

DOI: 10.7511/jslx20221005002

求解双曲守恒律的修正模板近似的五阶 WENO 格式

郭 城, 王亚辉*

(郑州师范学院 数学与统计学院 数学系, 郑州 450044)

摘要:针对经典的五阶加权本质无振荡(WENO)格式在间断附近耗散过大以及临界点不能保精度的问题,本文提出了一种新的修正模板近似方法。改进了经典五阶 WENO-JS 格式中各候选子模板上数值通量的二阶多项式逼近,通过加入三次修正项使模板逼近达到四阶精度,并且通过引入可调函数 φ 使得新的格式具有 ENO 性质,理论分析新的格式具有保精度特性,通过一系列数值算例说明了新格式的高效性。

关键词: 双曲守恒律; WENO; 修正模板; 非线性权

中图分类号: O242.1

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2024)03-0564-08

1 引言

加权本质无振荡(WENO)格式因其在光滑区域的高精度和在间断附近的本质无振荡特性而广泛应用于双曲守恒律的数值求解当中。Harten 等^[1,2]首先介绍了有限体积 WENO 格式。该格式让所有候选子模板上 r 阶近似通量做加权组合, 在光滑区域实现 $(r+1)$ 阶精度, 同时在间断附近保持基本非振荡特性。Jiang 等^[3]发展了经典的有限差分 WENO 格式(WENO-JS)。而且该格式已成为求解包含强间断和复杂光滑解结构的多维问题的一种非常成功的方法。然而, Henrick 等^[4]发现五阶 WENO-JS 格式在临界点处不能保精度, 通过设计一个映射函数, 使 WENO-JS 格式的权重满足充分条件, 从而发展了五阶 WENO-M 格式。Borges 等^[5]提出了另一种五阶 WENO 格式(WENO-Z), 即利用高阶全局光滑度指示子来计算权重。由于 WENO-M 和 WENO-Z 格式分配给间断模板的权重更大, 所以二者都在解决间断问题时可以获得比 WENO-JS 格式更高分辨率的结果。而且 WENO-Z 格式的 CPU 成本几乎与 WENO-JS 格式相同, 而 WENO-M 格式比 WENO-JS 格式增加了约 25%。后来, Kim 等^[6]通过使用基于 L^1 范数的光滑度指示子发展了 WENO-NS 格式, 并通过提出可调非线性权

重进一步改进了 WENO-NS 格式, 得到的 WENO-P 格式即使在临界点附近也具有五阶精度, 但数值结果依赖于两个可调参数。另一方面, 一些学者^[7-9]将在计算 WENO 权重时防止被零除的参数 ϵ 定义为网格尺度 Δx 的函数, 以便在临界点获得最优收敛阶。然而, 这种格式不具有尺度不变特性, 并且容易产生数值振荡。最近, Zeng 等^[10]提出了摄动 WENO(P-WENO)格式, 通过用 WENO-Z 格式的权重加权扰动候选通量。P-WENO 格式即使在临界点也满足五阶收敛的充分必要条件。

为了解决传统五阶 WENO-JS 格式在间断附近的高耗散以及临界点不能保精度的相关问题, 本文提出了一种改进的五阶 WENO 格式。与文献[10]只给出网格界面处的扰动候选通量不同, 学者们进一步构造了每个候选模板上数值通量的扰动三次多项式近似, 即改进了经典五阶 WENO-JS 格式中各候选子模板上数值通量的二阶多项式逼近, 通过加入三次修正项使模板逼近达到四阶精度, 并且也给出了具有四阶精度近似的候选子模板数值通量。由于候选数值通量的高阶校正项是与整个全局模板有关的, 所以在处理一些带有强激波与强间断的问题时, 不可避免地会产生数值振荡, 为了使得新发展的格式具有无振荡的 ENO 性质, 本文引入了一个类似文献[10-12, 18]的可调函数来限制高阶修

收稿日期: 2022-10-05; 修改稿收到日期: 2022-12-24.

基金项目: 国家自然科学基金(12071470); 河南省高等学校重点科研项目(22B110020)资助。

作者简介: 王亚辉*(1991-), 男, 博士, 讲师(E-mail: hlg_cfd2014@163.com).

引用本文: 郭 城, 王亚辉. 求解双曲守恒律的修正模板近似的五阶 WENO 格式[J]. 计算力学学报, 2024, 41(3): 564-571.

GUO Cheng, WANG Ya-hui. Fifth-order modified stencil WENO schemes for hyperbolic conservation laws[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2024, 41(3): 564-571.

正项。本文将发展的格式称为 WENO-MS 格式,其中 MS 代表修正模板。并且通过理论分析,证明了新格式在包括临界点的光滑区域也具有五阶精度。数值实验表明,与 WENO-JS 和 WENO-Z 格式相比,WENO-MS 格式可以获得更好更显著的结果,而且其 CPU 成本与 WENO-JS 相差不多。

2 五阶 WENO 格式综述

首先介绍一维标量守恒律

$$u_t(x,t) + f_x(u(x,t)) = 0 \quad (1)$$

的五阶 WENO 有限差分格式。设 $\{I_j\}$ 是给定计算区域的一个分割,第 j 个单元 $I_j := [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ 。 I_j 的中心 $x_j = \frac{1}{2}(x_{j-1/2} + x_{j+1/2})$, 函数 f 在 x_j 的值为 $f_j = f(x_j)$ 。假设网格点是均匀分布,单元长度 $\Delta x = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$ 。为了构造方程(1)的守恒有限差分格式,如文献[13]所示,通过引入如下满足式(2)的隐函数 $h(x)$ 定义数值通量,

$$f(x) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} h(\xi) d\xi \quad (2)$$

对方程(2)求关于 x 的导数

$$f_x(x) = \frac{1}{\Delta x} [h(x + \Delta x/2) - h(x - \Delta x/2)]$$

因此,等式(1)可由常微分方程组近似,其中空间导数由守恒有限差分近似,其近似半离散形式为

$$\frac{du_j}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} (\hat{f}_{j+1/2} - \hat{f}_{j-1/2})$$

