text{rot}})}{\partial \theta_{\text{rot}}} \mathbf{F}(\theta_0) \\ \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \theta^2} &= \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{R}(\theta_{\text{rot}})}{\partial \theta_{\text{rot}}^2} \mathbf{F}(\theta_0) = \\ &= -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{R}(\theta_{\text{rot}}) \mathbf{F}(\theta_0) = -\mathbf{U}\end{aligned}\quad (16)$$

根据式(16), 只需解两次有限元方程, 即可获得任意角度下的  $\partial C(\theta)/\partial \rho$ 。

本文通过一个数值算例证明式(11)得到的数值结果具有较高的精度。图 1 所示结构中, 矩形薄板的尺寸为 100 mm × 100 mm, 薄板厚度为 10 mm, 将其分成 100 × 100 个四节点平面应力单元。薄板底部边界全部固定, 顶部边界中心处受到集中载荷,  $F=1$  kN。材料弹性模量  $E=210$  GPa, 泊松比  $\nu=0.3$ 。对载荷附近单元编号, 导数结果列入表 1, 计算结果保留 4 位有效数字。由表 1 可知, 用泰勒展开式方法得到的导数值与直接用有限元法得到的导数值误差小于 1%, 表明采用泰勒展开式计算任意角度下的  $\partial C(\theta)/\partial \rho$  是可行的。

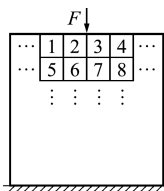


图 1 载荷及周边单元编号

Fig. 1 Load and surrounding elements

表 1 结构灵敏度的对比

Tab. 1 Comparison of structural sensitivity

单元编号	转动角度 /°	泰勒展开式法导数值	有限元法导数值	误差 /%
1	+5	$-1.402 \times 10^{-3}$	$-1.407 \times 10^{-3}$	0.36
	-5	$-3.407 \times 10^{-3}$	$-3.407 \times 10^{-3}$	0
6	+5	$-2.221 \times 10^{-2}$	$-2.222 \times 10^{-2}$	0.045
	-5	$-2.376 \times 10^{-2}$	$-2.376 \times 10^{-2}$	0
8	+5	$-1.315 \times 10^{-2}$	$-1.314 \times 10^{-2}$	0.076
	-5	$-9.603 \times 10^{-3}$	$-9.612 \times 10^{-3}$	0.094

注: 转动角度正方向代表逆时针旋转, 负方向代表顺时针。

### 2.3 载荷方向不确定性的 RTO 算法

$\partial C(\theta)/\partial \rho$  的绝对值越大, 说明刚度对设计变量的变化越敏感, 即最敏感加载条件。将区间边界

点  $\theta = \theta_0 + \theta_{\text{cwo}}$  和  $\theta = \theta_0 - \theta_{\text{cwo}}$  作为可能的最敏感加载条件。将式(13)对  $\theta$  求导, 得到  $\partial C(\theta)/\partial \rho$  随  $\theta$  的变化情况, 取值 0 时为  $\partial C(\theta)/\partial \rho$  的极值点, 落在不确定区间极值点也是可能的最敏感加载条件。

$$\frac{\partial^2 C(\theta)}{\partial \theta \partial \rho_e} = \frac{\partial^2 C_0}{\partial \theta \partial \rho_e} + \frac{\partial^3 C_0}{\partial \theta^2 \partial \rho_e} \Delta \theta + \frac{1}{2} \frac{\partial^4 C_0}{\partial \theta^3 \partial \rho_e} \Delta \theta^2 = 0 \quad (17)$$

其中常数项和一次项系数见式(15), 二次项系数为

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 C_0}{\partial \theta^3 \partial \rho_e} &= -2p \rho_e^{p-1} \left( 3 \frac{\partial \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_e}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_e}{\partial \theta^2} + \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_e \frac{\partial^3 \mathbf{u}_e}{\partial \theta^3} \right) = \\ &= -2p \rho_e^{p-1} \left( -3 \frac{\partial \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{u}_e}{\partial \theta} - \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_e \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial \theta} \right) = -4 \frac{\partial C_0^2}{\partial \theta \partial \rho_e}\end{aligned}\quad (18)$$

