

DOI: 10.7511/jslx20221014001

轴向流作用下均布非线性弹簧支承 二维壁板的复杂响应

董宇¹, 郑辉^{*1}, 杨翊仁²

(1. 湖南工业大学 土木工程学院, 株洲 412007; 2. 西南交通大学 力学与工程学院, 成都 610031)

摘要: 考虑刚性导流段和尾流段对流场的影响, 建立轴向流作用下二维板的非线性流固耦合运动控制方程, 用有限差分法对控制方程进行离散。为了克服差分网格较多时带来的计算规模较大的问题, 对控制方程用主模态缩减法缩减自由度, 然后对离散方程进行数值积分, 得到系统的复杂响应, 分析其分岔和混沌特性。计算结果表明, 以来流流速幅值和阻尼参数为可变参数时, 系统具有极其复杂的动态响应, 通过分岔图、相图和庞加莱截面图等方法判断了系统多种形式的周期、拟周期和混沌运动, 在以来流流速幅值为可变参数时, 系统一开始经由周期倍化分岔的方式进入混沌; 在以阻尼系数为可变参数时, 经由倒周期倍化分岔的方式从混沌运动退回到周期振动。

关键词: 二维壁板; 周期倍化分岔; 模态缩减

中图分类号: U270.11; O343

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2024)03-0506-07

1 引言

如图1所示, 在具有刚性边界二维流道一侧插入一段弹性二维板模型, 细长薄板叠层(小间隙)结构在反应堆结构一体化设计中有广泛的应用。这种结构的特点是相邻两个平行板之间存在流道, 供冷却液流动, 属于典型的轴向流作用下的流固耦合系统。流体的流动会导致板状燃料组件产生静态或动态失稳。在一些实验中, 当流速足够大时, 能观察到导致板状结构破坏的屈曲失稳或者颤振失稳^[1,2]。源于这一背景, 轴向流作用下板状结构的流致振动问题受到众多学者的关注。

如图1所示模型, 在不考虑上部刚性边界影响时, 为经典的轴向流作用下壁板失稳分析模型, 首先由 Dugundji 等^[3] 应用于航空方面的研究。之后, 大量的学者对这一基础系统进行研究, 因此, 许多不同的方法用于求解这一问题。Kornecki 等^[4] 通过伽辽金法来预测系统的不稳定性。Pitman 等^[5] 提出了一种通用的方法, 直接提取得到系统的特征值, 即使系统为非对称结构。这些关于线性系

统稳定性研究的共识是流体无粘和不可压缩, 弹性板首先发生屈曲失稳, 在屈曲失稳后随着流速的增大, 系统会出现耦合模态颤振。Guo 等^[6,7] 研究了矩形组件在刚性水槽中的稳定性, 采用 Galerkin 法将连续结构离散化, 基于势流理论获得作用在结构上的流体力。鲁丽等^[8] 研究了在流动压力作用下, 考虑具有立方非线性支承板状梁的 Hopf 分岔现象。Lu 等^[9] 用微分求积法研究了轴向流作用下壁板的非线性复杂响应。

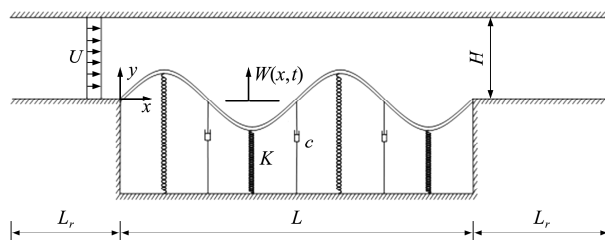


图1 轴向流中壁板模型

Fig. 1 Schematic of the plate in axial flow with the rigid wall

本文通过有限差分法对流场和结构方程进行统一离散的数值方法, 对受非线性约束和振荡流作用二维板的复杂响应进行了求解。为了克服差分

收稿日期: 2022-10-14; 修改稿收到日期: 2022-12-24.

基金项目: 国家自然科学基金(11872043; 11772273)资助项目.

作者简介: 郑辉*(1986-), 男, 博士, 副教授(E-mail: zhenghui@hut.edu.cn).

引用本文: 董宇, 郑辉, 杨翊仁. 轴向流作用下均布非线性弹簧支承二维壁板的复杂响应[J]. 计算力学学报, 2024, 41(3): 506-512.

DONG Yu, ZHENG Hui, YANG Yi-ren. Complicated responses of a two-dimensional plate under action of an axial liquid flow with cubic stiffness[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2024, 41(3): 506-512.