式中 $u_j(t)$ 为对点值 $u(x_j, t)$ 的数值近似,而 $\hat{f}_{j\pm 1/2}$ 为相容的数值通量,并且是 $h(x_{j\pm 1/2})$ 的高阶近似,即 $\hat{f}_{j\pm 1/2} = h(x_{j\pm 1/2}) + O(\Delta x^5)$ 。

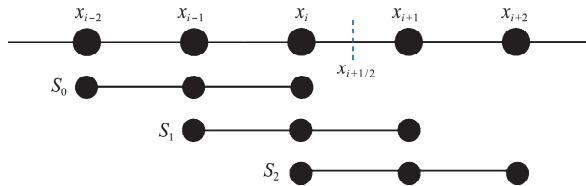


图 1 五阶 WENO 数值通量模板

Fig. 1 Stencils for the fifth-order WENO numerical flux

每个网格点上采用如下形式的 Lax-Friedrichs 分裂^[2],即 $f^\pm(u_j) = \frac{1}{2}(f(u_j) \pm \alpha u_j)$, 其中 $\alpha = \max_j |f'(u)|$ 限制在 u 的相关范围内。WENO 格式从给定的 f_j^\pm 得到高阶数值通量 $\hat{f}_{j+1/2}^\pm$ 。最终的数值通量为 $\hat{f}_{j+1/2} = \hat{f}_{j+1/2}^+ + \hat{f}_{j+1/2}^-$ 。由于 $\hat{f}_{j+1/2}^+$ 和 $\hat{f}_{j+1/2}^-$ 的公式对于 $x_{j+1/2}$ 是对称的,下文只描述如何计算 $\hat{f}_{j+1/2}^+$ 。为了简单起见,省略上标 $+$ 。

2.1 五阶 WENO 格式

对于经典的五阶 WENO 格式^[5],为了获得 $\hat{f}_{j+1/2}$,使用一个全局的 5 点模板,该模板分为三个 3 点子模板,如图 1 所示。通过使用等式(2),为每个子模板构造满足 $\hat{f}_x^{(k)} = h(x) + O(\Delta x^3)$ ($k \in \{0, 1, 2\}$) 的数值通量多项式近似。三阶候选子模板数值通量 $\hat{f}_{j+1/2}^k$ 由下式给出

$$\begin{cases} \hat{f}_{j+1/2}^0 = \frac{1}{3}f_{j-2} - \frac{7}{6}f_{j-1} + \frac{11}{6}f_j \\ \hat{f}_{j+1/2}^1 = -\frac{1}{6}f_{j-1} + \frac{5}{6}f_j + \frac{1}{3}f_{j+1} \\ \hat{f}_{j+1/2}^2 = \frac{1}{3}f_j + \frac{5}{6}f_{j+1} - \frac{1}{6}f_{j+2} \end{cases}$$

候选子模板组合起来定义 WENO 格式的数值通量为 $\hat{f}_{j+1/2} = \sum_{k=0}^2 \omega_k \hat{f}_{j+1/2}^k$ 。其中非线性权重 ω_k 定义为

$$\omega_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}, \alpha_k = \frac{d_k}{(\epsilon + \beta_k)^2} \quad (k=0,1,2) \quad (3)$$

式中 常数 d_k 称为理想权重,其值为 $d_0 = \frac{1}{10}$, $d_1 = \frac{3}{5}$, $d_2 = \frac{3}{10}$ 。式(3)的 $0 < \epsilon \ll 1$ 是为防止被零除而引入的小正参数。Jiang 等^[3]提出的光滑度指示子的具体形式为

$$\begin{cases} \beta_0 = \frac{1}{4}(f_{j-2} - 4f_{j-1} + 3f_j)^2 + \\ \frac{13}{12}(f_{j-2} - 2f_{j-1} + f_j)^2 \\ \beta_1 = \frac{1}{4}(f_{j-1} - f_{j+1})^2 + \frac{13}{12}(f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1})^2 \\ \beta_2 = \frac{1}{4}(3f_j - 4f_{j+1} + f_{j+2})^2 + \\ \frac{13}{12}(f_j - 2f_{j+1} + f_{j+2})^2 \end{cases}$$

Borges 等^[5]提出了一个 WENO-Z 权

$$\omega_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}, \alpha_k = d_k \left[1 + \left(\frac{\tau_5}{\epsilon + \beta_k} \right)^q \right] \quad (k=0,1,2) \quad (4)$$

式中 $\epsilon = 10^{-40}$, $\tau_5 = |\beta_2 - \beta_0|$ 是一个五阶参考光滑度量因子,其使非线性权重 ω_k 向最优权 d_k 靠近的速度比 J-S 权快。其中 $q \geq 1$,用来调控数值耗散,由于 WENO-Z 相比于 WENO-JS 格式增大了欠光滑子模板上的权重,因此其数值耗散更低,分辨率更高。当幂 $q = 2$ 时,WENO-Z 格式在一阶临界点处可以达到五阶收敛精度,但在间断附近耗散更大,当 $q = 1$ 时,耗散最小,但是在一阶临界点附近只有四阶收敛精度。由于五阶 WENO 格式要达

到五阶收敛精度阶,其权重要满足

$$\omega_k = d_k + O(\Delta x^3) \quad (5)$$

一个不那么耗散的方法是设计一个足够的高阶参考光滑探测子,并且总是使用幂 $q=1$ 。

3 修正五阶 WENO 格式

将三阶修正项引入候选子模板逼近多项式 $\tilde{f}^{(k)}(x)$ 中,给出了一个新的改进的 WENO 格式。本文在候选模板多项式 $\tilde{f}^{(k)}(x)$ 中加入三次修正项 $p^k(x)$,记

$$\tilde{f}_{j+1/2}^k = \tilde{f}_{j+1/2}^k + p^k(x_{j+1/2}) \quad (6)$$

使得修正后的多项式 $\tilde{f}_{j+1/2}^k$ 在图 1 中各个候选子模满足与 $h(x)$ 的四阶精确近似, $\tilde{f}_{j+1/2}^k = h_{j+1/2} + O(\Delta x^4)$ ($k=0,1,2$)。第一个约束要求为

$$f_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i - \frac{\Delta x}{2}}^{x_i + \frac{\Delta x}{2}} \tilde{f}^k(x) dx \quad (j=j+k-2, j+k-1, j+k)$$

