

DOI: 10.7511/jslx20220915001

薄板几何非线性弯曲分析的深度能量法

彭林欣^{1,2}, 罗伟漫¹, 黄钟民^{*1}

(1. 广西大学 土木建筑工程学院, 南宁 530004;

2. 广西大学 广西防灾减灾与工程安全重点实验室, 工程防灾与结构安全教育部重点实验室, 南宁 530004)

摘要:发展了一种增量形式的深度能量法求解薄板几何非线性弯曲问题。根据最小势能原理和 Von-Karman 非线性理论, 构建以薄板势能为驱动的增量式深度神经网络模型。首先用网格离散薄板求解域, 通过 Python 读取网格数据计算 Hammer 积分点, 并以此作为训练集代入网络模型预测板的弯曲位移, 再将荷载分成一系列的荷载增量, 每个增量步中计算薄板势能作为神经网络的损失函数, 以最小化势能为目标, 结合 Adam 优化算法更新网络模型参数, 待势能取驻值后再继续下一个荷载步的计算。本文求解了不同形状、不同边界条件下薄板的几何非线性弯曲问题, 并将计算结果与文献解或有限元 Abaqus 解进行对比, 研究表明, 本文方法在求解薄板的几何非线性弯曲问题上具备有效性和准确性, 且增量式的神经网络模型能够减小计算内存, 有效提高计算效率和模型的稳定性。

关键词:几何非线性; 深度能量法; 增量式神经网络; Von-Karman 非线性理论

中图分类号: O317

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2024)03-0556-08

1 引言

板和壳是工程中常见的结构, 考虑非线性因素可以更好地分析该类结构的变形行为, 为工程应用提供参考。20世纪初, Von-Karman 建立了薄板大挠度方程组, 该体系因复杂性高而解析求解难度大, Timoshenko 等^[1]在其经典著作中详尽探讨了这一理论及其进展, 成为理解板壳结构行为的重要参考。Levy^[2]提出矩形薄板的挠度可以表示为正弦谐波的双系列, 给出了矩形薄板弯曲挠度的求解方案。Dai 等^[3]将伽辽金法应用于分析矩形板在复合载荷作用下的大挠度行为。Razdolsky 等^[4,5]修正了应力函数的表达式, 用计算机实现了 Levy^[2]的方法求解矩形板的大挠度弯曲问题, 并用打靶法求解了固支圆板的非线性微分方程。陈嵩涛等^[6]提出了几何非线性分析的高效高阶无网格法。Al-Shugaa 等^[7]采用 Ritz 方法分析了正交各向异性矩形板的大挠度弯曲问题。已有方法中, 直接求解高阶非线性偏微分方程无疑是十分困难的, 不仅计算过程复杂, 工作量巨大, 且适用范围有限。而有限元法不易构造高阶单元, 较难处理单元边界连续性

的问题。

除上述解法外, 近年来以神经网络为核心的深度学习技术在工程领域快速发展, 神经网络方法采用点离散求解域, 点与点之间无直接联系, 位移场具备连续性和可导性。根据通用近似定理^[8]几乎所有连续的非线性函数都可以通过全连接神经网络拟合, 可见深度神经网络具有强大的非线性拟合能力。Lee 等^[9]利用神经网络算法求解了一阶微分方程。Lagaris 等^[10]提出将人工神经网络用于求解偏微分方程。Weinan 等^[11]成功将深度神经网络应用于求解高维的偏微分方程, 并发展了深度 Ritz 法。Remco 等^[12]提出了一种能让神经网络更快收敛、计算上更加高效的误差构造方法。Raissi 等^[13]提出了物理信息神经网络。唐明健等^[14]建立基于物理信息的神经网络模型求解了矩形薄板力学正反问题。Samaniego 等^[15]提出了深度能量法。文献[16,17]基于变分原理, 构建以最小化损失函数为目标的网络模型, 采用深度能量法求解了超弹性等问题。郭宏伟等^[18]将深度能量法和深度配点法应用求解了薄板弯曲问题。

收稿日期: 2022-09-15; 修改稿收到日期: 2022-11-02.

基金项目: 国家自然科学基金(12162004); 国家重点研发计划(2019YFC1511103); 广西科技重大专项(桂科 AA18118029); 广西重点研发计划(桂科 AB22036007)资助项目。

作者简介: 黄钟民*(1996-), 男, 博士生(E-mail: huangzm@alu.gxu.edu.cn).

引用本文: 彭林欣, 罗伟漫, 黄钟民. 薄板几何非线性弯曲分析的深度能量法[J]. 计算力学学报, 2024, 41(3): 556-563.

PENG Lin-xin, LUO Wei-man, HUANG Zhong-min. Deep energy method for geometrical nonlinear bending analysis of thin plates [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2024, 41(3): 556-563.

