

DOI: 10.7511/jslx20221123001

带支撑广义 Maxwell 粘弹性阻尼耗能结构 风振响应分析

李创第¹, 杨雪峰¹, 李宇翔¹, 葛新广^{*2}, 王昌盛³

(1. 广西科技大学 土木建筑工程学院, 柳州 545006; 2. 广西工学院 土木建筑工程学院, 柳州 545616;
3. 黄淮学院 建筑工程学院, 驻马店 463000)

摘要:工程中粘弹性阻尼器的安装通过支撑与结构进行连接,但在安装粘弹性阻尼器的耗能结构随机响应分析中,为了简化计算过程,将支撑的刚度看作无穷大或者忽略支撑刚度的影响。实际上,对支撑刚度的影响加以考虑更能符合工程实际。针对考虑支撑刚度影响的粘弹性阻尼耗能结构风振响应分析过程复杂的问题,提出了一种求解考虑支撑影响的广义 Maxwell 粘弹性阻尼耗能结构基于 Davenport 谱风振响应的简明确析解法。在广义 Maxwell 粘弹性阻尼器微分型本构模型基础上,给出了考虑支撑刚度的粘弹性阻尼器等效本构关系。将粘弹性阻尼器等效本构关系与结构运动方程联立,采用复模态法将其解耦,获得结构风振响应的统一表达式。将耗能结构在 Davenport 风速谱下的系列响应功率谱密度函数分解为频域响应函数与 Davenport 功率谱密度函数的乘积形式,基于随机振动理论中谱矩的定义,对响应功率谱密度函数积分后获得无积分项的系列响应谱矩表达式。在算例中通过与虚拟激励法计算结果对比,验证了所提解法的准确性,并分析了支撑刚度在耗能系统中的影响。

关键词: 支撑; 广义 Maxwell 模型; 粘弹性阻尼器; Davenport 风速谱; 风振响应; 谱矩

中图分类号: O324; TU311.3

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2024)03-0428-09

1 引言

结构耗能减振是指在建筑结构的某些部位设置耗能装置或元件,通过耗能装置或元件产生的粘弹性材料滞回变形、剪切或摩擦来吸收或消耗由风荷载(或地震)对结构产生的能量,以减小结构的风振(或地震)下的动力响应。通常耗能装置和支撑构件联合构成耗能部件,设置耗能部件的结构称为耗能减振结构^[1]。耗能减振结构在设计风荷载或地震作用下,耗能部件组成的系统基本处于弹性状态,为建筑结构提供足够刚度,以满足主体结构正常使用。

粘弹性阻尼器^[2-3]是最早应用于结构耗能减振的装置之一。在 20 世纪 70 年代,粘弹性阻尼器开始应用于各种民用结构的抗风与抗震^[4,5]。由于粘弹性材料的蠕变或松弛特性的复杂性,研究者提

出多种计算模型用于描述粘弹性阻尼器的阻尼特性^[6,7],如 Kelvin 模型^[8]、Maxwell 模型^[9]、广义 Kelvin 模型^[10]、分数导数模型^[11]和广义 Maxwell 模型^[12,13]。其中广义 Maxwell 模型计算方便,增加参数可以提高计算精度,容易扩阶。此外,广义 Maxwell 模型不仅可以反应出蠕变和应力松弛特性,而且同复杂的分数导数模型一样能够描述粘弹性材料的频率依赖性^[14]。然而,关于设置粘弹性阻尼器的耗能结构在随机激励下支撑刚度的影响研究却很少。

高层建筑由于迎风面积大、阻力小和柔度大的特点,对于沿海及非地震区,风荷载往往是高层结构设计中的控制性荷载^[15]。结构风振响应具有随机的特性,需要采用随机振动理论进行分析,一般有频域法^[16]和时域法^[17]两种求解方法。当采用频域法求解结构风振响应时,结构响应功率谱可分解

收稿日期:2022-11-23; 修改稿收到日期:2023-01-24.

基金项目:国家自然科学基金(51468005);广西研究生教育创新计划(YCSW2022450);广西科技大学研究生教育创新计划(GXYC202228);河南省高等学校重点科研项目计划支持(22B560008)资助项目。

作者简介:葛新广*(1977-),男,博士,讲师(E-mail:gxgzlr.2008@163.com)。

引用本文:李创第,杨雪峰,李宇翔,等.带支撑广义 Maxwell 粘弹性阻尼耗能结构风振响应分析[J].计算力学学报,2024,41(3):428-436.
LI Chuang-di, YANG Xue-feng, LI Yu-xiang, et al. Wind vibration response analysis of a generalized Maxwell viscoelastic damped energy dissipation structures with supports[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2024, 41(3): 428-436.

为结构频率响应特征值函数与风荷载功率谱密度函数的乘积形式。频域法中典型的方法就是虚拟激励法与传递矩阵法。李创第等^[18]运用传递矩阵法求解了 Maxwell 粘弹性阻尼耗能结构巴斯金风谱下的动力响应,得出了耗能结构以第一振型展开的时域瞬态响应解析解。袁玲^[19]对虚拟激励法在高层结构横风向风振响应计算进行了研究,研究表明,虚拟激励法求解风振响应的计算精度和计算效率较高,但不能忽略高阶振型对高层结构风振响应的影响。在时域法风振响应计算中,结构响应的协方差函数采用激励协方差与结构脉冲函数的二重积分表示,因此,风振响应时域法求解时需转换为频域法求解。邹万杰等^[20]运用传递矩阵法对设置 Maxwell 粘弹性阻尼器的高层结构基于 Davenport 谱脉动风荷载下的动力响应进行了研究,得出了以第一振型表示的结构等效风荷载的解析解,但响应表达式较为复杂。