网格较多时带来的计算规模较大的问题,对控制方程用主模态缩减法缩减自由度,再对离散方程进行数值积分,通过分岔图、相图和庞加莱截面图等方法,判断了系统以来流流速幅值和阻尼系数为可变参数时,系统的复杂响应。

2 运动微分方程与边界条件

图 1 所示轴向流中两边简支壁板结构模型,板长为 L ,板厚为 h_p ,单位长度质量为 ρ_p , $D=Eh_p^3/[12(1-\nu^2)]$ 为板的抗弯刚度, E 和 ν 分别为壁板的弹性模量和泊松比,板与流道固定边之间的间距为 H , K 为均布非线性弹簧, c 为均布阻尼系数,板的横向位移为 $w(x,t)$,壁板前端刚性导流段和尾流段的长度为 L_r ,在轴向流中,流体的侧向流动可以忽略。因此,假设流场中的流体是二元不可压缩流理想流体,即流场可采用二维小扰势流模型, U 为流体的来流流速, ρ_∞ 为流体密度, p_∞ 为无穷远场压强, φ 为流体扰动速度势。

在上述的模型中,壁板中点的非线性弹簧约束考虑为立方非线性,即弹簧约束力与壁板位移的关系表达式为

$$f(w) = (k_1 w + k_3 w^3) \delta(x - l/2) \quad (1)$$

式中 $\delta(\cdot)$ 为 Dirac 函数, k_1 和 k_3 分别为弹簧的线性和非线性刚度系数。

对于二维板结构,由于板的侧向宽度较小,可以采用欧拉梁模型来模拟,考虑非线性弹簧支承、简谐激振力以及阻尼的作用,运动方程为

$$\rho_p h_p \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + f(w) + c \frac{\partial w}{\partial t} = p(x) \cos(\omega t) - \Delta p \quad (2)$$

式中 $\Delta p \equiv p(x,y,t)$ 为流道中流体对板产生的流体动压。

轴向流中流体扰动速度势 φ 的控制方程为

$$\partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial y^2 = 0 \quad (3)$$

小扰动速度势在壁板上产生的流体动压由 Bernoulli 方程可得

$$\Delta p = -\rho_\infty \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{y=0} \quad (4)$$

壁板简支边界条件

$$w(0,t) = w(l,t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(l,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (5)$$

流场入口出口压力远场的势函数边界为

$$\varphi|_{x=-l_r} = 0, \quad \varphi|_{x=l+l_r} = 0 \quad (6)$$

速度势在刚性壁面边界条件为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad (l_r \leq x \leq 0, l \leq x \leq l+l_r)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=H} = 0 \quad (-l_r \leq x \leq l+l_r) \quad (7)$$

流场与壁板的耦合边界条件为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \quad (0 \leq x \leq l) \quad (8)$$

引入下列无量纲参数

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{l}, \quad \bar{y} = \frac{y}{l}, \quad \bar{w} = \frac{w}{h_p}, \quad \bar{l}_r = \frac{l_r}{l}, \quad \bar{H} = \frac{H}{l}, \\ \bar{\varphi} &= \sqrt{\frac{\rho_\infty l}{D}} \cdot \frac{l}{h_p} \varphi, \quad \bar{t} = t \sqrt{\frac{D}{\rho_p h_p l^4}}, \quad k_1 = \frac{K_1 l^3}{D}, \\ k_3 &= \frac{K_3 l^3 h_p^2}{D}, \quad \Omega = \omega \sqrt{\frac{\rho_p h_p l^4}{D}}, \quad \mu = \frac{\rho_\infty l}{\rho_p h_p}, \\ \bar{u} &= \sqrt{\frac{\rho l^3}{D}} U, \quad f = \frac{p(\bar{x}) l^3}{D h_p}, \quad \sigma = \frac{c l}{\sqrt{D} \cdot \sqrt{\rho_p h_p}} \end{aligned} \quad (9)$$

将式(9)中无量纲参数分别代入式(2~8)后可得无量纲控制方程

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} + \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} + (k_1 \bar{w} + k_3 \bar{w}^3) + \sigma \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} = \\ f \cos(\Omega \bar{t}) + \mu \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}} \\ \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}^2} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

板的简支无量纲边界条件

$$\bar{w}|_{\bar{x}=0} = 0, \quad \bar{w}|_{\bar{x}=1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \Big|_{\bar{x}=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \Big|_{\bar{x}=1} = 0 \quad (11)$$

流场的扰动速度势无量纲边界条件

$$\bar{\varphi}|_{\bar{x}=-\bar{l}_r} = 0, \quad \bar{\varphi}|_{\bar{x}=1+\bar{l}_r} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} = 0 \quad (\bar{l}_r \leq \bar{x} \leq 0, 1 \leq \bar{x} \leq 1 + \bar{l}_r)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=H} = 0 \quad (-\bar{l}_r \leq \bar{x} \leq 1 + \bar{l}_r) \quad (12)$$

流场和壁板的无量纲耦合边界条件为

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} = \sqrt{\mu} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \quad (0 \leq \bar{x} \leq 1) \quad (13)$$