深度能量法为弱形式解法,网络解答无需满足高阶连续,工作量小,边界处理方式简便,计算简单。深度能量法在提出时仅考虑面内坐标 x 和 y 作为网络的输入^[15],只能得到当前荷载作用下的位移,而非线性问题更为关注荷载与位移的关系,因而本文进一步发展了一种增量形式的深度能量法,该法先将荷载分段,在每个荷载步下以薄板系统势能为目标对网络参数进行优化,待势能取驻值后继续下一个荷载步,根据本文研究问题的特点,除第一个迭代步的网络参数为随机初始化外,其余迭代步的网络参数均继承自上一迭代步,这可一定程度上提高网络的学习效率。本文通过算例验证该方法的有效性和准确性。本文算例均在 Windows 10 操作系统上进行运算,计算机处理器为 Intel(R) Core(TM) i7-8700 CPU@3.20 GHz。

2 薄板几何非线性弯曲基本理论

对于发生大挠度变形的薄板,须考虑由中面位移引起的中面应变和中面应力,中面应变由中面各点的纵向位移分量 u 和 v 引起的应变和挠度 w 引起的应变叠加而成。

以厚度为 t ,材料杨氏模量为 E ,材料泊松比为 μ 的薄板为例,由 Von-Karman 非线性理论,薄板的中面应变为

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = v_y + \frac{1}{2} w_y^2 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = u_y + v_x + w_x w_y \\ \chi_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -w_{xx}, \quad \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -w_{yy} \\ 2\chi_{xy} &= -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -2w_{xy}\end{aligned}\quad (1)$$

式中 ϵ_x, ϵ_y 和 γ_{xy} 分别为薄板中面沿 x 和 y 方向的正应变和切应变, χ_x, χ_y 和 χ_{xy} 分别为曲率和扭率。

薄板上任意点的应变为

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_x + z\chi_x \\ \epsilon_y + z\chi_y \\ \gamma_{xy} + 2z\chi_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x + \frac{1}{2}w_x^2 - zw_{xx} \\ v_y + \frac{1}{2}w_y^2 - zw_{yy} \\ u_y + v_x + w_x w_y - 2zw_{xy} \end{pmatrix} \quad (3)$$

根据广义胡克定律,薄板上任意点的应力为

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{E}{1-\mu^2} [(\epsilon_x + z\chi_x) + \mu(\epsilon_y + z\chi_y)] \\ \frac{E}{1-\mu^2} [(\epsilon_y + z\chi_y) + \mu(\epsilon_x + z\chi_x)] \\ \frac{E}{2(1+\mu)} (\gamma_{xy} + 2z\chi_{xy}) \end{pmatrix} \quad (4)$$

应变能为

$$U = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (5)$$

将式(3,4)代入式(5),整理后应变能为

$$U = E_0 t \left\{ \epsilon_x (\epsilon_x + \mu \epsilon_y) + \epsilon_y (\epsilon_y + \mu \epsilon_x) + \frac{1-\mu}{2} \gamma_{xy}^2 + \frac{t^2}{12} [\chi_x^2 + \chi_y^2 + 2\mu \chi_x \chi_y + 2(1-\mu) \chi_{xy}] \right\} \quad (6)$$

式中 $E_0 = E/[2(1-\mu^2)]$ 。

将式(1,2)代入式(6),可得用位移 u, v 和 w 表示的应变能为

$$\begin{aligned}U = E_0 t & \left[\left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 + 2\mu \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) \times \left(v_y + \frac{1}{2} w_y^2 \right) \right] + E_0 t \left(v_y + \frac{1}{2} w_y^2 \right)^2 + \\ & \frac{Et}{4(1+\mu)} (u_y + v_x + w_x w_y)^2 + \frac{E_0 t^3}{12} [w_{xx}^2 + w_{yy}^2 + 2\mu w_{xx} w_{yy} + 2(1-\mu) w_{xy}^2]\end{aligned}\quad (7)$$

系统势能 Π 由应变能 U 和外力功 W_{ext} 构成,即

$$\Pi = U + W_{ext} \quad (8)$$

式中 外力功 W_{ext} 为

$$W_{ext} = \int_{\Omega} q w d\Omega - \sum_j P_j w_j \quad (9)$$

式中 q 为均布荷载, P_j 为集中力荷载, j 为施加集中力的数量。

3 增量式的深度能量法

深度能量法即以能量作为驱动的深度神经网络方法。本文在深度能量法的基础上引入增量算法,将荷载分级加载,先给定初始荷载和增量步长,以最小化薄板势能为目标进行网络参数优化,直至优化后的参数使势能取驻值,则按增量步长增加荷载继续下一个荷载步。由于计算薄板系统势能时涉及到积分,本文借助网格划分工具对求解域采用三角形单元网格离散,再通过 Python 语言编程读取网格数据计算 Hammer 积分点作为训练集,代入网络模型获取薄板位移的预测值,并结合自动微分技术计算系统势能作为神经网络的损失函数,采用 Adam 优化算法进行误差反向传播,更新模型参数。

3.1 损失函数的计算

根据最小势能原理,以最小化薄板的势能为目标,本文方法只需计算薄板势能作为深度神经网络训练的损失函数,找到合适的超参数 ϕ 使得势能取驻值。

考虑薄板势能驱动的神经网络,其损失函数为

$$L(\phi) = \Pi(x, y; \phi) \quad (10)$$

此时,势能 Π 为预测位移 \bar{u} , \bar{v} 和 \bar{w} 的函数,并和 \bar{u} , \bar{v} 和 \bar{w} 共用一套超参数 φ 。