为研究支撑刚度在粘弹性阻尼耗能结构风振响应中的影响,提出了一种考虑支撑的广义 Maxwell 粘弹性阻尼耗能结构基于 Davenport 谱风振响应的简明解法。首先,基于广义 Maxwell 粘弹性阻尼器微分型本构模型,推导出了考虑支撑刚度的粘弹性阻尼器等效本构关系。其次,将粘弹性阻尼器等效本构关系与结构运动方程耦合,采用复模态法将耦合后的运动方程解耦为一阶线性方程组。并基于虚拟激励法给出耗能结构系列响应量的统一表达式。然后,将耗能结构在 Davenport 风速谱下的系列响应功率谱密度函数分解为频域响应函数与 Davenport 功率谱密度函数的乘积形式,称为二次分解法,基于随机振动理论中谱矩的定义,获得无积分项的系列响应谱矩表达式。最后,通过算例将本文解法与虚拟激励法系列响应对比,验证了本文解法的准确性,并给出了支撑刚度在耗能系统中的影响。

2 考虑支撑刚度的等效本构关系

广义 Maxwell 模型^[12,13]由一个线性弹簧单元以及多个分支的 Maxwell 阻尼单元并联构成,计算模型如图 1 所示,广义 Maxwell 模型的本构关系如下

$$P_Q(t) = k_{d0}x_Q(t) + \sum_{r=1}^m p_r \quad (1)$$

式中 $P_Q(t)$ 为广义 Maxwell 模型粘弹性阻尼器阻尼力, k_{d0} 为广义 Maxwell 模型平衡刚度, $x_Q(t)$

为粘弹性阻尼器两端产生的位移差, p_r 为广义 Maxwell 模型中第 r 个分支 Maxwell 模型的阻尼力, $r = 1 \sim m$,其微分型本构关系为

$$p_r + (c_{dr}/k_{dr})\dot{p}_r = c_{dr}\dot{x}_Q(t) \quad (2)$$

式中 k_{dr} 和 c_{dr} 分别为广义 Maxwell 模型中第 r 个分支 Maxwell 模型的刚度参数和阻尼参数。

实际工程中粘弹性阻尼器的应用需要通过支撑进行安装,合理地选取支撑刚度大小,可充分发挥粘弹性阻尼器减震性能,带撑阻尼器计算模型如图 2 所示,阻尼器与支撑布置形式如图 3 所示。

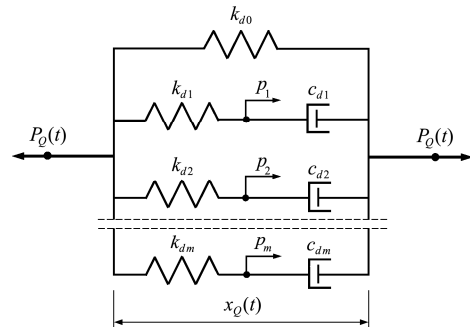


图 1 广义 Maxwell 阻尼器计算模型
Fig. 1 Generalized Maxwell damper calculation model

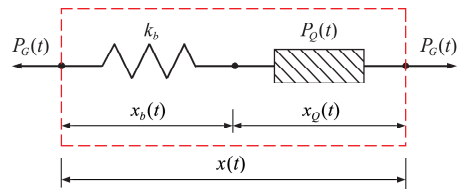


图 2 带支撑阻尼器本构关系
Fig. 2 Calculation model with support damper

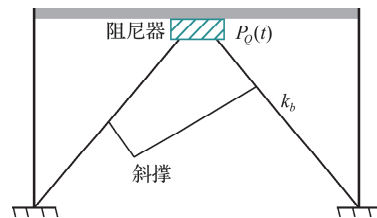


图 3 阻尼器与支撑布置形式
Fig. 3 Damper and support arrangement form

从图 2 可以看出,支撑与粘弹性阻尼器以串联方式进行连接,粘弹性阻尼器的阻尼力与支撑受力相等,则存在如下关系

$$P_G(t) = P_Q(t) \quad (3)$$

$$x(t) = x_b(t) + x_Q(t) \quad (4)$$

$$x_b(t) = P_Q(t)/k_b \quad (5)$$

式中 k_b 为支撑刚度, $x_b(t)$ 为支撑的相对位移, $x(t)$ 为结构的层间位移。

由式(4,5)将式(1,2)重写为

$$P_Q(t) = k_{d0} \left(x(t) - \frac{P_Q(t)}{k_b} \right) + \sum_{r=1}^m p_r \quad (6)$$

$$p_r(t) + \frac{c_{dr}}{k_{dr}} \dot{p}_r(t) = c_{dr} \left(\dot{x}(t) - \frac{\dot{P}_Q(t)}{k_b} \right) \quad (7)$$

式中 $\dot{x}(t)$ 为结构层间速度，即层间位移 $x(t)$ 对时间 t 的一阶导数， $\dot{P}_Q(t)$ 为粘弹性阻尼器阻尼力 $P_Q(t)$ 对时间 t 的一阶导数。

对式(6,7)进行整理,可得

$$\left(1 + \frac{k_{d0}}{k_b}\right) P_Q(t) = k_{d0} x(t) + \sum_{r=1}^m p_r \quad (8)$$

$$\dot{p}_r(t) + \frac{c_{dr}}{k_{dr}} \dot{p}_r(t) + \frac{c_{dr}}{k_b} \dot{P}_Q(t) = c_{dr} \dot{x}(t) \quad (9)$$