3 有限差分法离散

文献[10]给出了有限差分法的基本原理以及应用。采用等距节点分布形式,节点间距为 $\Delta \bar{x} = 1/(n_p + 1)$, $\Delta \bar{y} = \bar{H}/(m - 1)$,其中 n_p 为板内节点数, m 为流道高度方向网格点数,壁板前端和后端 i 方向网格点数 $n_r = \bar{l}_r/\Delta \bar{x} + 1$,沿 i 方向总网格数 $n = n_p + n_r + n_r$ 。

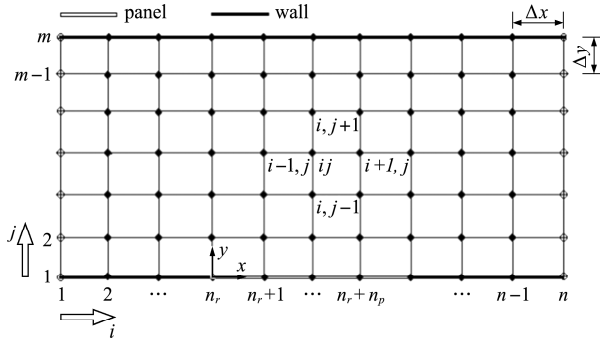


图2 有限差分法离散网格划分
Fig. 2 Mesh point distribution

有限差分离散格式

$$f(\bar{x}_{i,j}) = f_{i,j}, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{x}}(\bar{x}_{i,j}) = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta\bar{x}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x}^2}(\bar{x}_{i,j}) = \frac{f_{i-1,j} - 2f_{i,j} + f_{i+1,j}}{\Delta\bar{x}^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{y}^2}(\bar{x}_{i,j}) = \frac{f_{i,j-1} - 2f_{i,j} + f_{i,j+1}}{\Delta\bar{y}^2}$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial \bar{x}^4}(\bar{x}_{i,j}) = \frac{6f_{i,j} - 4(f_{i+1,j} + f_{i-1,j}) + (f_{i+2,j} - f_{i-2,j})}{\Delta\bar{x}^4} \quad (14)$$

式(10~13)用有限差分法格式离散后可得

$$\begin{cases} [M^{pp}]\{\ddot{\bar{w}}\} + [K^{pp}]\{\bar{w}\} + \{K_N\} + \{C_\sigma\} + \\ \{f(\bar{t})\} = \sqrt{\mu}[C^{pf}]\{\dot{\bar{\varphi}}_p\} + \bar{u}[K^{pf}]\{\bar{\varphi}_p\} \\ [K^{ff}]\{\bar{\varphi}\} = \sqrt{\mu}[C^{fp}]\{\dot{\bar{w}}\} + \bar{u}[K^{fp}]\{\bar{w}\} \end{cases} \quad (15)$$

式中 $\{\bar{w}\} = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_{n_p}\}^T$

$$\{\bar{\varphi}\} = \{\bar{\varphi}_{1,2}, \bar{\varphi}_{1,3}, \dots, \bar{\varphi}_{1,n-1}; \bar{\varphi}_{2,1}, \dots, \bar{\varphi}_{m,n-1}\}^T$$

$$\{\bar{\varphi}_p\} = \{\bar{\varphi}_{1,n_r+1}, \bar{\varphi}_{1,n_r+2}, \dots, \bar{\varphi}_{1,n_r+n_p}\}^T$$

由式(15)第二式可得

$$\{\bar{\varphi}\} = \sqrt{\mu}[C^{fp}]\{\dot{\bar{w}}\} + \bar{u}[\bar{K}^{fp}]\{\bar{w}\} \quad (16)$$

式中 $[\bar{C}^{fp}] = [K^{ff}]^{-1}[C^{fp}]$

$$[\bar{K}^{fp}] = [K^{ff}]^{-1}[K^{fp}]$$

由式(16)可得

$$\{\bar{\varphi}_p\} = \sqrt{\mu}[\bar{C}_p^{fp}]\{\dot{\bar{w}}\} + \bar{u}[\bar{K}_p^{fp}]\{\bar{w}\} \quad (17)$$

式中 $[\bar{C}_p^{fp}]$ 和 $[\bar{K}_p^{fp}]$ 分别为取 $[\bar{C}^{fp}]$ 和 $[\bar{K}^{fp}]$ 第 $n_r \sim n_r + n_p - 1$ 行得到的子矩阵。

方程(15,17)第一式联立可得关于板的横向振动位移变量的非线性控制方程

$$[M]\{\ddot{\bar{w}}\} + [C]\{\dot{\bar{w}}\} + [K]\{\bar{w}\} + \{f(\bar{t})\} = 0 \quad (18)$$