处理本质边界条件时,对于形状较为简单的薄板,如矩形、三角形和圆形等,可以通过构造特解的方式进行处理,对于复杂边界构造特解较为困难,因此需将边界误差纳入训练误差中优化。

固支边界 Γ_1

$$\begin{aligned}\bar{u}(x_{\Gamma_1}, y_{\Gamma_1}; \varphi) &= 0, \bar{v}(x_{\Gamma_1}, y_{\Gamma_1}; \varphi) = 0 \\ \bar{w}(x_{\Gamma_1}, y_{\Gamma_1}; \varphi) &= 0, \theta_n = 0\end{aligned}\quad (11)$$

式中 θ_n 为法向转角, $\theta_n = \partial \bar{w}(x_{\Gamma_1}, y_{\Gamma_1}; \varphi) / \partial n$ 。

简支边界 Γ_2

$$\begin{aligned}\bar{u}(x_{\Gamma_2}, y_{\Gamma_2}; \varphi) &= 0, \bar{v}(x_{\Gamma_2}, y_{\Gamma_2}; \varphi) = 0 \\ \bar{w}(x_{\Gamma_2}, y_{\Gamma_2}; \varphi) &= 0\end{aligned}\quad (12)$$

自由边界 Γ_3 无约束。

对于复杂边界的误差以均方误差衡量,并结合罚函数法,将其转化为无约束优化问题,则损失函数为

$$L(\varphi) = \Pi(x, y; \varphi) + k_u \text{MSE}_{\Gamma u} + k_v \text{MSE}_{\Gamma v} + k_w \text{MSE}_{\Gamma w} + k_\theta \text{MSE}_{\Gamma \theta} \quad (13)$$

式中

$$\begin{aligned}\text{MSE}_{\Gamma u} &= \frac{1}{N_{\Gamma u}} \sum_{i=1}^{N_{\Gamma u}} \|\bar{u}(x_i, y_i; \varphi)\|^2 \\ \text{MSE}_{\Gamma v} &= \frac{1}{N_{\Gamma v}} \sum_{i=1}^{N_{\Gamma v}} \|\bar{v}(x_i, y_i; \varphi)\|^2 \\ \text{MSE}_{\Gamma w} &= \frac{1}{N_{\Gamma w}} \sum_{i=1}^{N_{\Gamma w}} \|\bar{w}(x_i, y_i; \varphi)\|^2\end{aligned}\quad (14)$$

式中 $\Gamma_u = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_v = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_w = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_\theta = \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, N 为边界数据点的数量。

3.2 误差反向传播

一旦确定了损失函数后,就需要计算误差梯度结合优化算法进行反向传播。误差反向传播的过

程基于链式求导法则,逐层求出函数 $L(\varphi)$ 对神经网络权重和偏置的梯度,作为修改下次训练的权值和偏置的依据,参数更新后再次训练,如此反复循环迭代,直至找到合适的超参数 φ^* 使得

$$\varphi^* = \underset{\varphi \in \mathcal{R}}{\operatorname{argmin}} L(\varphi) \quad (15)$$

当超参数取 φ^* 时, $\bar{u}(x, y; \varphi), \bar{v}(x, y; \varphi)$ 和 $\bar{w}(x, y; \varphi)$ 即为当前增量步下薄板的位移解。

3.3 算法流程

输入,初始荷载、增量步长和积分点坐标。

输出,所有荷载步的位移 $\bar{u}(x, y; \varphi), \bar{v}(x, y; \varphi)$ 和 $\bar{w}(x, y; \varphi)$ 。

(1) 给定初始荷载和增量步长。

(2) 以网格离散求解域,通过 Python 读取网格数据计算 Hammer 积分点作为训练集,代入网络模型。

(3) 网络前向传播,获取薄板位移的预测值,利用自动微分技术对位移预测值求偏导。

(4) 将位移及求导结果分别代入式(7,9)计算应变能 U 和外力功 W_{ext} ,两者相加得到薄板势能,结合边界条件给出神经网络的误差函数 $L(\varphi)$ 。

(5) 计算误差梯度,反向传播进行参数更新,重复步骤(3~5),直至找到合适的超参数 φ^* 使得 $\varphi^* = \underset{\varphi \in \mathcal{R}}{\operatorname{argmin}} L(\varphi)$,终止该荷载增量步下的迭代过程。