由于 $\tilde{f}^{(k)}(x)$ 已满足式(2),所以修正项 $p^k(x)$ 满足式(7)

$$\int_{x_i - \frac{\Delta x}{2}}^{x_i + \frac{\Delta x}{2}} p^k(x) dx = 0 \quad (j=j+k-2, j+k-1, j+k) \quad (7)$$

事实上,对于满足式(7)的修正项 $p^k(x)$ 有多种选择性。本文采用简单的三阶矩修正多项式

$$p^k(x) = a_k(x-x_{j+k-2})^3 + b_k(x-x_{j+k-1})^3 + c_k(x-x_{j+k})^3 \quad (8)$$

把式(8)代入式(7),得到 $a_k = c_k$, $b_k = -\frac{34}{5}c_k$ 。第二

个约束要求 $\tilde{f}_{j+1/2}^k$ 是 $h_{j+1/2}$ 的四阶近似,故

$$\tilde{f}_{j+1/2}^k = h_{j+1/2} + A_k f_{j+1/2}''' \Delta x^3 + p^k(x_{j+1/2}) = h_{j+1/2} + O(\Delta x^4)$$

式中 $A_0 = \frac{1}{4}$, $A_1 = -\frac{1}{12}$, $A_2 = \frac{1}{12}$ 。

进而得 $c_k = -\frac{5}{144}f_{j+1/2}'''$ 。则 $p^k(x)$ 的形式为

$$p^k(x) = -\frac{5}{144}f_{j+1/2}''' \left[(x-x_{j+k-2})^3 - \frac{34}{5}(x-x_{j+k-1})^3 + (x-x_{j+k})^3 \right]$$

若对 $f_{j+1/2}'''$ 作如下的差分近似

$$f_{j+1/2}''' = \frac{-f_{j-2} + 2f_{j-1} - 2f_{j+1} + f_{j+2}}{\Delta x^3} + O(\Delta x) \quad (9)$$

则 $p^k(x)$ 的最终形式为

$$p^k(x) = -\frac{5}{288\Delta x^3}(-f_{j-2} + 2f_{j-1} - 2f_{j+1} + f_{j+2}) \times \left[(x-x_{j+k-2})^3 - \frac{34}{5}(x-x_{j+k-1})^3 + (x-x_{j+k})^3 \right] \quad (k=0,1,2) \quad (10)$$

明显地,差分近似式(9)不影响 $\tilde{f}^k(x)$ 关于 $h(x)$ 的

四阶近似。最后,用式(10)修正的模板多项式(6)求在网格节点 $x_{j+1/2}$ 处的值,即修正模板的候选数值通量为

$$\begin{cases} \tilde{f}_{j+1/2}^0 = \frac{1}{3}f_{j-2} - \frac{7}{6}f_{j-1} + \frac{11}{6}f_j + \\ \quad \frac{1}{8}(-f_{j-2} + 2f_{j-1} - 2f_{j+1} + f_{j+2}) \\ \tilde{f}_{j+1/2}^1 = -\frac{1}{6}f_{j-1} + \frac{5}{6}f_j + \frac{1}{3}f_{j+1} - \\ \quad \frac{1}{24}(-f_{j-2} + 2f_{j-1} - 2f_{j+1} + f_{j+2}) \\ \tilde{f}_{j+1/2}^2 = \frac{1}{3}f_j + \frac{5}{6}f_{j+1} - \frac{1}{6}f_{j+2} + \\ \quad \frac{1}{24}(-f_{j-2} + 2f_{j-1} - 2f_{j+1} + f_{j+2}) \end{cases} \quad (11)$$

基于以上候选通量式(11),以及非线性权式(3,4)的新的 WENO-MS 格式为

$$\begin{cases} \tilde{f}_{j+1/2}^{\text{MS-JS}} = \sum_{k=0}^2 \omega_k \tilde{f}_{j+1/2}^k & (\text{WENO-MS-JS}) \\ \tilde{f}_{j+1/2}^{\text{MS-Z}} = \sum_{k=0}^2 \omega_k \tilde{f}_{j+1/2}^k & (\text{WENO-MS-Z}) \end{cases} \quad (12)$$

式中 MS 表示修正模板。

注 1 修正的候选通量式(11)依赖于整个五点模板,因此新的格式(12)对一些具有强激波或强间断问题求解时会丢失 ENO 性质。为了抑制强激波和间断区域内明显的数值振荡。引入一个可调函数 φ 限制式(11)最后一项的影响,使新发展的格式具有 ENO 性质。本文 φ 定义为

$$\varphi = 1 - [|\beta_0 - \beta_2| / (\beta_0 + \beta_2 + \epsilon)]^p \quad (p \geq 1)$$