3 结构运动方程

在风荷载作用下,对于设置粘弹性阻尼器的多自由度结构,由式(8,9)可知,结构各层受到的粘弹性阻尼器阻尼力均可以表示为

$$P_{Q,i} = \frac{k_{i,b} k_{i,d0}}{k_{i,b} + k_{i,d0}} (x_i - x_{i-1}) + \frac{k_{i,b}}{k_{i,b} + k_{i,d0}} \sum_{r=1}^m p_{i,r} \quad (10)$$

$$p_{i,r} + \frac{c_{i,dr}}{k_{i,dr}} \dot{p}_{i,r} + \frac{c_{i,dr}}{k_{i,b}} \dot{P}_{Q,i} = c_{i,dr} (\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) \quad (11)$$

式中 $P_{Q,i}$ 为结构第 i 层的粘弹性阻尼器阻尼力, x_i 为第 i 层结构相对于地面的位移, $k_{i,d0}$ 为第 i 层粘弹性阻尼器平衡刚度, $k_{i,b}$ 和 $c_{i,dr}$ 分别为结构第 i 层粘弹性阻尼器第 r 个分支 Maxwell 模型的刚度参数和阻尼参数,其中 $r=1\sim m$; $k_{b,i}$ 为结构第 i 层支撑刚度, $p_{i,r}$ 为结构第 i 层广义 Maxwell 模型中第 r 个分支 Maxwell 模型的阻尼力;以上参数中 $i=1\sim n$ 。

由式(8,10)可知,在多自由度耗能结构系统中,阻尼器的力学关系为

$$\lambda P_Q = K_0 x + BP \quad (12)$$

式中 $\lambda = \text{diag}(1 + k_{i,d0}/k_{i,b})$

$$P_Q = [P_{Q,1} \quad P_{Q,2} \quad \dots \quad P_{Q,n}]^T$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} k_{1,d0} & & & & & \\ -k_{2,d0} & k_{2,d0} & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -k_{n,d0} & k_{n,d0} \end{bmatrix}$$

$$P = [p_{1,1} \quad \dots \quad p_{1,m} \quad \dots \quad p_{n,1} \quad \dots \quad p_{n,m}]^T$$

由式(9,11)可知,结构各层中分支 Maxwell 模型的阻尼力矩阵为

$$\beta \dot{P}_Q + \alpha \dot{P} + P = D \dot{x} \quad (13)$$

式中 $\alpha = \text{diag}(\alpha_i)$

$$\alpha_i = \text{diag}\left(\frac{c_{i,d1}}{k_{i,d1}} \quad \frac{c_{i,d2}}{k_{i,d2}} \quad \dots \quad \frac{c_{i,dm}}{k_{i,dm}}\right)$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 & & & & \\ & \beta_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & \beta_n \end{bmatrix}$$

$$\beta_i = \begin{bmatrix} \frac{c_{i,d1}}{k_{i,b}} & \frac{c_{i,d2}}{k_{i,b}} & \dots & \frac{c_{i,dm}}{k_{i,b}} \end{bmatrix}^T$$

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & & & & \\ -D_2 & D_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & -D_n & D_n \end{bmatrix}$$

$$D_i = [c_{i,d1} \quad c_{i,d2} \quad \dots \quad c_{i,dm}]^T$$

设置粘弹性阻尼器的多自由度结构计算如图 4 所示,结构的运动方程可表示为

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx + T_P P_G(t) = F(t) \quad (14)$$

式中 M 为结构的质量矩阵, C 和 K 分别为结构的阻尼和刚度矩阵, x 为结构各层的位移向量, $x = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T$, T 表示矩阵转置, T_P 为粘弹性阻尼器阻尼力位置矩阵, $T_P(i, i) = 1, T_P(i, i + 1) = -1$, 其余元素均为 0, $F(t)$ 为脉动风荷载向量, $F(t) = [p_f(h_1, t) \quad p_f(h_2, t) \quad \dots \quad p_f(h_n, t)]^T$ 。

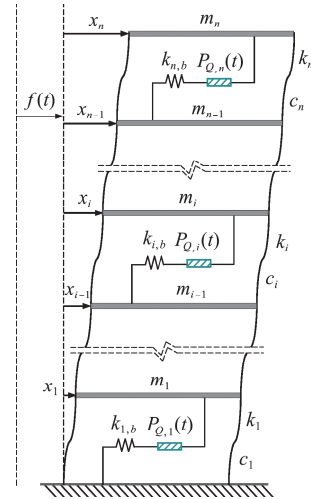


图 4 耗能结构计算

Fig. 4 Calculation diagram of energy-consuming structure

结构在高度 h_i 处楼层受到的脉动风压力 $p_f(h_i, t)$ 可表示为^[21]

$$p_f(h_i, t) = I_0(h_i) B(h_i) f(t) \quad (15)$$

$$B(h_i) = \sqrt{24K_r / [\mu_z(h_i)]} \bar{p}(h_i) \quad (16)$$

式中 $I_0(h_i)$ 为方差为 1 的随机变量, $B(h_i)$ 为脉动风压强度参数, $f(t)$ 为 Davenport 风速谱, K_r 为表面阻力系数^[22], $\mu_z(h_i)$ 为离地高度为 h_i 的风压高度变化系数, $\bar{p}(h_i)$ 为离地高度 h_i 处的平均风压力,其表达式为

$$\bar{p}(h_i) = A_i \mu_z(h_i) \mu_z(h_i) \omega_0 \quad (17)$$

式中 $\mu_s(h_i)$ 和 ω_0 分别为高度 h_i 处的风荷载体型系数和场地基本风压, A_i 为结构风压力计算迎风面积。

式(15)中 Davenport 风速谱 $f(t)$ 为均值等于 0 的平稳随机过程,且具有单边规格化的风速功率谱为

$$S_u(\omega) = \frac{4}{3}\pi \frac{a^2 \omega}{(1 + a^2 \omega^2)^{4/3}} \quad (18)$$