(6) 输出该增量步对应的位移,继续施加下一步增量荷载,回到步骤(4)继续计算,如此循环,直至所有荷载增量加载完成,结束计算。

计算具体过程如图 1 所示。

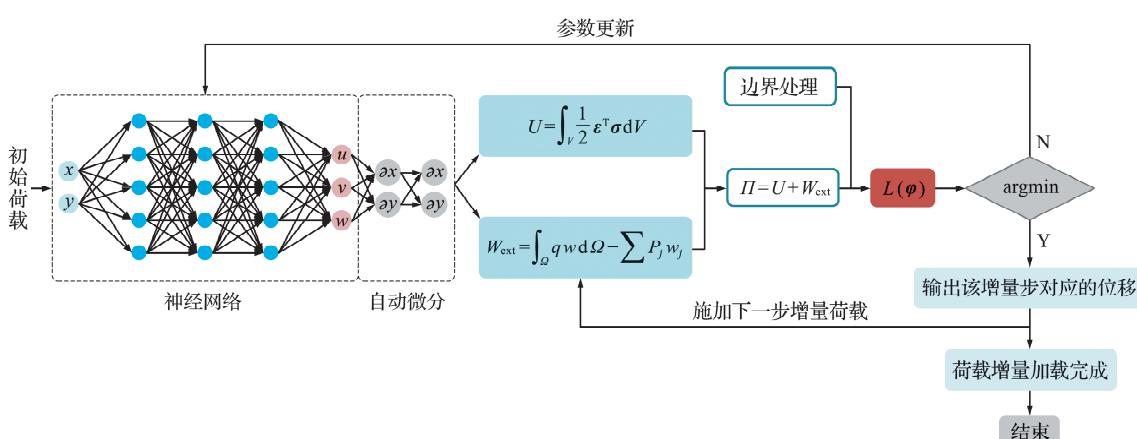


图 1 能量驱动的增量式神经网络模型
Fig. 1 Energy-driven incremental neural network model

4 数值算例

本文算例对荷载和挠度采用无量纲公式,即

$$Q = \frac{q_0 l^4}{E t^4}, w = \frac{w_0}{t} \quad (16)$$

式中 q_0 和 w_0 分别为实际施加的荷载和计算所得的实际挠度, l 为方板的边长, E 为弹性模量, t 为薄板厚度。当荷载为集中力时, 将 $q_0 l^{14}$ 改为 $P l^2$ 。当板为圆板时, 将 l 改为半径 R 。

4.1 方形薄板

受横向均布荷载 $q(x, y) = q_0$ 作用的四边简支方形薄板如图 2 所示, 厚度为 t , 厚跨比 $t/l = 0.01$, $\mu = 0.3$, 弹性模量 E 和荷载 q_0 均为常数。

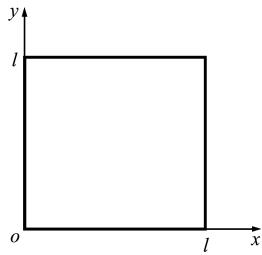


图 2 方形薄板
Fig. 2 Thin square plate

本算例选用的深度神经网络模型的输入数据点共有 880 个, 网络采用 Adam 算法, 激活函数为 Tanh 函数, 具有 4 层隐藏层, 每个隐藏层具有 20 个神经元, 训练过程中适当调整学习率(调整区间为 $[10^{-2}, 10^{-4}]$), 对该网络模型训练大约 6000 次后误差基本收敛, $Q/9.1575 = 1$ 时的网络误差收敛曲线如图 3 所示。

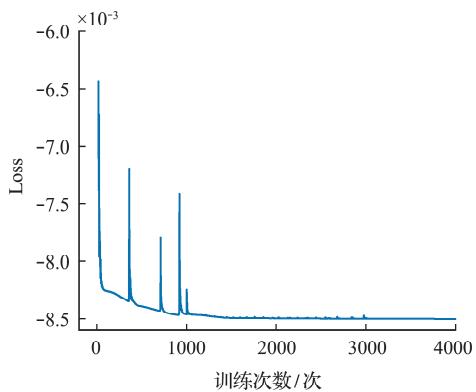


图 3 方形薄板网络模型误差收敛曲线
Fig. 3 Error convergence curve of square network model

相对误差 1 和相对误差 2 分别为本文解与文献解^[19,20]的对比结果(表 1), 相对误差均在 2% 内。本文解与文献解^[19,20]和 Abaqus 解均吻合良好(图 4), 证明了本文方法的有效性和准确性。

表 1 方板中心点挠度对比(无量纲)
Tab. 1 Comparison of deflection of center point of square plate

Q/ 9.1575	本文 解	文献 解 ^[19]	文献 解 ^[20]	Abaqus 解	相对 误差		
					误差 1 /%	误差 2 /%	误差 3 /%
1	0.348	0.347	0.348	0.348	0.44	0.07	0.14
4	0.822	0.815	0.830	0.817	0.82	0.97	0.67
16	1.478	1.463	1.497	1.464	1.05	1.24	0.93
64	2.403	2.389	2.444	2.392	0.60	1.66	0.46
200	3.508	—	3.574	3.513	—	1.84	0.14
500	4.756	—	4.844	4.772	—	1.81	0.34

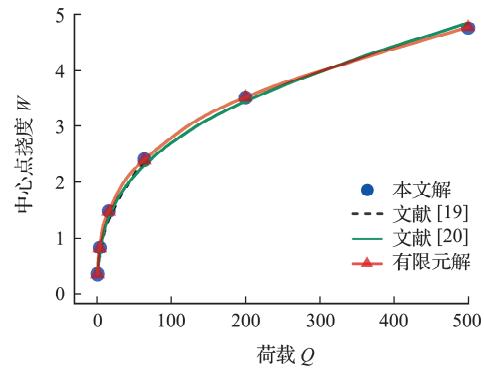


图 4 方板中心点的挠度荷载曲线
Fig. 4 Deflection load curve of square plate center point

4.2 三角形薄板

受横向均布荷载 q_0 作用的等边三角形薄板如图 5 所示, 边长为 2 m, $t = 0.01$ m, $E = 10^7$ Pa, $\mu = 0.316$, 考虑周边固支和周边简支两种边界条件。