由于优化问题是最小化问题, 灵敏度应是负值, 因此选取以上加载条件时,  $\partial C(\theta)/\partial \rho$  数值最小的数作为设计变量更新的灵敏度值。

本文采用优化准则法作为优化方法, 每一步设计变量的更新遵循规则为

$$\rho_e^{\text{new}} = \begin{cases} \max(\rho_{\min}, \rho_e - m) & (\rho_e B_e^\eta < \max(\rho_{\min}, \rho_e - m)) \\ \rho_e B_e^\eta & (\max(\rho_{\min}, \rho_e - m) < \rho_e B_e^\eta < \min(1, \rho_e + m)) \\ \min(1, \rho_e + m) & (\min(1, \rho_e + m) < \rho_e B_e^\eta) \end{cases} \quad (19)$$

式中  $\eta$  为数值阻尼系数, 取  $\eta = 1/2$ ,  $m$  为最大步长, 取  $m = 0.2$ ;  $B_e$  可表示为

$$B_e = -\frac{\partial C}{\partial \rho_e} / \lambda \frac{\partial V}{\partial \rho_e} \quad (20)$$

式中  $\lambda$  为通过二分法找到的拉格朗日乘子,  $\partial C/\partial \rho$  为灵敏度。

## 3 数值算例

### 3.1 简单柱结构模型

图 1 所示结构其余参数不变, 分为 80 × 80 个四节点平面应力单元, 过滤半径取 1.5。

底部边界固定, 顶部中心处施加集中载荷  $F=20$  kN, 方向分别为  $(270^\circ, 5^\circ, 5^\circ)$ 、 $(270^\circ, 5^\circ, 10^\circ)$ 、 $(265^\circ, 5^\circ, 5^\circ)$  和  $(265^\circ, 5^\circ, 15^\circ)$ , 并与  $(270^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$  和  $(265^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$  结果对比, 优化结果如图 2 所示。

可以看出, 为了适应集中载荷方向的扰动, RTO 方法得到的结构横向更宽, 结构形式与文献 [10, 11] 一致; 名义载荷和不确定区间均对称时结构才对称。

为了说明载荷不确定性的 RTO 算法结果对于载荷的扰动更具抗干扰性, 对优化结果施加名义及

扰动后的载荷,结果列入表2。由表2可知,(1)确定性拓扑优化收敛速度更快,名义载荷下的柔顺度更小;(2)不确定区间越大,收敛速度越慢,名义载荷下的柔顺度越大;(3)与载荷确定的拓扑优化相比,RTO算法的结果在载荷方向改变后,柔顺度的变化量更小,说明该结构对载荷方向的改变不敏感,抗扰动能力更强。

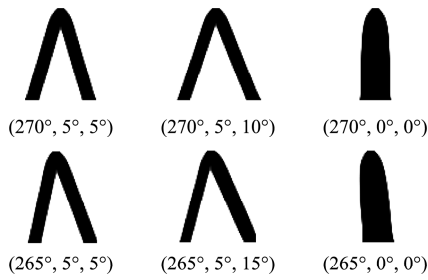


图2 简单柱结构载荷方向不确定性和确定性拓扑优化结果  
Fig.2 Topology optimization results of simple column structures with uncertain load direction uncertainty and deterministic load direction

表2 简单柱结构模型拓扑优化结果及载荷方向变化后结构的柔顺度及其变化率

Tab.2 Topology optimization results of simple column structures and compliance changes after the load direction change