式中 $a = 600/(\pi \bar{V}_{10})$, $\omega \geq 0$, \bar{V}_{10} 为离地高度 10 m 的标准平均风速。

任意两质点受到的脉动风压不能同时达到最大值,则考虑空间相关性的风压功率谱与 Davenport 风速谱之间存在关系^[21]

$$S_{P_j}(h_i, h_j, \omega) = \rho_{ij} S_u(\omega) \quad (19)$$

$$\rho_{ij} = \exp\left[-\frac{1}{60} |h_i - h_j|\right] B(h_i) B(h_j) \quad (20)$$

式中 ρ_{ij} 为高度 h_i 和 h_j 的风压空间性及强度综合参数。

4 耗能结构系列风振响应

4.1 运动方程的复模态解耦

由式(3)可知粘弹性阻尼器的阻尼力与支撑受力相等,将式(12)代入式(14),结构运动方程可改写为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \left(\mathbf{K} + \frac{\mathbf{T}_P}{\lambda} \mathbf{K}_0\right)\mathbf{x} + \frac{\mathbf{T}_P \mathbf{B}}{\lambda} \mathbf{P} = \mathbf{F}(t) \quad (21)$$

式(12)求导后代入式(13),整理后可得

$$\frac{\beta}{\lambda} \mathbf{K}_0 \dot{\mathbf{x}} + \left(\frac{\beta \mathbf{B}}{\lambda} + \boldsymbol{\alpha}\right) \dot{\mathbf{P}} + \mathbf{P} = \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} \quad (22)$$

引入状态变量

$$\mathbf{y} = [\mathbf{x} \quad \dot{\mathbf{x}} \quad \mathbf{P}]^T \quad (23)$$

联立式(21,22)和方程 $\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, 则耗能系统的一阶状态方程可写为

$$\bar{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{y} = \bar{\mathbf{F}}(t) \quad (24)$$

$$\text{式中 } \bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} & \mathbf{O}_1 \\ \mathbf{M} & \mathbf{O}_2 & \mathbf{O}_1 \\ \mathbf{O}_1^T & \mathbf{O}_1^T & \beta \mathbf{B}/\lambda + \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{F}}(t) = [\mathbf{F}(t)^T \quad \mathbf{O}_3 \quad \mathbf{O}_4]^T$$

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} + \frac{\mathbf{T}_P}{\lambda} \mathbf{K}_0 & \mathbf{O}_2 & \frac{\mathbf{T}_P \mathbf{B}}{\lambda} \\ \mathbf{O}_2 & -\mathbf{M} & \mathbf{O}_1 \\ \mathbf{O}_1^T & \frac{\beta}{\lambda} \mathbf{K}_0 - \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{bmatrix}$$

\mathbf{O}_1 为 $n \times nm$ 阶的零矩阵, \mathbf{O}_2 为 $n \times n$ 阶的零矩阵, \mathbf{O}_3 为元素全为 0 的 $n \times 1$ 阶行向量, \mathbf{O}_4 为元素全为 0 的 $nm \times 1$ 的行向量, \mathbf{E} 为 $nm \times nm$ 的单位矩阵。

由复模态理论^[23], 式(24)存在特征值矩阵 \mathbf{q} 和右、左特征向量矩阵 \mathbf{U} 和 \mathbf{V} 满足以下关系

$$\mathbf{q} = (\mathbf{V}^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{U}) / (\mathbf{V}^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{U}) \quad (25)$$

式中 \mathbf{q} 为对角阵,且其元素实部为负。

由复模态变换

$$\mathbf{y} = \mathbf{U} \mathbf{Z} \quad (26)$$

式中 \mathbf{Z} 为广义复模态参数。

将式(26)代入(24),则方程(24)可解耦为

$$\dot{\mathbf{Z}} + \mathbf{q} \mathbf{Z} = \boldsymbol{\eta} \bar{\mathbf{F}}(t) \quad (27)$$

式中 $\boldsymbol{\eta}$ 为复模态阵型强度系数向量

$$\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{V}^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{U})^{-1} \mathbf{V}^T$$

由式(25,15)可得式(27)的分量形式

$$\dot{Z}_k + q_k Z_k = \sum_{i=1}^n \eta_{k,i} p_f(h_i, t) \quad (28)$$

式中 $\eta_{k,i}$ 为 $\boldsymbol{\eta}$ 矩阵第 k 行第 i 列的元素, $k=1 \sim 2n + nm$ 。

由虚拟激励法^[16], 式(28)的频域解为

$$Z_k(\omega) = \frac{1}{p_k + j\omega} \sqrt{S_u(\omega)} e^{j\omega t} \sum_{i=1}^n \eta_{k,i} I_0(h_i) B(h_i) \quad (29)$$

式中 $j = \sqrt{-1}$ 。

由式(23,26)可得,结构系列响应和阻尼器的频域解可表示为

$$x_i = \sum_{k=1}^N U_{i,k} Z_k(\omega) \quad (30)$$

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^N U_{n+i,k} Z_k(\omega) \quad (31)$$

$$\Delta x_i = \sum_{k=1}^N (U_{i,k} - U_{i-1,k}) Z_k(\omega) \quad (32)$$

$$\Delta \dot{x}_i = \sum_{k=1}^N (U_{n+i,k} - U_{n+i-1,k}) Z_k(\omega) \quad (33)$$

$$P_{G,i} = \frac{k_{i,b}}{k_{i,b} + k_{i,d0}} \left[k_{i,d0} \sum_{k=1}^N (U_{i,k} - U_{i-1,k}) + \sum_{k=1}^N (U_{2n+(i-1)m+1,k} + \dots + U_{2n+im,k}) \right] Z_k(\omega) \quad (34)$$