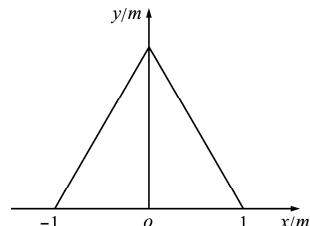


图 5 等边三角形薄板
Fig. 5 Equilateral triangular thin plate

此算例的神经网络选择 Tanh 函数为激活函数, 优化算法选取 Adam 算法, 隐藏层 6 层, 每个隐藏层具有 20 个神经元, 网络输入 1551 个数据点, 训练过程适当调整学习率(调整区间为 $[10^{-2}, 10^{-5}]$), 约训练 15000 次后网络误差收敛, 本文选取了算例中简支边界条件 $Q=50$ 工况下的误差收敛情况, 如图 6 所示。

本算例的计算结果与 Abaqus 解对比列入表 2, 其中, Abaqus 解用 2472 个 STRI3 单元对求解域离散计算后获得。本文计算结果与有限元方

法解答十分吻合如图7所示,荷载较小时,挠度随荷载线性增长,随着荷载的增大,挠度增长缓慢,曲线呈现非线性关系。

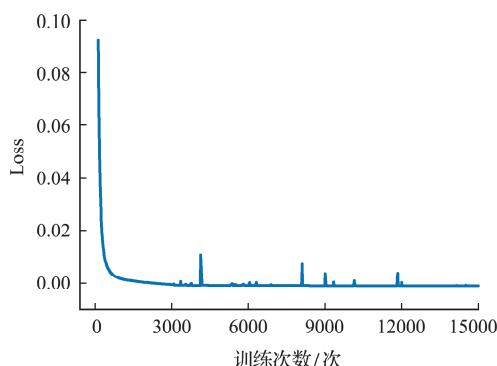


图6 三角形薄板网络模型误差收敛曲线
Fig. 6 Error convergence curve of triangular network model

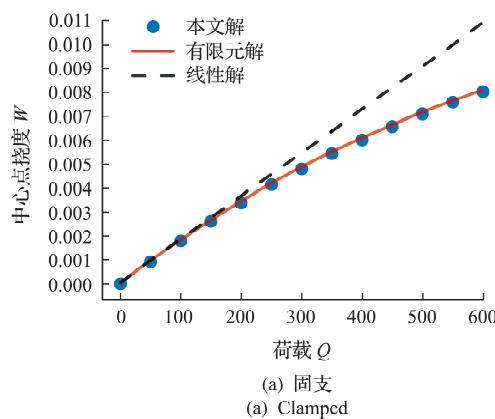
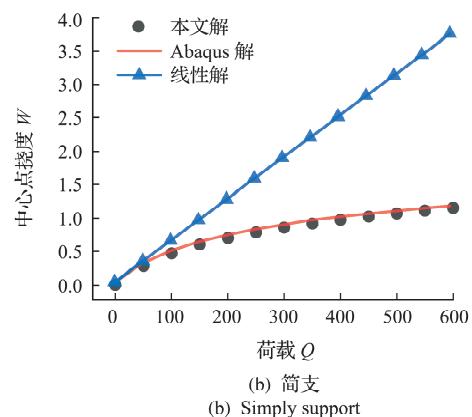


图7 三角形薄板挠度荷载曲线
Fig. 7 Triangular deflection load curve of thin plate

表2 三角形薄板中心点挠度对比(无量纲)
Tab. 2 Comparison of deflection of triangular plate center point

Q	固支			简支		
	本文解	Abaqus解	相对误差/%	本文解	Abaqus解	相对误差/%
50	0.090	0.089	1.09	0.279	0.279	0.07
100	0.178	0.178	0.46	0.467	0.469	0.36
150	0.263	0.261	0.59	0.599	0.605	0.92
200	0.342	0.338	1.09	0.701	0.708	0.94
250	0.416	0.413	0.70	0.784	0.797	1.52
300	0.485	0.480	0.99	0.855	0.863	0.90
350	0.548	0.544	0.79	0.918	0.935	1.90
400	0.608	0.602	0.93	0.973	0.987	1.34
450	0.663	0.658	0.78	1.024	1.031	0.73
500	0.714	0.710	0.67	1.070	1.075	0.45
550	0.763	0.758	0.57	1.113	1.114	0.10
600	0.808	0.803	0.68	1.153	1.155	0.19



4.3 圆形薄板

本算例讨论了在点荷载 P 和均布荷载 q_0 作用下的固支圆形薄板弯曲变形情况,点荷载作用于圆板中心点处。圆板半径为 R ,厚度为 t , $t/R=0.02$,泊松比为 0.3,弹性模量和荷载均为常数。