注 2 在式(11)任意一式中加减 $\sum_{k=0}^2 d_k \tilde{f}_{j+1/2}^k$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{j+1/2}^{\text{MS}} - \tilde{f}_{j-1/2}^{\text{MS}} &= \sum_{k=0}^2 \omega_k^+ \tilde{f}_{j+1/2}^k - \sum_{k=0}^2 \omega_k^- \tilde{f}_{j-1/2}^k = \\ &\sum_{k=0}^2 d_k \tilde{f}_{j+1/2}^k - \sum_{k=0}^2 d_k \tilde{f}_{j-1/2}^k + \sum_{k=0}^2 (\omega_k^+ - d_k) \tilde{f}_{j+1/2}^k - \\ &\sum_{k=0}^2 (\omega_k^- - d_k) \tilde{f}_{j-1/2}^k = h_{j+1/2} - \frac{1}{60} \frac{d^5 f}{dx^5} \Big|_j \Delta x^5 - \\ &h_{j-1/2} + \frac{1}{60} \frac{d^5 f}{dx^5} \Big|_j \Delta x^5 + O(\Delta x^6) + \\ &\sum_{k=0}^2 (\omega_k^+ - d_k) (h_{j+1/2} + A_k \Delta x^4 + O(\Delta x^5)) - \\ &\sum_{k=0}^2 (\omega_k^- - d_k) (h_{j+1/2} + A_k \Delta x^4 + O(\Delta x^5)) = \\ &f' \Delta x + O(\Delta x^6) + \Delta x^4 \sum_{k=0}^2 A_k (\omega_k^+ - \omega_k^-) + \\ &\Delta x^5 \left[\sum_{k=0}^2 (\omega_k^+ - d_k) - \sum_{k=0}^2 (\omega_k^- - d_k) \right] \end{aligned}$$

事实上,因为等式(11)最后一项(无 φ)的贡献是

$O(\Delta x^3)$ 量级,通过最后两项可得修正模板 WENO-MS 格式满足最优收敛精度阶的充分必要条件为

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^2 A_k (\omega_k^+ - \omega_k^-) = O(\Delta x^2) \\ \omega_k^+ - d_k = O(\Delta x) \end{array} \right.$$

只需等式(12)的权重满足 $\omega_k = d_k + O(\Delta x^2)$ 。此条件将具有最优收敛精度的权重等式(5)的原始要求放宽一阶。WENO-MS 格式在无临界点的光滑区域具有最优收敛精度,而当 $q=1$ 时,WENO-MS-Z5 格式在一阶临界点附近只有 4 阶精度。另外由于 $q=1$ 的 WENO-MS-Z5 格式的耗散更小,所以接下来的数值算例中取 $q=1$ 。

4 数值测试

通过测试经典的数值算例验证 WENO-MS 格式(WENO-MS-JS 和 WENO-MS-Z) 的有效性。本文格式和算例均采用局部 Lax-Friedrichs 通量分裂,时间推进采用三阶 TVD-Runge-Kutta 方法^[13]。

4.1 标量问题

算例 1 线性方程。考虑以下线性对流方程

$$u_t + u_x = 0 \quad (-1 \leq x \leq 1, t \geq 0) \quad (13)$$

初值条件为 $u(x, 0) = u_0(x)$ 。首先在带有如下两组初值的线性对流方程(13)上验证 WENO-MS 格式的数值收敛阶。

$$u_0(x) = \sin(\pi x) \quad (14a)$$

$$u_0(x) = \sin[\pi x - \sin(\pi x)/\pi] \quad (14b)$$

时间步长为 $\Delta t = 0.6 \times (\Delta x)^{5/3}$ 。表 1 和表 2 分别显示 $t=2$ 时初值式(14a, 14b)的 L^1 误差和收敛阶。易知在不同格式的数值误差中,WENO-MS 格式的误差相对较小,WENO-JS5 的误差最大。另外在没有临界点的光滑区域所有格式都有五阶精度。相比之下,新的 WENO-MS 格式的性能优于 WENO-JS 和 WENO-Z 格式。

表 1 线性对流方程(13)在初值式(14a)下,
不同格式的 L^1 误差与收敛阶

Tab. 1 L^1 errors and convergence rates of different schemes for the linear advection Eq.(13) with the initial data Eq.(14a)

N	WENO-JS5		WENO-Z5		WENO-MS-JS5		WENO-MS-Z5	
	L^1 error (order)							
10	4.75E-2(-)	1.31E-2(-)	1.16E-2(-)	1.10E-2(-)				
20	2.57E-3(4.2)	3.40E-4(5.28)	3.32E-4(5.12)	3.13E-4(5.13)				
40	8.04E-5(5.00)	9.60E-6(5.15)	9.20E-6(5.17)	9.01E-6(5.12)				
80	2.44E-6(5.04)	2.56E-7(5.23)	2.50E-7(5.20)	2.44E-7(5.21)				
160	8.07E-8(4.92)	7.61E-9(5.07)	7.21E-9(5.11)	6.97E-9(5.13)				
320	2.47E-9(5.03)	2.38E-10(5.00)	2.16E-10(5.06)	2.06E-10(5.08)				

表 2 线性对流方程(13)在初值式(14b)下,
不同格式的 L^1 误差与收敛阶

Tab. 2 L^1 errors and convergence rates of different schemes for the linear advection Eq.(13) with the initial data Eq.(14b)

N	WENO-JS5		WENO-Z5		WENO-MS-JS5		WENO-MS-Z5	
	L^1 error (order)							
10	1.24E-1(-)	5.20E-2(-)	4.40E-2(-)	4.66E-2(-)				
20	1.44E-2(3.11)	3.52E-3(3.88)	1.85E-3(4.57)	1.75E-3(4.73)				
40	1.11E-3(3.70)	1.31E-4(4.75)	6.10E-5(4.92)	5.47E-5(5.00)				
80	4.28E-5(4.70)	3.58E-6(5.19)	1.56E-6(5.29)	1.50E-6(5.19)				
160	1.43E-6(4.90)	1.16E-7(4.95)	4.41E-8(5.14)	4.23E-8(5.15)				
320	4.15E-8(5.11)	3.57E-9(5.02)	1.38E-9(5.00)	1.32E-9(5.00)				

然后,通过求解带有复杂初值条件的线性对流方程(13)说明 WENO-MS 格式的高分辨率。初始条件如下

$$u_0(x) =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{6}[G(x, \beta, z - \delta) + G(x, \beta, z + \delta) + 4G(x, \beta, z)] & (x \in [-0.8, -0.6]) \\ 1 & (x \in [-0.4, -0.2]) \\ 1 - |10(x - 0.1)| & (x \in [0, 0.2]) \\ \frac{1}{6}[F(x, \alpha, a - \delta) + F(x, \alpha, a + \delta) + 4F(x, \alpha, a)] & (x \in [0.4, 0.6]) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (15)$$