式中 $[K] = [K_L] + [K_{NL}]$ 。 $[M]$, $[C]$ 和 $[K]$ 分别为控制方程的质量阵、阻尼阵和刚度阵, $\{f(\bar{t})\}$ 为外激励荷载矢量。其中,刚度矩阵中存在非线性项, $[K_L]$ 和 $[K_{NL}]$ 分别表示刚度项中的线性部分和非线性部分。在给定的参数条件下,对方程(18)进行求解就能确定系统的动力特性。

4 主模态缩减法

有限差分法离散得到收敛的结果需用的节点数较多,对于线性稳定性计算其计算量尚在可承受范围之类,但是在迭代求解系统非线性复杂响应时,通过有限差分法离散后的非线性方程计算量会非常大,所以通过主模态缩减法减少计算量。首先不考虑外激励荷载和非线性刚度项的影响,求出线性方程组在空气中或者在静水中的固有频率和对应的特征向量,则系统的响应为

$$\{\bar{w}\} = \{\xi\}\{\eta\} \quad (19)$$

$$\text{式中 } \{\xi\} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}, \quad \{\eta\} = \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_N \end{Bmatrix}$$

$\{\xi\}$ 为前 N 阶特征向量组成的向量矩阵, $\{\eta\}$ 为模态坐标下的自变量向量。

把式(19)代入振动控制方程(18),同时每一项前乘 $\{\xi\}^T$, 得到模态坐标下的控制方程

$$\{\xi\}^T[M]\{\xi\}\{\ddot{\eta}\} + \{\xi\}^T[C]\{\xi\}\{\dot{\eta}\} + \{\xi\}^T[K]\{\xi\}\{\eta\} + \{\xi\}^T\{f(\bar{t})\} = 0 \quad (20)$$

再通过对式(20)进行数值积分计算得到模态坐标下 $\{\eta\}$ 的解,通过式(19)变换可以得到关于 $\{\bar{w}\}$ 的解。线性计算中不考虑非线性弹簧和外激励的影响,分别取考虑流体附加质量和不考虑流体附加质量两种工况下计算得到的特征向量,网格数 $n_r = n_p = m = 49$, 质量比 $\mu = 0.5$, 模态缩减时模态阶数 N 分别取 1, 2 和 5, 得到的计算结果和不使用模态缩减时得到的结果进行计算对比,结果列入表 1。

表 1 模态缩减临界流速计算结果对比

Tab. 1 Dimensionless critical flow velocity for model order reduction method

	N	\bar{u}_d
不考虑附加质量	1	6.881
	2	6.881
	5	6.875
考虑附加质量	1	6.882
	2	6.882
	5	6.875
不缩减		6.875

由表 1 可知,通过主模态缩减法,在计算初始模态特征向量 $\{\xi\}$ 时分别考虑了流体附加质量的影响和不考虑流体附加质量的影响两种工况,这两种工况下计算得到的临界流速的计算结果与不缩减时的计算结果非常近似,主模态特征向量阶数分别取前 1 阶、2 阶和 5 阶,不同主模态特征向量阶

数条件下计算得到的一阶屈曲临界流速结果比较相近,和不缩减时的结果也非常接近。

5 非线性响应数值模拟

取如下参数, $n_r = n_p = 49, m = 51, \mu = 0.5, k_1 = 50, k_3 = 2000, \Omega = 2\pi, \bar{H} = 1, f = 1$, 主要对来流流速 \bar{u} 和阻尼 σ 两个参数对系统响应的影响规律进行分析。

通过主模态缩减法,取前两阶模态特征向量对非线性控制方程进行模态缩减,采用四阶精度 Runge-Kutta 方法对缩减后的控制方程进行数值积分以研究系统呈现出的复杂响应,为获得准确的系统动态行为,计算时间足够长,使瞬态响应完全消除。本文首先给出以某一参数为变参的分岔图,然后再借助相图和庞加莱截面图去判定某一参数条件下系统的响应性质。由于系统中含有外激励项,将选择以外激励的周期作为庞加莱截面选取条件。

5.1 以来流流速为分岔参数的分岔分析

本文选取来流流速 \bar{u} 为可变参数,同时取 $\sigma = 1$ 。图 3 显示了板的中点无量纲振动位移随着来流流速 \bar{u} 变化的分岔图 ($7 < \bar{u} < 8.5$), 其中纵坐标表示板的中点无量纲位移,可以看出,随着来流流速的不断增加,系统呈现非常复杂的动力学行为,其中相继出现周期、倍周期和混沌运动。在区间 $7.03 < \bar{u} < 7.165$ 中,系统一开始呈现周期 1 运动,随着流速的增大 $\bar{u} = 7.06$ 时,出现周期倍化分岔为周期 2 运动,再随之出现周期 4 运动,经过周期倍化分岔进入短暂的混沌运动,经过短暂的混沌运