载荷类型	柔顺度 /J	迭代次数	角度 /°	变化量 /J	变化率 /%
(270°, 5°, 5°)	1.1434	27	-5	0.0455	3.79
			5	0.0455	3.79
(270°, 5°, 10°)	1.2196	81	-5	0.0048	0.39
			10	0.1901	15.59
(270°, 0°, 0°)	1.0371	23	-5	0.1800	17.36
			10	0.7146	68.9
(265°, 5°, 5°)	1.1470	27	-5	0.0610	5.31
			5	0.0330	2.87
(265°, 5°, 15°)	1.2130	47	-5	0.0040	0.33
			15	0.4382	36.13
(265°, 0°, 0°)	1.0442	18	-5	0.1959	18.76
			15	1.5885	152.13

注:转动角度正方向代表逆时针旋转,负方向代表顺时针。

### 3.2 均布载荷梁结构模型

梁结构尺寸如图3所示,左侧支点固定铰支,右侧支点滑动铰支,结构上边界受均布载荷,大小为  $F=1200$  kN。梁设计域划分成  $120 \times 40$  个单元,薄板厚度为 10 mm,其余参数同算例 3.1。分别取体积约束为 0.3,0.4,0.5 和 0.6,不确定性载荷方向  $(270^\circ, 10^\circ, 10^\circ)$ ,优化结果及对应的确定性

结果如图4所示。可以看出,两种优化结果的主要承载结构都是一个拱形,并在两端各有若干较小的拱形,但在细节上有一定差异。确定性载荷没有方向上的扰动,结构只需要承受竖直向下的载荷,因此结构的大拱形较为圆润,以便更好地承载,小拱形数量较少,且倾斜程度较小。RTO算法的结果由于考虑了载荷在方向上的扰动,大拱形的主干分裂成多个较小的分支,最下方的分支接近于三角形,两个较大分支间呈X形,并由其他的分支加固,较小的拱形结构数量较多,倾斜程度较大,这些特征都是为了更好地抵抗横向的载荷。

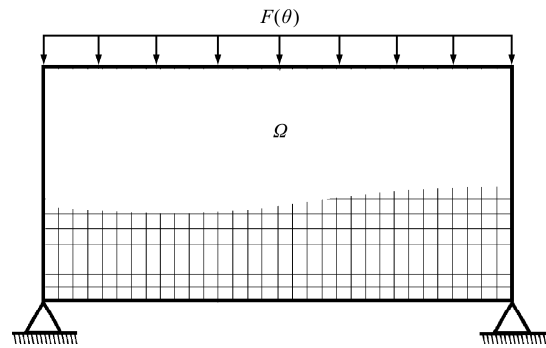


图3 梁结构模型设计区域  
Fig.3 Design domain of beam structure model

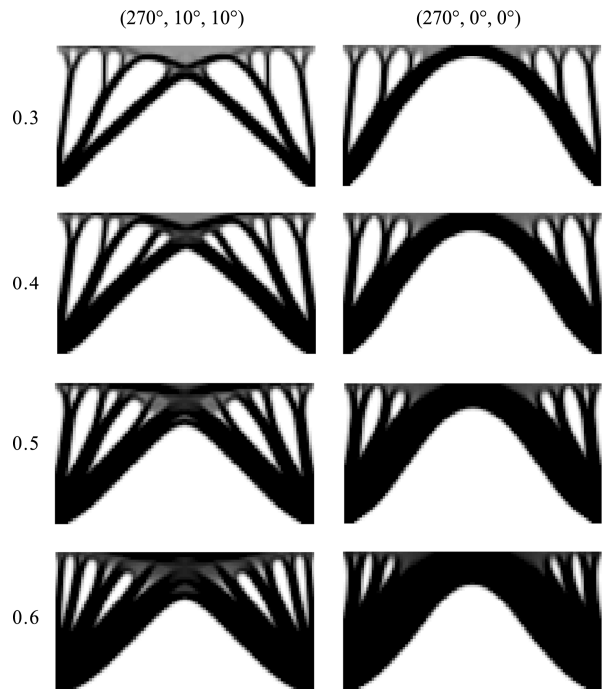


图4 梁结构模型拓扑优化结果  
Fig.4 Topology optimization results of beam structure model

为展示两种优化方式的不同,通过改变载荷方向得到表3。由表3可知,RTO算法收敛速度较慢;在名义载荷处确定性拓扑优化的结果刚度更大,而RTO结果变化量更小,对载荷方向的扰动