式中 $G(x, \beta, z) = e^{-\beta(x-z)^2}$

$$F(x, \alpha, a) = \sqrt{\max(1 - \alpha^2(x-a)^2, 0)}$$

$$a = 0.5, z = -0.7, \delta = 0.005$$

$$\alpha = 10, \beta = \ln 2 / (36\alpha^2)$$

时间步长 $\Delta t = 0.6 \Delta x$ 计算到最终时间为 $t=6$ 。数值结果如图 2 所示。结果表明,WENO-MS 格式的分辨率高于 WENO-JS5 和 WENO-Z5 格式,特别是在间断面附近。所有改进的五阶 WENO 格式都比 WENO-JS5 格式的分辨率要高,其中 WENO-MS-Z5 格式的耗散最小。

4.2 一维 Euler 系统

本节给出双曲守恒律方程的一些数值结果。首先考虑一维欧拉方程组

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0$$

式中 $\mathbf{U} = (\rho, \rho u, E)^T$, $\mathbf{F}(\mathbf{U}) = [\rho u, \rho u^2 + p, u(E + p)]^T$ 。状态方程 $p = (\gamma - 1)(E - \frac{1}{2}\rho u^2)$ 。其中 ρ , u , p 和 E 分别为密度、速度、压强和总能, γ 为比容比。

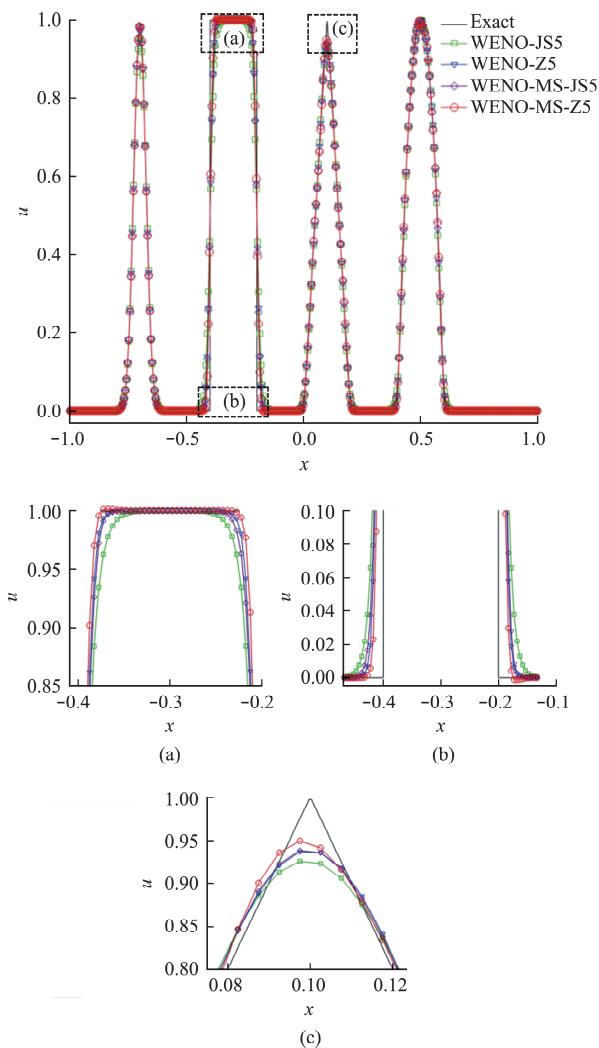


图2 线性对流方程(13)在初值式(15)下不同格式的数值解与解析解的比较 $t=6, N=400$

Fig. 2 Comparison of analytical solution with numerical solutions of the linear advection Eq. (13) with initial value Eq. (15) at $t=6$ with 400 grid points

算例2 1D 黎曼问题。考虑具有如下形式的几个经典初值问题

$$U(x,0) = \begin{cases} U_L & (x \leq 0) \\ U_R & (x > 0) \end{cases}$$

(1) Lax 激波管^[14,15]

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (0.445, 0.698, 0.3528) & (0 \leq x < 0.5) \\ (0.500, 0.000, 0.5710) & (0.5 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

式中 $\gamma = 1.4$, 网格尺度 $\Delta x = 0.005$, 计算到时间为 $t = 0.13$ 。不同格式关于密度场的数值结果与精确 Riemann 解进行了比较, 如图 3 所示。可以看出, WENO-MS-Z5 格式具有更高分辨率, 更好地捕捉了激波, 并且耗散最小。

(2) 冲击波相互作用^[14,15]

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1.000, 0.000, 1000) & (0 \leq x < 0.1) \\ (1.000, 0.000, 0.010) & (0.1 \leq x \leq 0.9) \\ (1.000, 0.000, 100) & (0.9 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

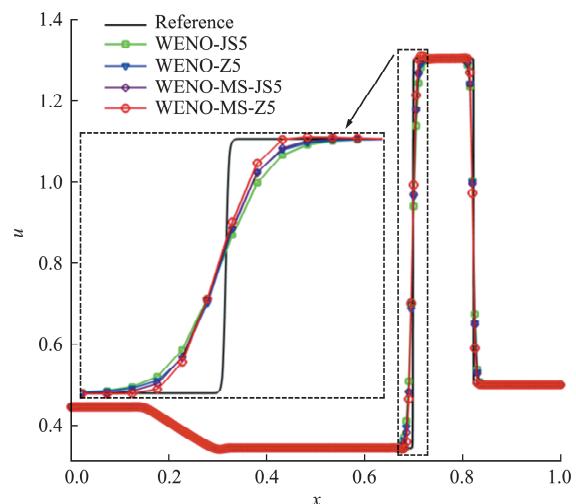


图3 Lax 激波管问题的数值密度结果,
 $t=0.13, N=200, \text{CFL}=0.6$

Fig. 3 Density contours of Lax shock tube problem on 200 grid points at $t=0.13$

本文用网格尺度 $\Delta x = 0.0025$ 计算到 $t = 0.038$ 。密度场的数值结果如图 4 所示。易知在接触间断处的耗散按 WENO-MS-Z, WENO-MS-JS, WENO-Z, WENO-JS 依次递减。