动后系统又进入周期运动,再经过拟周期方式进入混沌运动。在区间 $7.655 < \bar{u} < 7.86$ 中,系统在混沌运动中间存在周期 5 窗口,在图 3 区间,系统从混沌运动到周期运动以及从周期运动到混沌运动都是阵发性的。

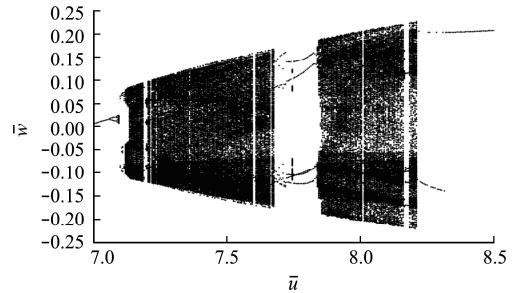


图 3 分岔图 ($\bar{u} - \bar{w}$) ($7 < \bar{u} < 8.5$)
Fig. 3 Bifurcation diagrams ($\bar{u} - \bar{w}$) ($7 < \bar{u} < 8.5$)

图 4 和图 5 分别给出了不同来流流速时的壁板中点处的振动相图和庞加莱截面图,庞加莱截面图以外激励周期为平面截取,庞加莱截面图中一个点代表一个周期,结合相图和庞加莱截面图很容易判定系统由周期 1 到周期 2 再到周期 4,经由周期倍化分岔的方式进入混沌运动,在混沌运动中存在周期 5 窗口。

5.2 以阻尼系数为分岔参数的分岔分析

选取阻尼值 σ 为可变参数,同时取 $\bar{u} = 7.08$ 。图 6 显示了板的中点无量纲振动位移随着阻尼值 σ 变化的分岔图 ($0.5 < \sigma < 0.9$), 其中纵坐标表示板的中点无量纲位移,可以看出,首先在 $\sigma = 0.5$ 系统在混沌运动中,随着阻尼值 σ 增加,系统进入