式中 $x_i, \dot{x}_i, \Delta x_i$ 和 $\Delta \dot{x}_i$ 分别为结构第 i 层位移、结构速度、层间位移和层间速度, $U_{i,k}$ 为右特征向量 \mathbf{U} 第 i 行第 k 列的元素, $N = 2n + nm$ 。

由式(30,33)可知,结构系列响应的频域解可统一表示为

$$D_l = \sum_{k=1}^N \bar{U}_{l,k} Z_k(\omega) \quad (35)$$

式中 当 $\bar{U}_{l,k} = U_{i,k}$ 时, D_l 为第 i 层结构的位移或层间位移;当 $\bar{U}_{l,k} = U_{n+i,k}$ 时, D_l 为第 i 层结构的层间速度。

4.2 结构基于 Davenport 风速谱响应功率谱分析

由虚拟激励法^[16]可知,式(35)的结构响应功

率谱可表示为

$$S_{D_l}(\omega) = \sum_{k=1}^N \sum_{s=1}^N \bar{U}_{l,k} \bar{U}_{l,s} Z_k(\omega) Z_s^*(\omega) \quad (36)$$

式中 $Z_k^*(\omega)$ 为 $Z_k(\omega)$ 的共轭项, 即 $Z_k^*(\omega) = Z_k(-\omega)$ 。

将式(29)代入式(36), 结构系列响应量 D_l 的响应功率谱表达式为

$$S_{D_l}(\omega) = \sum_{k=1}^{2n+nm} \sum_{s=1}^{2n+nm} \bar{U}_{l,k} \bar{U}_{l,s} \frac{1}{p_k + j\omega} \sqrt{S_u(\omega)} e^{j\omega t} \times \sum_{i_1=1}^n \eta_{k,i_1} I_0(h_{i_1}) B(h_{i_1}) \frac{1}{p_s - j\omega} \times \sqrt{S_u(\omega)} e^{-j\omega t} \sum_{i_2=1}^n \eta_{s,i_2} I_0(h_{i_2}) B(h_{i_2}) \quad (37)$$

由数学恒等式, 式(37)可化为

$$S_{D_l}(\omega) = \sum_{k=1}^N \mu_k A_k + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{s=k+1}^N \mu_{s,k} B_{s,k} \quad (38)$$

式中 $\mu_k = \bar{U}_{l,k}^2$, $\mu_{s,k} = \bar{U}_{l,k} \bar{U}_{l,s}$, $A_k = Z_k(\omega) Z_k^*(\omega)$, $B_{s,k} = Z_s(\omega) Z_k^*(\omega) + Z_k(\omega) Z_s^*(\omega)$ 。

将式(29)代入 A_k 和 $B_{s,k}$, 参考文献[21]可得

$$A_k = \frac{\lambda_k}{p_k^2 + \omega^2} S_u(\omega) \quad (39)$$

$$B_{s,k} = \frac{\lambda_{s,k} S_u(\omega)}{p_s + p_k} \left(\frac{2p_s}{p_s^2 + \omega^2} + \frac{2p_k}{p_k^2 + \omega^2} \right) \quad (40)$$

$$\text{式中 } \lambda_k = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \eta_{k,i_1} \eta_{k,i_2} \rho_{i_1 i_2}$$

$$\lambda_{s,k} = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \eta_{s,i_1} \eta_{k,i_2} \rho_{i_1 i_2}$$

将式(39,40)代入式(38), 结构系列响应功率谱可表示为

$$S_{D_l}(\omega) = H_{D_l}(\omega) S_u(\omega) \quad (41)$$

式中 $H_{D_l}(\omega)$ 具体的表达式为

$$H_{D_l}(\omega) = \left[\sum_{k=1}^N \frac{\mu_k \lambda_k}{p_k^2 + \omega^2} + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{s=k+1}^N \frac{\mu_{s,k} \lambda_{s,k}}{p_s + p_k} \times \left(\frac{2p_s}{p_s^2 + \omega^2} + \frac{2p_k}{p_k^2 + \omega^2} \right) \right] \quad (42)$$

由频域法可知, 耗能结构风振响应功率密度函数谱可分解为频域响应函数与激励功率谱密度函数的乘积形式。因此, 耗能结构在 Davenport 谱风荷载作用下的系列响应功率谱可用结构的频域响应函数 $H_{D_l}(\omega)$ 与 Davenport 谱功率谱密度函数 $S_u(\omega)$ 的乘积进行表达。由式(42)可知, 结构的频域响应函数可由结构振动复特征值 p_k^2 与频域变量 ω^2 的组合形式得出, 并且具有正交性与简洁的特性, 称之为频域响应函数的二次分解法^[21]。其表达式较为简洁, 且得到的频率响应函数为显式解, 为后文求解结构系列响应谱矩奠定了基础。

4.3 耗能结构基于 Davenport 谱的响应谱矩

由随机振动理论^[24], 耗能结构位移 0 阶~2 阶谱矩的表达式为

$$\alpha_{D_l, q} = \int_0^\infty \omega^q S_{D_l}(\omega) d\omega \quad (q = 0, 1, 2) \quad (43)$$