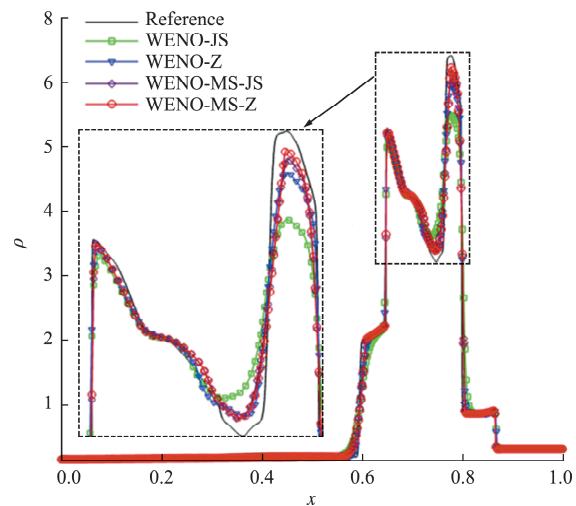


图4 冲击波相互作用的密度剖面和密度接触波的局部放大,
 $t=0.038, N=400, \text{CFL}=0.6$

Fig. 4 Density contours of shock wave interaction problem on 400 grid points at $t=0.038$

(3) 1D 激波等熵波作用(Shu-Osher 问题)^[13,19]。计算 $[-5, 5]$ 区域的近似解, 初始条件为

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (27/7, 4\sqrt{35}/9, 31/3) & (-5 \leq x < -4) \\ (1 + \epsilon \sin(\kappa x), 0, 1) & (-4 \leq x \leq 5) \end{cases}$$

式中 ϵ 和 κ 分别为熵波的振幅和波数, 本文设置 $\epsilon = 0.2$ 和 $\kappa = 5$ 。在这个问题中, 一个右移的超音速(Mach=3)激波与正弦波相互作用, 产生一个具有光滑结构和间断的流场。这股气流在波数高于初始密度变化波数 κ 的右行激波后面诱导波迹。由于精确解是未知的, 参考解是通过使用五阶

WENO-JS 格式在 6400 个网格点上获得的。图 5 给出了网格数 $N=400$ 下不同数值格式的密度剖面的数值结果与参考解的比较。所有的 WENO 格式都比 WENO-JS5 格式的耗散性小。WENO-MS 格式比 WENO-Z5 和 WENO-JS5 格式更好地捕捉了右行激波后面的高频波。

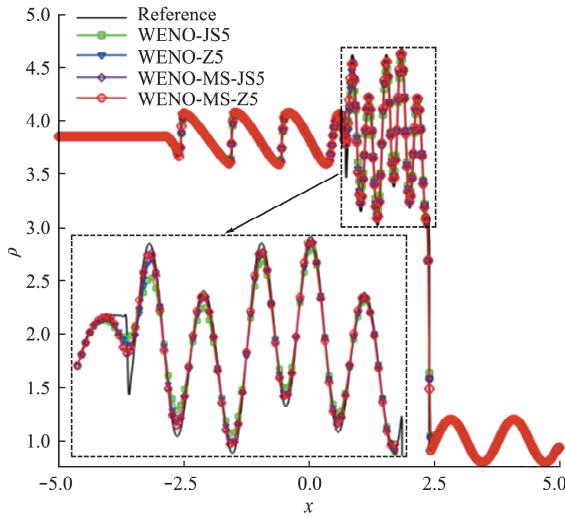


图 5 激波等熵波相互作用(Shu-Osher)的密度分布,
 $t=1.8, \text{CFL}=0.6, N=400$

Fig. 5 Density contours of shock isentropic wave interaction
(Shu-Osher) problem at $t=1.8, N=400$

4.3 二维 Euler 系统

考虑二维可压缩欧拉系统

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x + \mathbf{G}(\mathbf{U})_y = 0 \quad (16)$$

式中 $\mathbf{U}=(\rho, \rho u, \rho v, E)^T$

$$\mathbf{F}(\mathbf{U})=[\rho u, \rho u^2 + p, \rho u v, u(E+p)]^T$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{U})=[\rho v, \rho u v, \rho v^2 + p, v(E+p)]^T$$

$$p = (\gamma - 1)[E - \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2)]$$

式中 ρ, u, v, p 和 E 分别为密度、 x 和 y 坐标方向上的速度分量、压力和总能量。另外 \mathbf{U} 为守恒变量的向量, $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ 为 x 方向的通量分量, $\mathbf{G}(\mathbf{U})$ 为 y 方向的通量分量。

算例 3 2D Riemann 问题^[16]。计算域为 $[0, 1] \times [0, 1]$, 初始条件为

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (1.5, 0, 0, 1.5) & (0.8 \leq x \leq 1, 0.8 \leq y \leq 1) \\ (0.5323, 1.206, 0, 0.3) & (0 \leq x < 0.8, 0.8 \leq y \leq 1) \\ (0.138, 1.206, 1.206, 0.029) & (0 \leq x \leq 0.8, 0 \leq y < 0.8) \\ (0.5323, 1.206, 0, 0.3) & (0.8 < x \leq 1, 0 \leq y < 0.8) \end{cases}$$

采用 Dirichlet 边界条件, $\gamma = 1.4$ 。计算到时间为

$t = 0.8$ 。图 6 为网格尺度 $\Delta x = \Delta y = 1/800$ 的数值结果, 易得 WENO-MS 格式比 WENO-JS5, WENO-Z5 格式结构更为丰富, 耗散更少, 且分辨率更高。