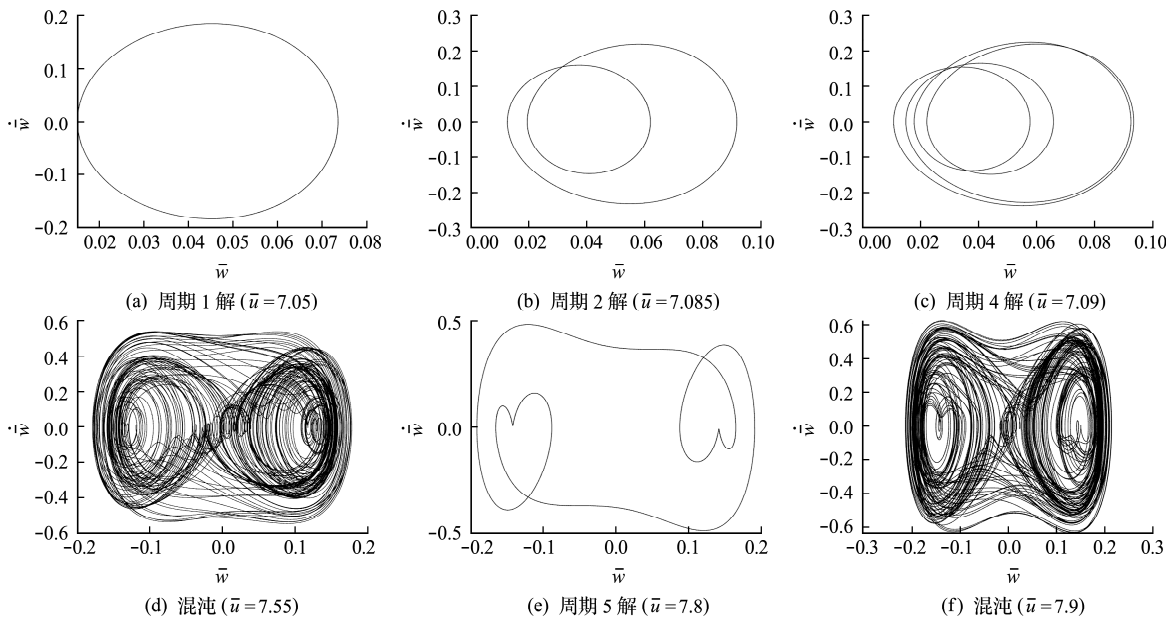


图 4 不同 \bar{u} 时的相图
Fig. 4 Phase portraits for different \bar{u}

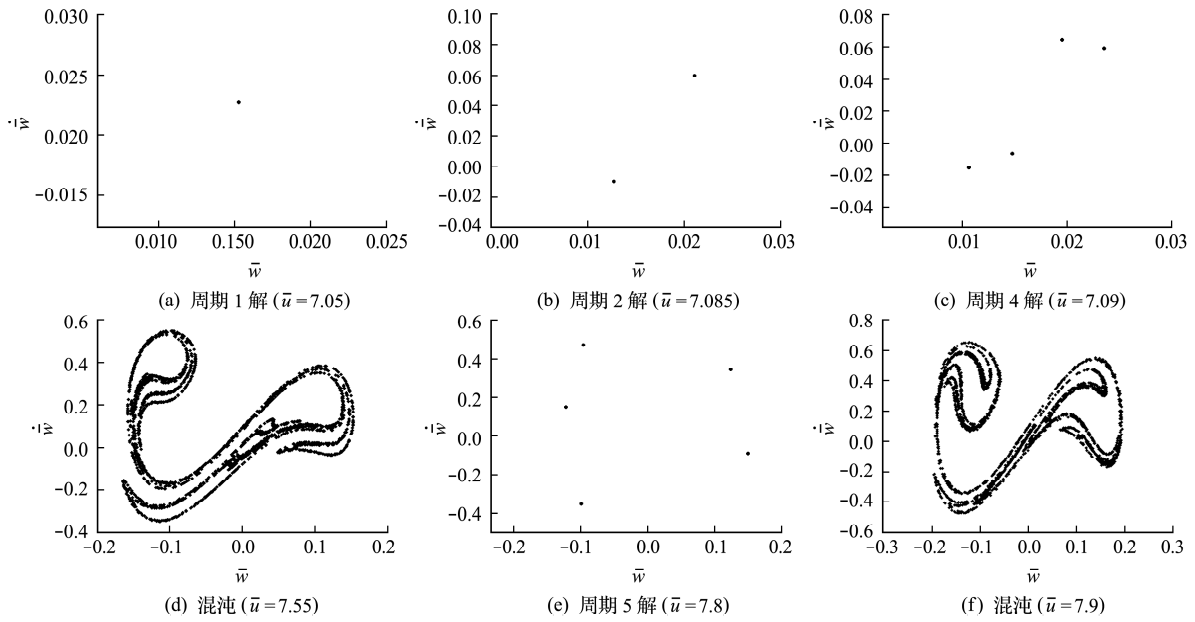


图5 不同 \bar{u} 时的庞加莱截面图
Fig. 5 Poincaré maps for different \bar{u}

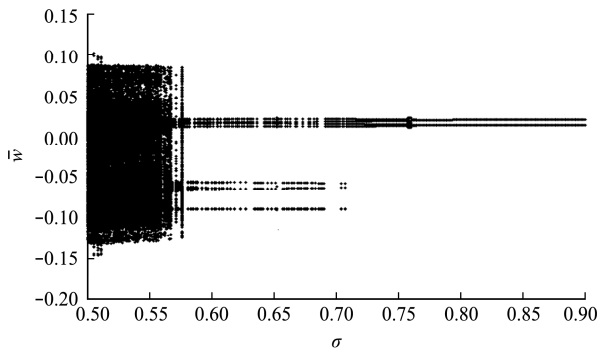


图6 分岔图 ($\sigma-\bar{w}$) ($0.5 < \sigma < 0.9$)
Fig. 6 Bifurcation diagrams ($\sigma-\bar{w}$) ($0.5 < \sigma < 0.9$)

拟周期阶段,再经过倒周期倍化分岔, $\sigma = 0.75$ 时,系统进入周期4运动,再在 $\sigma = 0.8$ 时,系统进入周期2运动。

图7和图8分别给出了不同阻尼值时的壁板中点处的振动相图和庞加莱截面图,从图7(a)和图8(a)可以看出,在 $\sigma = 0.5$ 时,系统呈现无规则运动,在庞加莱界面中有大片无规则的点,所以系统处于混沌运动中;从图7(b)和图8(b)可以看出,在 $\sigma = 0.58$ 时,系统运动有一定的规则,在庞加莱截面中呈现4片点域,此时系统处于拟周期运动