令 $q = 0$, 将式(41)代入式(43)可得耗能结构响应 0 阶谱矩表达式为

$$\alpha_{D_l, 0} = \sum_{k=1}^N \lambda_k \mu_k X_{k,0} + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{s=k+1}^N \frac{\lambda_{s,k} \mu_{s,k}}{p_s + p_k} \times (p_s X_{s,0} + p_k X_{k,0}) \quad (44)$$

式中 $X_{k,0}$ 推导过程见文献[21], 其具体表达式为

$$X_{k,0} = \frac{2\pi a^2}{c^3} \left[1 + \sum_{i=1}^3 b_i \ln(1 - t_i) \right] \quad (45)$$

令 $q = 1$, 将式(41)代入(43)积分可求出耗能结构响应的 1 阶谱矩表达式为

$$\alpha_{D_l, 1} = \sum_{k=1}^N \lambda_k \mu_k X_{k,1} + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{s=k+1}^N \frac{\lambda_{s,k} \mu_{s,k}}{p_s + p_k} \times (p_s X_{s,1} + p_k X_{k,1}) \quad (46)$$

$$X_{k,1} = \frac{2}{3} a \left\{ \pi^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) {}_2F_1\left(\frac{5}{6}, 1; 0.5; a^2 p_k^2\right) \times \left[\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \right]^{-1} - \frac{\pi^2 a p_k}{(1 - a^2 p_k^2)^{4/3}} \right\} \quad (47)$$

式中 ${}_2F_1(a_1, a_2; a_3; a_4)$ 为参数为 $a_1, a_2; a_3; a_4$ 的超几何函数, $\Gamma(x)$ 为伽马函数, $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ 。

令 $q = 2$, 将式(41)代入式(43)可得耗能结构响应 2 阶谱矩表达式为

$$\alpha_{D_l, 2} = \sum_{k=1}^N \lambda_k \mu_k X_{k,2} + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{s=k+1}^N \frac{\lambda_{s,k} \mu_{s,k}}{p_s + p_k} \times (p_s X_{s,2} + p_k X_{k,2}) \quad (48)$$

式中 $X_{k,2}$ 推导过程见文献[21], 其表达式为

$$X_{k,2} = \frac{2}{3} \pi \int_1^\infty \frac{3t^2}{t^4} dt = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt = 2\pi - p_k^2 X_{k,0} \quad (49)$$

由式(44,46,48)可知, 带支撑的广义 Maxwell 模型粘弹性阻尼耗能结构基于 Davenport 风速谱无积分形式的 0 阶~2 阶响应谱矩解析解均已得出。

5 算例

— 12 层钢筋混凝土框架结构, 结构阻尼采用 Rayleigh 阻尼, 结构阻尼比 $\xi = 0.05$ 。结构各层质量为 $m_i = 3.80 \times 10^5$ kg, 层间刚度为 $k_i = 4.53 \times 10^7$ N/m; 各层楼层高度均为 4.0 m。风荷载模型采用 Davenport 风速谱, 结构各层迎风面积均为 200 m², 离地高度 10 m 的标准平均风速 $\bar{V}_{10} = 33.5$ m/s; 建筑所在地风荷载地面粗糙度为 A 类地区, 表面阻力系数 $K_r = 0.00129$ 。各层支撑刚度

$k_{i,b}=0.5k_i$; 广义 Maxwell 阻尼取两分支其参数为 $k_{d0}=7.59\times 10^5$ N/m, $k_{d1}=12.65\times 10^5$ N/m, $k_{d2}=10.63\times 10^5$ N/m, $t_1=0.08$ s, $t_2=0.10$ s。

5.1 谱矩计算精度的验证

为了验证本文解法计算风振响应谱矩的正确性与精度,将运用本文解法求得的 0 阶~2 阶谱矩(式(44,46,48))与虚拟激励法求出的谱矩进行对比分析。由于虚拟激励法中响应在谱矩计算时采用数值积分方法,其计算结果受到积分步长的影响较大。本文选取了虚拟激励法积分步长 1.0 rad/s,

0.5 rad/s,0.05 rad/s 和 0.01 rad/s 四种工况下的响应谱矩计算结果与本文结果进行对比。积分上限为 200 rad/s,以结构绝对位移和结构层间位移的 0 阶~2 阶谱矩为例,对比结果如图 5~图 10 所示。可以看出,随着虚拟激励法积分步长的减小,所得的谱矩计算结果与本文解法获得的谱矩结果逐渐逼近并与虚拟激励法稳定结果重合,从而验证了本文解法的计算精度,且本文解法在谱矩计算过程中无需积分运算,相较于虚拟激励法更具有计算精度优势。