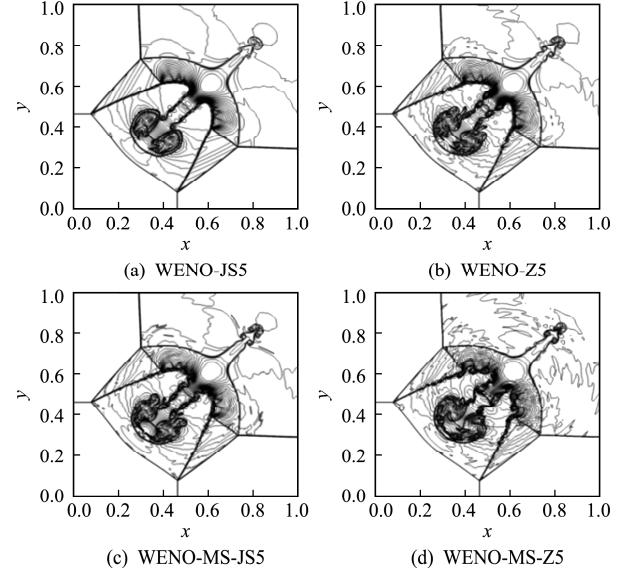


图 6 2D Riemann 问题的密度等值线,

$$\Delta x = \Delta y = 1/800, t = 0.8$$

Fig. 6 Density contours of 2D Riemann problem on
 $\Delta x = \Delta y = 1/800$ at $t = 0.8$

算例 4 Rayleigh-Taylor 不稳定^[17]。计算域为 $[0, 0.25] \times [0, 1]$, 初始条件为

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (2, 0, -0.025a \cos(8\pi x), 2y+1) & (0 \leq y < 0.5) \\ (2, 0, -0.025a \cos(8\pi x), y+1.5) & (0.5 \leq y < 1) \end{cases}$$

比热比 $\gamma = 5/3$ 。重力效应通过将源项 $S = (0, 0, \rho, \rho v)$ 添加到二维 Euler 方程(16)的右侧来引入。左右为反射边界条件, 顶部和底部边界设置为 $(\rho, u, v, p) = (1, 0, 0, 2.5)$ 和 $(\rho, u, v, p) = (2, 0, 0, 1)$ 。计算最终时间为 $t = 1.95$, 网格尺度 $\Delta x = \Delta y = 240$ 。图 7 显示 WENO-MS-Z5 格式比 WENO-JS5 和 WENO-Z5 格式数值计算结构更为丰富, 尤其是在界面上产生的涡流较多, 表明其耗散性最小。

算例 5 双马赫反射问题^[16]。初始一个右移马赫数为 10 的激波置于 $x = 1/6$ 处, 激波与 x 轴成 60° 角。在底部 $x=0$ 至 $x=1/6$ 的区域内, 为初始激波后流动赋值, 其余区域采用反射边界条件。左边界为初始激波后流动赋值。对于 $x=4$ 处的右侧边界都设置为零梯度边界条件。上边界用来描述马赫数为 10 的激波的精确运动。本文网格尺度 $\Delta x = \Delta y = 1/240$, 计算到时间 $t = 0.2$ 。图 8 比较了 WENO-MS 格式与 WENO-JS5 和 WENO-Z5 格式的数值结果。可以看出, WENO-MS-Z5 较好地解决了马赫杆附近的不稳定性问题。图 9

比较了 WENO-Z5 和 WENO-MS-Z5 格式在网格尺度 $\Delta x = \Delta y = 1/320$ 下的数值结果,发现 WENO-MS-Z5 格式具有较高的分辨率。

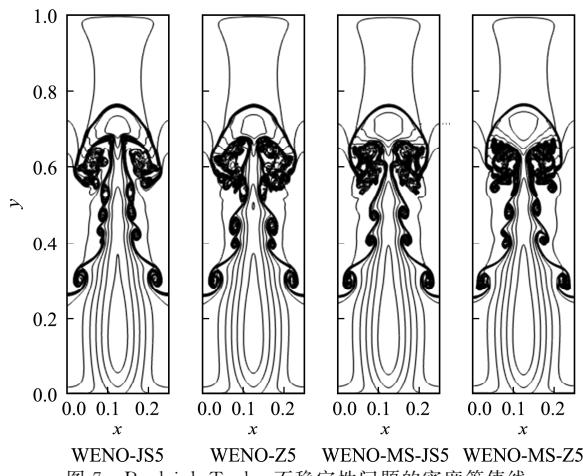


图 7 Rayleigh-Taylor 不稳定性问题的密度等值线
Fig. 7 Density contours of Rayleigh-Taylor instability problem

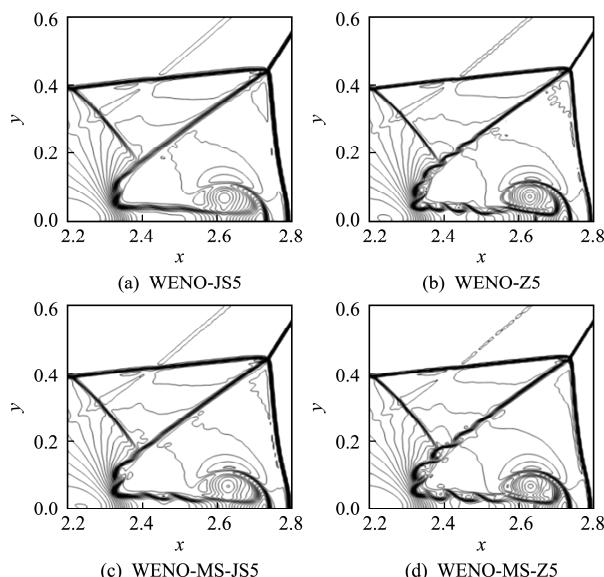


图 8 双马赫反射问题的密度等值线
Fig. 8 Density contours of double Mach reflection problem

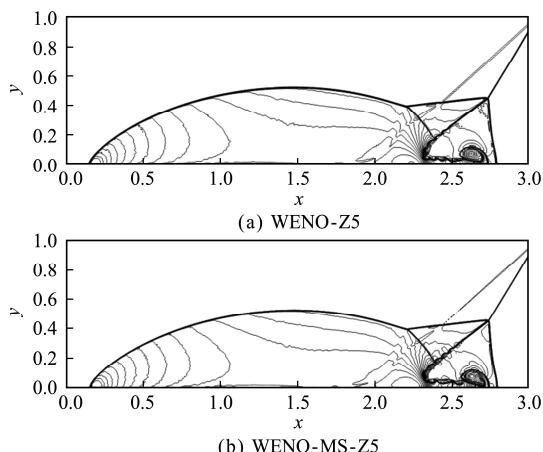


图 9 双马赫反射问题在 $t = 0.2$ 时的密度等值线,
网格点为 1280×320

Fig. 9 Density contours of double Mach reflection problem on
 1280×320 grid points at $t = 0.2$