更具稳健性;体积约束较小的情况下,RTO结果的稳健性更明显,但在名义载荷处损失的刚度更大,原因是材料较少的情况下,设计空间较大,设计多样性更强。

表3 Michell梁结构模型拓扑优化结果及载荷方向变化后结构的柔顺度及其变化率  
Tab.3 Topology optimization results of Michell-type structure model and compliance changes after the load direction change

体积约束	载荷类型	优化结果		载荷方向改变 5°		载荷方向改变 10°	
		迭代次数	柔顺度/J	变化量/J	变化率/%	变化量/J	变化率/%
0.3	(270°,10°,10°)	103	3288.3	48.0	1.45	190.5	5.77
	(270°,0°,0°)	38	2826.6	369.5	13.08	1466.9	51.91
0.4	(270°,10°,10°)	64	2492.1	28.29	1.13	112.29	4.51
	(270°,0°,0°)	21	2398.7	44.01	1.83	481.6	21.12
0.5	(270°,10°,10°)	63	2062.9	26.21	1.26	108.79	5.27
	(270°,0°,0°)	40	2012.8	50.27	2.50	198.3	9.87
0.6	(270°,10°,10°)	51	1930.4	14.91	0.77	59.20	3.06
	(270°,0°,0°)	37	1865.1	25.08	1.34	99.55	5.34

## 4 结论

本文研究了考虑外载荷方向不确定性下的稳健性连续体拓扑优化。首先使用区间变量描述外载荷方向不确定性问题,并建立了优化数学模型。通过使用旋转矩阵的方式描述了名义载荷方向上的扰动,并利用旋转矩阵导数的特殊性质和二阶泰勒展开式求解灵敏度。最后运用 SIMP 模型和优化准则法对考虑外载荷方向不确定性的连续体结构进行拓扑优化。通过两个数值算例,将 RTO 方法结果与确定性优化结果进行对比分析,证明了该方法在载荷方向不确定性问题上的可行性。研究结果如下。