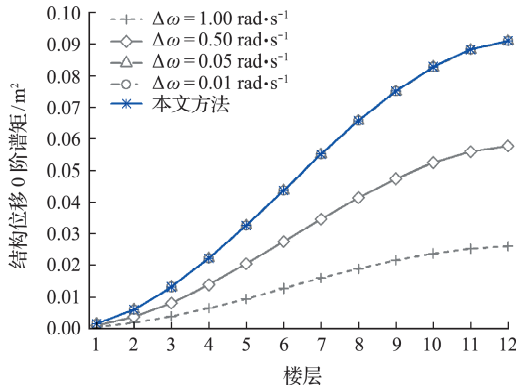


图 5 结构绝对位移 0 阶谱矩

Fig. 5 Absolute displacement 0-order spectral moment of the structure

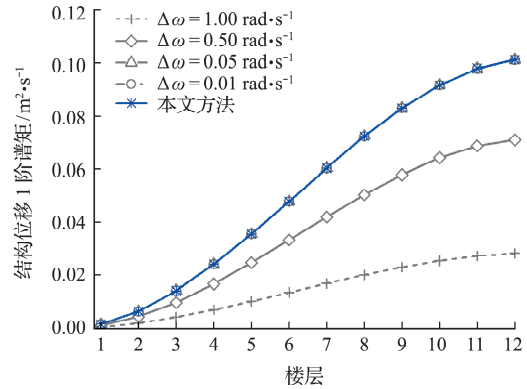


图 6 结构绝对位移 1 阶谱矩

Fig. 6 Absolute displacement 1-order spectral moment of the structure

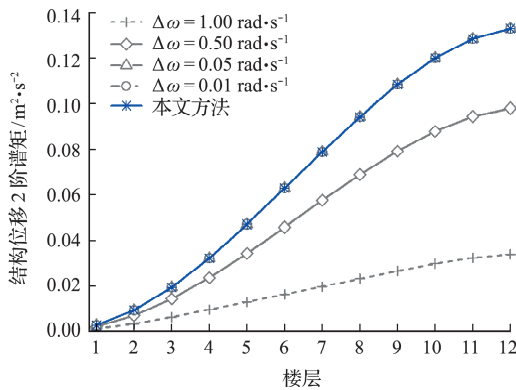


图 7 结构绝对位移 2 阶谱矩

Fig. 7 Absolute displacement 2-order spectral moment of the structure

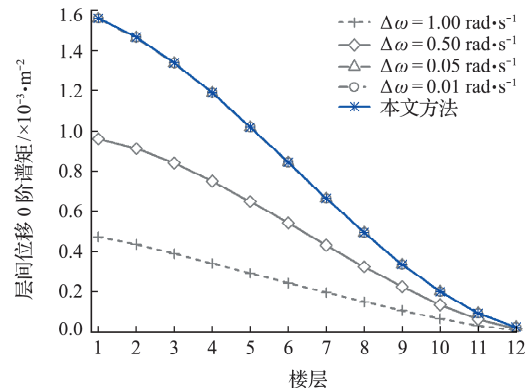


图 8 结构层间位移 0 阶谱矩

Fig. 8 Structural interlayer displacement 0-order spectral moment

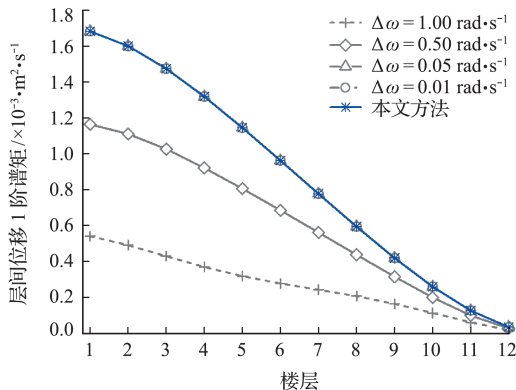


图 9 结构层间位移 1 阶谱矩

Fig. 9 Structural interlayer displacement 1-order spectral moment

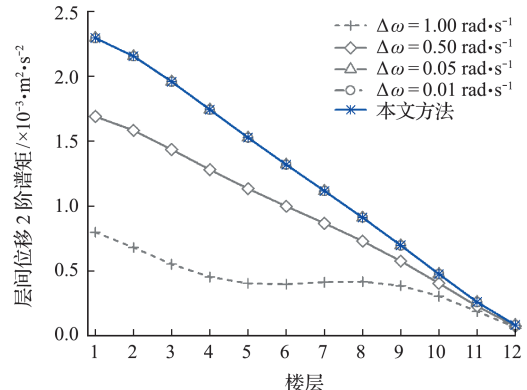


图 10 结构层间位移 2 阶谱矩

Fig. 10 Structural interlayer displacement 2-order spectral moment

5.2 阻尼力及支撑位移谱矩的验证

验证本文解法与虚拟激励法在计算阻尼力及支撑位移 0 阶~2 阶谱矩的正确性与精度。积分上限为 200 rad/s, 选取虚拟激励法积分步长 1.0 rad/s, 0.5 rad/s, 0.05 rad/s 和 0.01 rad/s 四种工况下的响应谱矩计算结果与本文结果进行对比。阻尼力及支撑位移 0 阶~2 阶谱矩对比结果如图 11~图 16 所示, 可以看出, 虚拟激励法谱矩计算结果与本文解法获得结果逐渐逼近并最终

吻合, 验证了本文解法的正确性。从图 11~图 13 可以看出, 阻尼力谱矩随着楼层的增加而逐渐减小, 这是由于结构层间随着高度的增加而减小, 导致安装在较高楼层的阻尼器的减振效率降低。在实际工程中粘弹性阻尼器的安装离不开支撑, 图 14~图 16 对比了两种解法的支撑位移的 0 阶~2 阶谱矩, 可以看出支撑位移伴随着楼层的变化而变化, 随着楼层高度的增加支撑位移谱矩逐渐减小。