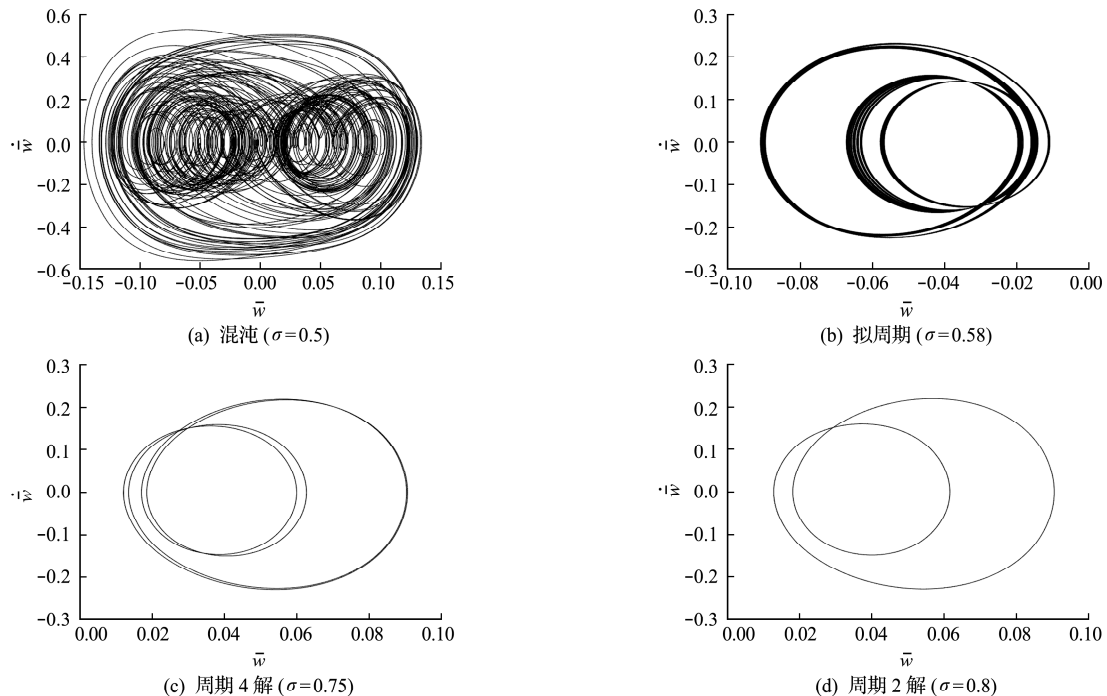


图7 不同 σ 时的相图

Fig. 7 Phase portraits for different σ

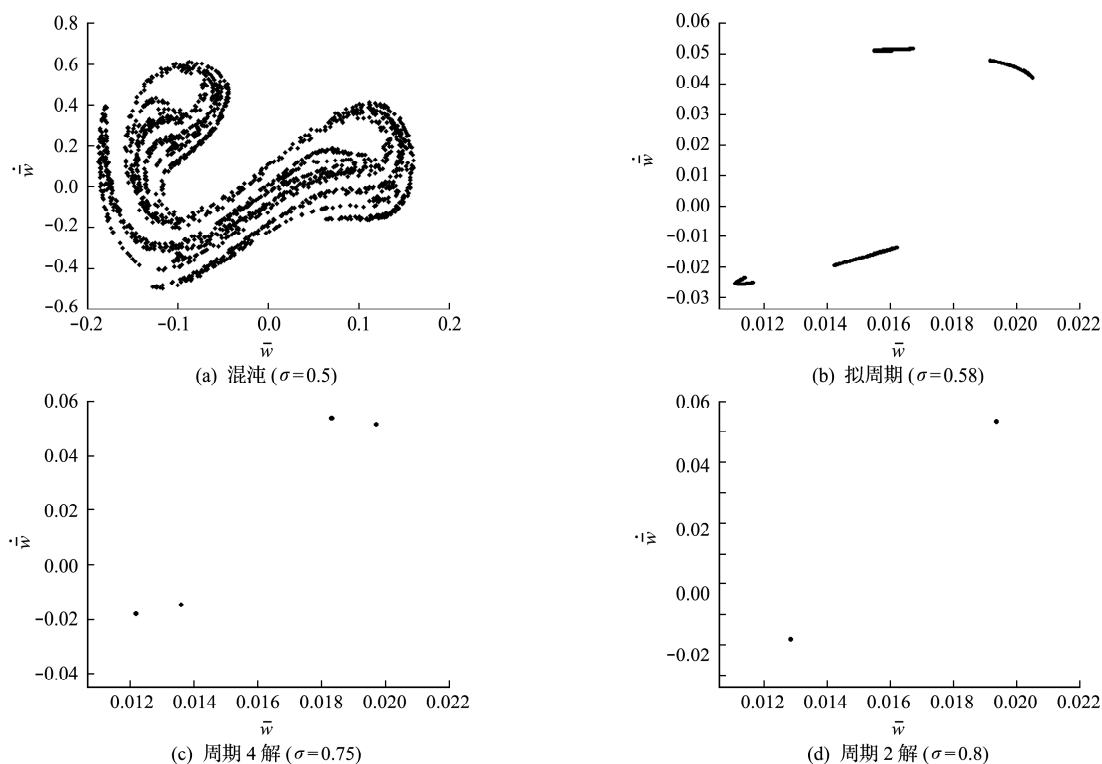


图8 不同 σ 时的庞加莱截面
Fig. 8 Poincaré maps for different σ

中;从图7(c)和图8(c)可以看出,在 $\sigma=0.75$ 时,庞加莱截面中为四个点,所以系统此时为周期4振动;从图7(d)和图8(d)可以看出,在 $\sigma=0.8$ 时,庞加莱截面中为两个点,所以系统此时为周期2振动。