(1) RTO 方法和确定性优化结果的结构形式有较大的不同,RTO 优化结果有更多的分叉作为传力路径,结构能在载荷方向发生变动时,仍然有较大的刚度抵抗变形。

(2) 确定性优化结果刚度更大。这是因为 RTO 方法要考虑结构的稳健性,因此将部分材料用于构筑更多的传力路径,这会损失部分刚度。

(3) 载荷方向变动后,RTO 结果的变化率更小,说明设计结果在载荷方向上具有稳健性。

(4) 二阶泰勒展开式近似表示任意角度加载条件,每一个迭代步只需求解两次有限元,大大提高了计算效率。因此,本文提供的方法具有收敛速度快的优势。

(5) 在体积约束严格的情况下采用 RTO 方法,得到的优化结果对载荷方向变动的抵抗能力提升更明显。

## 参考文献(References):

- [1] 张磊,邱志平.基于协同优化方法的多学科非概率可靠性优化设计[J].南京航空航天大学学报,2010,42(3):267-271.(ZHANG Lei, QIU Zhi-ping. Multi-disciplinary non-probabilistic reliability optimization Based on collaborative optimization method[J]. *Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics*, 2010,42(3):267-271. (in Chinese))
- [2] Qiu Z P, Huang R, Wang X J, et al. Structural reliability analysis and reliability-based design optimization:Recent advances[J]. *Science China (Physics, Mechanics & Astronomy)*, 2013,56(9):1611-1618.
- [3] 元战,罗阳军.基于凸模型的结构非概率可靠性优化[J].力学学报,2006,38(6):807-815.(KANG Zhan, LUO Yang-jun. On structural optimization for non-probabilistic reliability based on convex models[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2006,38(6):807-815. (in Chinese))
- [4] Beyer H G, Sendhoff B. Robust optimization—A comprehensive survey[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007,196(33-34):3190-3218.
- [5] 元战,程耿东.非确定性结构静态特性稳健优化设计[J].力学学报,2006,38(1):57-65.(KANG Zhan, CHENG Geng-dong. Structural robust design concerning static and dynamic performance based on perturbation stochastic finite element method[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2006,38(1):57-65. (in Chinese))
- [6] 元战,程耿东.基于随机有限元的非线性结构稳健性优化设计[J].计算力学学报,2006,23(2):129-135.(KANG Zhan, CHENG Geng-dong. Structural robust design based on perturbation stochastic finite element method[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2006,23(2):129-135. (in Chinese))
- [7] Ben Tal A, Nemirovski A. Robust truss topology design via semidefinite programming[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 1997,7(4):991-1016.
- [8] Guest J K, Igusa T. Structural optimization under uncertain loads and nodal locations[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2008,198(1):116-124.
- [9] 崔明涛,陈建军,姜培刚.随机参数连续体结构的动力学拓扑优化[J].应用力学学报,2005,22(2):237-242,336.(CUI Ming-tao, CHEN Jian-jun, JIANG

- Pei-gang. Optimal dynamic topology design of continuum structure with random parameters [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2005, **22**(2): 237-242, 336. (in Chinese))
- [10] de Gournay F, Allaire G, Jouve F. Shape and topology optimization of the robust compliance via the level set method [J]. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 2008, **14**(1): 43-70.
- [11] Csébfalvi A. Robust topology optimization algorithm; Benchmark results [A]. 12<sup>th</sup> Proceedings of International Conference on Computational Structures Technology [C]. 2014.
- [12] Kang Z, Luo Y J. Non-probabilistic reliability-based topology optimization of geometrically nonlinear structures using convex models [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009, **198**(41-44): 3228-3238.
- [13] 罗阳军, 亢战, 吴子燕. 考虑不确定性的柔性机构拓扑优化设计 [J]. *机械工程学报*, 2011, **47**(1): 1-7. (LUO Yang-jun, KANG Zhan, WU Zi-yan. Topology optimization design of compliant mechanisms under uncertainties [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2011, **47**(1): 1-7. (in Chinese))
- [14] Dunning P D, Kim H A, Mullineux G. Introducing loading uncertainty in topology optimization [J]. *AIAA Journal*, 2011, **49**(4): 760-768.
- [15] Liu J, Wen G L. Continuum topology optimization considering uncertainties in load locations based on the cloud model [J]. *Engineering Optimization*, 2018, **50**(6): 1041-1060.
- [16] Wang H, Cheng W M, Zhang M, et al. Non-gradient robust topology optimization method considering loading uncertainty [J]. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 2021, **46**(12): 12599-12611.
- [17] Wang D, Gao W F. Robust topology optimization under load position uncertainty [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2019, **120**(11): 1249-1272.

## Robust topology optimization considering the uncertainty of load direction

FEI Chen\*, WANG Xiao-tuo, NI Cheng-gong, SUN Yan, TIAN Bin, YANG Yan-shan  
(Smart Agriculture College, Suzhou Polytechnic Institute of Agriculture, Suzhou 215008, China)

**Abstract:** Uncertainty of load is a common problem in the engineering field. In this paper, the robust topology optimization of a continuum with uncertain load directions was studied. Firstly, interval variables were used to describe the directional uncertainty. Subsequently, the disturbance in the direction of the nominal load was described by using the rotation matrix, and its sensitivity in any direction was obtained with the second-order Taylor expansion and the first and second derivatives of the compliance with respect to the angle of the nominal load by means the special property of the derivative of the rotation matrix. Finally, the SIMP model and the optimality criterion method (OC) were used to optimize the topology of the continuum with uncertain load directions. The optimization results obtained by this method showed that the compliances was insensitivity to the change of the load directions that the structural stiffness was more robust to external load in different directions.

**Key words:** robust topology optimization; load directions uncertainty; SIMP method; OC method