本算例的网络模型采用 6 层隐藏层,每层 20

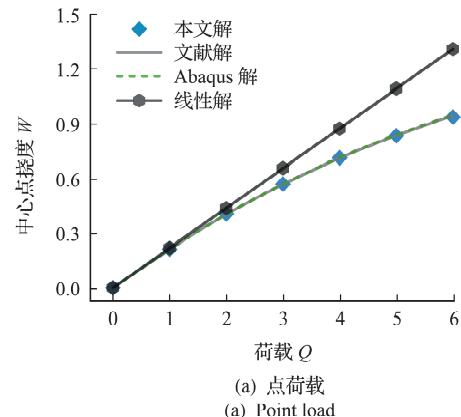


图8 圆形薄板挠度荷载曲线
Fig. 8 Deflection load curve of circular thin plate

个神经元进行计算,激活函数为 Tanh,采用 Adam 优化算法,学习率在网络训练过程中适当调整,网络训练 7000 次后基本收敛,计算结果与文献解^[21,22]及 Abaqus 解对比。本算例的 Abaqus 解用 1573 个 S4R5 单元对求解域离散计算后获得。由表 3 可知,本文方法不论求解均布荷载还是集中力荷载下的情况都能取得较高的精度。

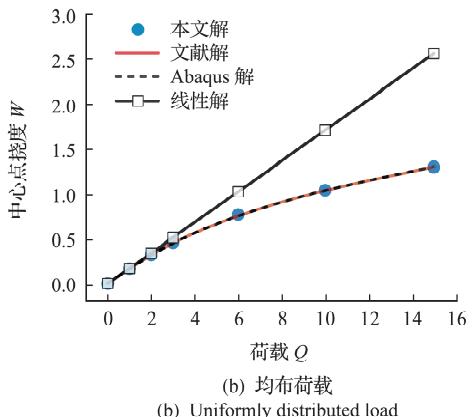


表 3 圆形薄板中心点挠度对比
Tab. 3 Comparison of deflection of center point of circular thin plate

Q	点荷载					均布荷载					
	本文解	文献解 ^[21]	Abaqus 解	相对误差 1/%	相对误差 2/%	本文解	文献解 ^[22]	Abaqus 解	相对误差 1/%	相对误差 2/%	
1	0.2126	0.2130	0.2137	0.17	0.48	1	0.1680	0.1682	0.1680	0.13	0.02
2	0.4034	0.4052	0.4066	0.43	0.78	2	0.3229	0.3231	0.3228	0.06	0.05
3	0.5696	0.5705	0.5725	0.16	0.51	3	0.4583	0.4591	0.4588	0.18	0.11
4	0.7108	0.7123	0.7155	0.21	0.66	6	0.7668	0.7702	0.7705	0.44	0.48
5	0.8319	0.8354	0.8390	0.42	0.84	10	1.0407	1.0514	1.0520	1.02	1.07
6	0.9357	0.9442	0.9485	0.90	1.35	15	1.2961	1.3007	1.3025	0.35	0.49

5 增量算法优化

本文在深度能量法的基础上引入了增量算法。每当新增荷载数据时,不需要重建所有的网络参数,而是在原有数据基础上更新,因此内存占用相比引入荷载增量前的网络要小。对于一个训练好的网络,进行修改的时间代价通常低于重新训练一个网络所需的代价,且深度能量法的网络预测结果无需满足高阶连续,本文只需满足一阶导即可,求导工作量较少,可更快收敛,因此本文解法能有效节约计算时间,提高计算效率。

以算例 3 的工况为例,将本文方法与深度能量法进行计算效率的对比。深度能量法求解中,无需将荷载分段,网络直接对所求荷载下的势能进行优化训练获得位移,不同工况下的位移均需重新训练网络获取。由表 4 可知,引入增量算法后的网络模型的计算时间和内存均明显减少。

表 4 增量算法优化对计算时间和内存的影响
Tab. 4 Influence of incremental algorithm on computing time and memory

	点荷载		均布荷载	
	优化前	优化后	优化前	优化后
时间/s	531.27	249.36	480.76	238.42
内存/MB	123.68	85.35	138.45	97.8

深度能量法在分析非线性问题时,若施加的荷载值较大,计算可能较难收敛,引入增量算法后的网络模型逐步计算每一个荷载增量步,使模型更加稳定,亦有利于提高计算精度。

6 神经网络预测能力的影响因素分析

目前,深度神经网络已经成功应用于诸多方面,但对于神经网络结构的设定没有可靠的理论依据,需要通过试凑法,从多次试验中找到最适合的网络结构。本文对几个影响网络预测能力的参数进行了详细分析和研究。

6.1 隐藏层数

选取算例 1 方形薄板 $Q=20$ 的情况进行分析,讨论了不同隐藏层数下的误差函数收敛情况

及其对时间和精度的影响。随着隐藏层数量的增加,误差曲线迅速收敛,神经网络所需的训练时间也随之增加,计算量变大,如图 9 所示。

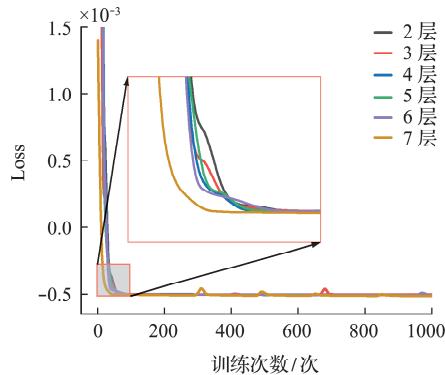


图 9 不同隐藏层的误差收敛曲线

Fig. 9 Error convergence curves of different hidden layers

考虑不同隐藏层数下挠度的求解情况,中心点处挠度求解结果如图 10 所示,层数不多时,精度随层数增加明显改善,当层数达到一定数量时,精度变化不明显,这是因为网络训练还受到其他因素的影响,通常层数越多神经网络能够学习到更多数据特征,从而会更逼近真实解,但是层数过深时,网络已经学习到足够的数据特征故而精度变化不明显。因此,隐藏层数并不是越多越好,考虑训练时间和计算量等因素,本文算例的网络模型层数在 4 层~6 层间选取。