5 结 论

基于传统的五阶 WENO-JS 格式,本文发展了求解双曲守恒律问题的修正模板 WENO 方法。通过加入高阶修正项使得经典 WENO-JS5 格式中各候选子模板上数值通量的重构多项式逼近阶为三阶,同时使模板逼近达到四阶,并且计算出了相应的修正子模板的候选通量。由于候选数值通量的高阶校正项是与整个全局模板有关的,所以在处理一些带有强激波与强间断的问题时,不可避免地会产生数值振荡,为了使得新发展的格式具有无振荡的 ENO 性质,在候选模板通量的修正项中引入一个可调函数 φ ,并且理论分析了新的格式具有五阶精度。并且给出了一系列一维和二维数值算例,验证了新格式的有效性。数值结果表明,与经典的 WENO-JS5,WENO-Z5 格式相比,新的格式具有较高的分辨率。

参考文献(References) :

- [1] Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws [J]. *Journal of Computational Physics*, 1997, **135**(2): 260-278.
- [2] Harten A, Engquist B, Osher S, et al. Uniformly high-order accurate non-oscillatory schemes, III [J]. *Journal of Computational Physics*, 1987, **71**(2): 231-303.
- [3] Jiang G S, Shu C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, **126**(1): 202-228.
- [4] Henrick A K, Aslam T D, Powers J M. Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: Achieving optimal order near critical points [J]. *Journal of Computational Physics*, 2005, **207**(2): 542-567.
- [5] Borges R, Carmona M, Costa B, et al. An improved WENO scheme for hyperbolic conservation laws [J]. *Journal of Computational Physics*, 2008, **227**(6): 3191-3211.
- [6] Kim C H, Ha Y, Yoon J. Modified non-linear weights for fifth-order weighted essentially non-oscillatory schemes [J]. *Journal of Scientific Computing*, 2016, **67**(1): 299-323.
- [7] Castro M, Costa B, Don W S. High order weighted essentially non-oscillatory WENO-Z schemes for hyperbolic conservation laws [J]. *Journal of Computational Physics*, 2011, **230**(5): 1766-1792.
- [8] Arandiga F, Baeza A, Belda A M, et al. Analysis of WENO schemes for full and global accuracy [J]. *SI-*

- AM Journal on Numerical Analysis*, 2011, **49**(2): 893-915.
- [9] Don W S, Borges R. Accuracy of the weighted essentially non-oscillatory conservative finite difference schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 2013, **250**:347-372.
- [10] Zeng F J, Shen Y Q, Liu S P. A perturbational weighted essentially non-oscillatory scheme [J]. *Computers and Fluids*, 2018, **172**:196-208.
- [11] 王亚辉.求解双曲守恒律方程的三阶修正模板 WENO 格式 [J]. *应用数学和力学*, 2022, **43**(2): 224-236. (WANG Ya-hui. A 3rd-order modified stencil WENO scheme for solution of hyperbolic conservation law equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(2):224-236. (in Chinese))
- [12] Wang Y H, Du Y L, Zhao K L, et al. Modified stencil approximations for fifth-order weighted essentially non-oscillatory schemes [J]. *Journal of Scientific Computing*, 2019, **81**(2):898-922.
- [13] Shu C W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, II [J]. *Journal of Computational Physics*, 1989, **83**(1):32-78.
- [14] Sod G A. A survey of several finite difference methods for nonlinear systems of hyperbolic conservation laws [J]. *Journal of Computational Physics*, 1978, **27**(1):1-31.
- [15] Lax P. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation [J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1954, **7**:159-193.
- [16] Woodward P, Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks [J]. *Journal of Computational Physics*, 1984, **54**(1):115-173.
- [17] Young Y N, Tufo H, Dubey A, et al. On the miscible Rayleigh-Taylor instability: Two and three dimensions [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2001, **447**(1): 377-408.
- [18] Wang Y H, Yuan L. A new 6th-order WENO scheme with modified stencils [J]. *Computers and Fluids*, 2020, **208**:104625.
- [19] 胡立军, 杜玉龙. 一种简单的精确捕捉接触间断的黎曼求解器 [J]. *计算力学学报*, 2022, **39**(6): 803-811. (HU Li-jun, DU Yu-long. A simple riemann solver accurate for contact discontinuity[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2022, **39**(6): 803-811. (in Chinese))

Fifth-order modified stencil WENO schemes for hyperbolic conservation laws

GUO Cheng, WANG Ya-hui*

(Mathematics Department, School of Mathematics and Statistics, Zhengzhou Normal University, Zhengzhou 450044, China)

Abstract: In order to solve the problems of the classical fifth-order weighted essentially non-oscillatory (WENO) scheme, such as the excessive dissipation near the discontinuity and the inaccurate preserving of the critical point, a new modified stencil approximation method is proposed. The second-order polynomial approximation of the numerical flux on each candidate sub-stencil in the classical fifth-order WENO-JS scheme is improved, and the stencil approximation reaches the fourth-order accuracy by adding a cubic correction term. The new scheme has ENO property by introducing adjustable function φ , and the theoretical analysis shows that the new scheme has accuracy-preserving property. A series of numerical examples show the efficiency of the new scheme.

Key words: hyperbolic conservation laws; WENO; modified stencil; nonlinear weights