6 结 语

本文用有限差分法统一离散二维板的振动方程和势函数流场方程,分析了考虑壁板前后缘刚性边界,轴向流作用下非线性均布弹簧支承二维壁板的非线性振动控制方程。有限差分法离散需要使用较多的网格点数才能得到较为精确的结果,在非线性的迭代计算时,若网格点数较多计算量会非常大,所以本文使用模态缩减法求解壁板的非线性复杂响应,通过模态缩减法会大大减少非线性迭代求解的计算量。计算结果如下。

(1) 在线性稳定性计算中,采用模态缩减法,在计算初始模态特征向量 $\{\xi\}$ 时分别考虑了流体附加质量的影响和不考虑流体附加质量的影响两种工况,这两种工况下计算得到的临界流速的计算结果与不缩减时的计算结果非常近似,模态特征向量阶数分别取前1阶、2阶和5阶,不同模态特征向量阶数条件下计算得到的一阶屈曲临界流速结果比较相近,和不缩减时的结果也非常接近。

(2) 随来流速度参数变化,系统具有极其复杂的动态响应,通过分岔图、相图和庞加莱截面图等

方法判断了系统的多种形式的周期、拟周期和混沌运动,系统经由周期倍化分岔的方式通向混沌。

(3) 在以阻尼系数为可变参数时,系统由混沌运动状态经由倒周期倍化分岔的形式在文中所取参数区间内变为周期2运动。

参考文献(References):

- [1] Groninger R, Kane J. Flow induced deflections of parallel flat plates [J]. *Nuclear Science and Engineering*, 1963, **16**(2): 218-226.
- [2] Smissaert G E. Static and dynamic hydroelastic instabilities in MTR-Type fuel elements Part I: Introduction and experimental investigation [J]. *Nuclear Engineering and Design*, 1968, **7**: 535-546.
- [3] Dugundji J, Dowell E, Perkin B. Subsonic flutter of panels on continuous elastic foundations [J]. *AIAA Journal*, 1963, **1**(5): 1146-1154.
- [4] Kornecki A, Dowell E H, O'Brien J. On the aeroelastic instability of two-dimensional panels in uniform incompressible flow [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1976, **47**(2): 163-178.
- [5] Pitman Mark W, Lucey Anthony D. On the direct determination of the eigenmodes of finite flow-structure system [J]. *Proceedings of the Royal Society A*, 2008, **465**(2101): 257-281.
- [6] Guo C Q, Paidoussis M P. Analysis of hydroelastic in-

- stabilities of rectangular parallel-plate assemblies[J]. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 2000, **122**(4): 502-508.
- [7] Guo C Q, Paidoussis M P. Stability of rectangular plates with free side-edges in two-dimensional inviscid channel flow[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2000, **67**(1):171-176.
- [8] 鲁 丽,杨翊仁. 轴向流作用下板状叠层结构的 Hopf 分叉 [J]. 科学技术与工程, 2004, **4**(6) :442-448. (LU Li, YANG Yi-ren. Hopf bifurcation of parallel plate-type structure in axial flow [J]. *Science Technology and Engineer*, 2004, **4**(6) :442-448. (in Chinese))
- [9] 董 宇,杨翊仁,鲁 丽. 基于微分求积法的轴向流作用下二维板复杂响应研究[J]. 振动与冲击, 2015, **34**(6):46-51. (DONG Yu, YANG Yi-ren, LU Li. Complicated responses of a two-dimensional plate under action of an axial liquid flow with differential quadrature method [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2015, **34**(6) :46-51. (in Chinese))
- [10] 张文生. 科学计算中的偏微分方程有限差分法[M]. 北京:高等教育出版社, 2006. (ZHANG Wen-sheng. *Finite Difference Methods for Partial Differential Equations in Science Computation* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2006. (in Chinese))

Complicated responses of a two-dimensional plate under action of an axial liquid flow with cubic stiffness

DONG Yu¹, ZHENG Hui^{*1}, YANG Yi-ren²

(1. School of Civil Engineering, Hunan University of Technology, Zhuzhou 412007, China;

2. School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract: The complicated responses of a two-dimensional simply supported plate with cubic stiffness in axial liquid flow are studied. The effect of the leading rigid edge and the trailing rigid edge of plate on flow is considered. The finite difference method is used to discretise the governing equation. In order to reduce the computation scale caused by a large number of grids, the main model order reduction method is adopted. The complex responses of system are calculated by the numerical integration method. The calculated results of bifurcation diagrams, phase-plane portraits and Poincaré maps for the plate's responses confirm definitively the existence of chaos and other complicated responses in terms of fluid velocity and damping coefficient. The chaos appears after period-doubling bifurcations or quasi-periodic motion in terms of fluid velocity. The route from chaos back to periodic motion is through period-doubling bifurcations in terms of damping coefficient.

Key words: two-dimensional plate; doubling-period bifurcations; model order reduction method