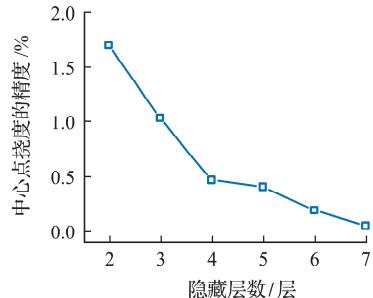


图 10 隐藏层对精度的影响

Fig. 10 Influence of hidden layer on accuracy

6.2 激活函数

以算例 3 中固支圆板 $Q=8$ 的工况为例,对几个激活函数进行了分析,如图 11 所示,Mish 激活

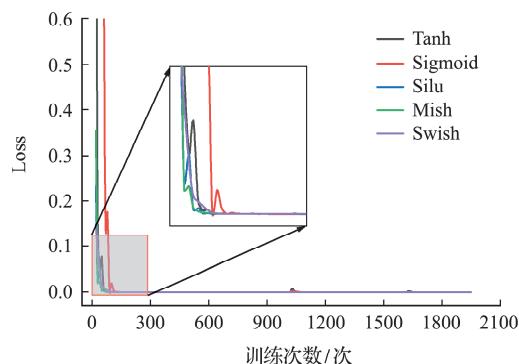


图 11 不同激活函数下的网络误差收敛
Fig. 11 Network error convergence graph under different activation functions

函数收敛所需的训练次数最少,能够更快收敛,而 Sigmoid 激活函数收敛最慢。

由表 6 可知,Tanh 函数和 Silu 函数下网络预测的挠度精度最高,采用 Tanh 为激活函数的网络训练所需时间最短,采用 Mish 激活函数所需时间最长,其训练时间是 Tanh 激活函数的 3 倍以上,这是因为 Tanh 的函数形式简单,其构造的计算图较为简易,而 Mish 函数则相反,耗时更长。综上,本文主要采用 Tanh 作为激活函数。

表 6 不同激活函数对时间和挠度相对误差的影响
Tab. 6 Influence of different activation functions on relative errors of time and deflection

激活函数	Tanh	Sigmoid	Silu	Mish	Swish
训练时间/s	524.28	549.44	842.56	1892.45	822.75
相对误差/%	0.03	0.15	0.03	0.07	0.12

7 结 论

本文发展了一种增量形式的深度能量法求解薄板几何非线性弯曲问题。基于 Von-Karman 非线性理论,建立了位移与势能之间的映射关系,根据最小势能原理并结合增量算法构建了以能量为驱动的增量式深度神经网络模型。分析了不同荷载作用下的不同形状和不同边界的薄板几何非线性行为。通过几个算例分析,得出以下结论。

(1) 本文解与文献解及有限元解对比均具备较高精度,研究证明了本文方法能有效分析薄板几何非线性问题。

(2) 深度能量法以点离散求解域,点与点之间无联系,计算所得结果在整个求解域内具备较强的连续性,该方法仅需通过位移计算势能进行优化训练,计算简便,求导工作量较少。本文在深度能量法的基础上引入荷载增量步,有效提高了计算效率和模型的稳定性,减小了计算内存。

(3) 本文仅针对大变形小应变问题进行求解,基于能量原理以优化势能为目标,具有较强的适用

性;由于本文解法的求解域用点离散,亦可看成一类无网格方法,该解法也避免了有限元解法存在的单元间连续性差和网格畸变问题,可为将来研究大变形大应变问题及耦合问题等提供新思路,具有广阔的发展前景。

参考文献(References):

- [1] Timoshenko S P, Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shell* (2nd Edition) [M]. New York: McGraw-Hill Book Co., Inc., 1959.
- [2] Levy S. Bending of Rectangular Plates with Large Deflections [S]. National Advisory Committee for Aeronautics, 1942.
- [3] Dai H H, Paik J K, Atluri S N. The global nonlinear galerkin method for the analysis of elastic large deflections of plates under combined loads: A scalar homotopy method for the direct solution of nonlinear algebraic equations[J]. *Computers Materials & Continua*, 2011, **23**(1): 69-99.
- [4] Razdolsky A G. Large deflections of elastic rectangular plates [J]. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 2015, **16**(6): 354-361.
- [5] Razdolsky A G. Razdolsky. Determination of large deflections for elastic circular plate[J]. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Engineering and Computational Mechanics*, 2018, **171**(1): 23-28.
- [6] 陈嵩涛,段庆林,马今伟.几何非线性分析的高效高阶无网格法[J].计算力学学报,2020,37(6):694-699.
(CHEN Song-tao, DUAN Qing-lin, MA Jin-wei. Efficient high order meshfree method for geometrically non-linear analysis [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2020, **37**(6): 694-699. (in Chinese))
- [7] Al-Shugaa M A, Al-Gahtani H J, Musa A E S. Ritz method for large deflection of orthotropic thin plates with mixed boundary conditions[J]. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, 2020, **19**(2): 5-16.
- [8] Cybenko G. Approximation by superpositions of a sigmoidal function[J]. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 1989, **2**(4): 303-314.
- [9] Lee H, Kang I S. Neural algorithm for solving differential equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 1990, **91**(1): 110-131.
- [10] Lagaris I E, Likas A, Fotiadis D I. Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1998, **9**(5): 987-1000.
- [11] Weinan E, Han Q, Jentzen A. Deep learning-based numerical methods for high-dimensional parabolic partial differential equations and backward stochastic differential equations [J]. *Communications in Mathematics and Statistics*, 2017, **5**(4): 349-380.
- [12] van der Meer R, Oosterlee C, Borovykh A. Optimally

- weighted loss functions for solving PDEs with Neural Networks [J]. *ArXiv e-Prints*, 2020; arXiv: 2002.06269.
- [13] Raissi M, Perdikaris P, Karniadakis G E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 2019, **378**:686-707.
- [14] 唐明健,唐和生.基于物理信息的深度学习求解矩形薄板力学正反问题[J].计算力学学报,2022, **39**(1):120-128. (TANG Ming-jian, TANG He-sheng. A physics-informed deep learning method for solving forward and inverse mechanics problems of thin rectangular plates [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2022, **39**(1):120-128. (in Chinese))
- [15] Samaniego E, Anitescu C, Goswami S, et al. An energy approach to the solution of partial differential equations in computational mechanics via machine learning: Concepts, implementation and applications [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, **362**:112790.
- [16] Nguyen-Thanh V M, Zhuang X Y, Rabczuk T. A deep energy method for finite deformation hyperelasticity [J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2020, **80**:103874.
- [17] Zhuang X Y, Guo H W, Alajlan N, et al. Deep autoencoder based energy method for the bending, vibration, and buckling analysis of Kirchhoff plates with trans-
- fer learning [J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2021, **87**:104225.
- [18] 郭宏伟,庄晓莹.采用两步优化器的深度配点法与深度能量法求解薄板弯曲问题[J].固体力学学报,2021, **42**(3):249-266. (GUO Hong-wei, ZHUANG Xiao-ying. The application of deep collocation method and deep energy method with a two-step optimizer in the bending analysis of Kirchhoff thin plate plate[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2021, **42**(3):249-266. (in Chinese))
- [19] Azizian Z G, Dawe D J. Geometrically nonlinear analysis of rectangular mindlin plates using the finite strip method[J]. *Computers & Structures*, 1985, **21**(3):423-436.
- [20] 焦兆平,吴长春,卞学. Mindlin 板几何非线性分析的附加内部剪应变法[J]. 应用数学和力学,1994, **15**(6):479-481, 182, 483-488. (JIAO Zhao-ping, WU Chang-chun, BIAN Xue. Additional internal shear strain method for geometric nonlinear analysis of Mindlin plate [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1994, **15**(6):479-481, 182, 483-488. (in Chinese))
- [21] Rushton K R. Large deflection of plates with initial curvature[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1970, **12**:1037-1051.
- [22] Pica A, Wood R D, Hinton E. Finite element analysis of geometrically nonlinear plate behaviour using a mindlin formulation[J]. *Computers & Structures*, 1980, **11**(3):203-215.

Deep energy method for geometrical nonlinear bending analysis of thin plates

PENG Lin-xin^{1,2}, LUO Wei-man¹, HUANG Zhong-min^{*1}

(1. College of Civil Engineering and Architecture, Guangxi University, Nanning 530004, China;

2. Key Laboratory of Disaster Prevention and Structural Safety of China Ministry of Education, Guangxi Key Laboratory of Disaster Prevention and Engineering Safety, Guangxi University, Nanning 530004, China)

Abstract: An incremental deep energy method is developed to solve geometric nonlinear bending problems of thin plates. According to the minimum potential energy principle and Von-Karman nonlinear theory, an incremental deep neural network model driven by thin plate potential energy is constructed. Firstly, the solution domain of the thin plate is discretized into a grid, and the Hammer integral points are calculated by reading the grid data in Python, which is used as training set to be substituted into the network model to predict the bending displacement of the plate. Then, the load is divided into a series of load increments. In each increment step, the potential energy of the thin plate is calculated as the loss function of the neural network. With the goal of minimizing the potential energy, the parameters of the network model are updated by Adam optimization algorithm, and the calculation of the next load step is continued after the potential energy takes a stationary value. In this paper, the geometric nonlinear bending problem of thin plates with different shapes and different boundary conditions is solved, and the calculated results are compared with the finite element Abaqus solution using Abaqus from the literature. The research shows that this method is effective and accurate in solving the geometric nonlinear bending problem of thin plates, and the incremental neural network model needs a low computer, and can effectively improve the computational efficiency and the stability of the model.

Key words: geometric nonlinearity; deep energy method; incremental neural network; Von-Karman nonlinear theory