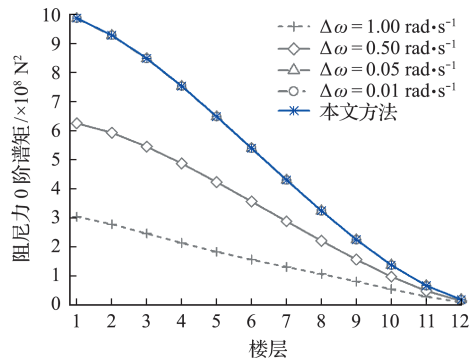


图 11 阻尼力 0 阶谱矩

Fig. 11 0-order spectral moment of damping force

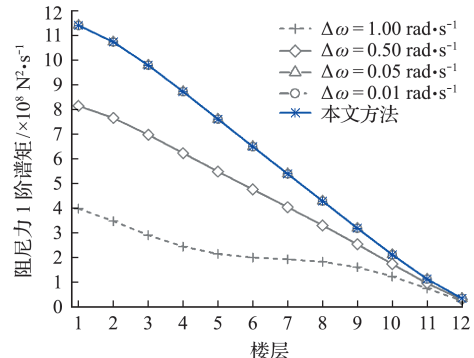


图 12 阻尼力 1 阶谱矩

Fig. 12 1-order spectral moment of damping force

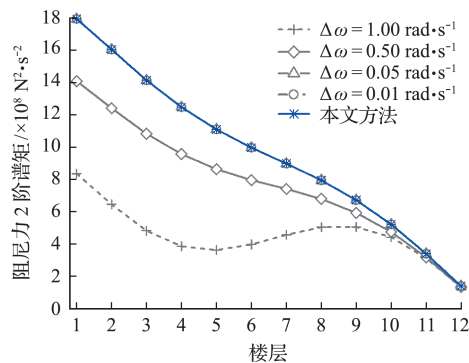


图 13 阻尼力 2 阶谱矩

Fig. 13 2-order spectral moment of damping force

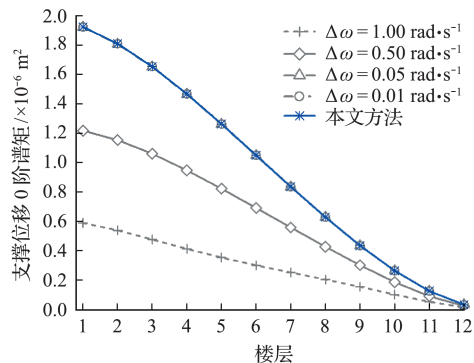


图 14 支撑位移 0 阶谱矩

Fig. 14 0-order spectral moment of support displacement

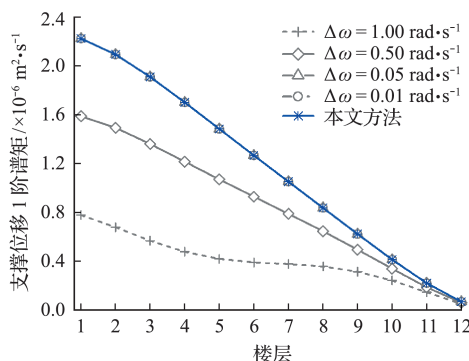


图 15 支撑位移 1 阶谱矩

Fig. 15 1-order spectral moment of support displacement

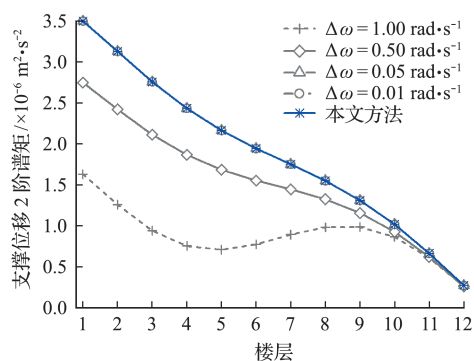


图 16 支撑位移 2 阶谱矩

Fig. 16 2-order spectral moment of support displacement

6 结论

本文对带支撑的广义 Maxwell 粘弹性阻尼器耗能结构系统进行了研究, 综合运用 Davenport 功

率谱密度函数二次分解法获得了耗能结构风振系列响应的 0 阶~2 阶谱矩解析解。相较于传统计算方法虚拟激励法, 提高了响应分析的计算精度, 获得如下结论。

(1) 根据广义 Maxwell 粘弹性阻尼器微分型本构模型,给出了考虑支撑刚度的阻尼器本构关系。将考虑支撑刚度的阻尼器本构关系与结构运动方程联立,运用复模态法将耗能结构运动方程解耦一阶微分方程,结合一阶微分方程的虚拟激励法,得到了耗能结构风振响应的统一表达式。

(2) 将耗能结构在 Davenport 风荷载下的系列响应功率谱密度函数分解为频域响应函数与 Davenport 功率谱密度函数的乘积,且结构的频域响应函数由结构振动复特征值 p_k^2 与频域变量 ω^2 的组合形式得出,称之为功率谱密度函数二次分解法,该表达式具有简洁性,且得到的频率响应函数为显式解。

(3) 运用 Davenport 功率谱密度函数二次分解法获得了耗能结构风振系列响应的 0 阶~2 阶谱矩解析解。本文系列谱矩为无需积分运算的解析解,通过与虚拟激励法获得的稳定谱矩值进行对比,验证本文方法的精确性,且不受积分步长的影响。

(4) 考虑了支撑在耗能系统的影响,给出了粘弹性阻尼器阻尼力和支撑位移 0 阶~2 阶谱矩解析解,相较于忽略支撑刚度的影响或将支撑刚度看作无穷大,本文的计算结果更接近于工程实际。

参考文献(References):

- [1] 陈永祁,马良喆,彭程. 建筑结构液体黏滞阻尼器的设计与应用[M]. 北京:中国铁道出版社,2018. (CHEN Yong-qi, MA Liang-zhe, PENG Cheng. *Design and Application of Liquid Viscous Damper for Building Structure* [M]. Beijing: China Railway Publishing House, 2018. (in Chinese))
- [2] Yao J T P. Concept of structural control[J]. *Journal of the Structural Division*, 1972, **98**(7): 1567-1574.
- [3] Ma R S, Bi K M, Hao H. Inerter-based structural vibration control: A state-of-the-art review [J]. *Engineering Structures*, 2021, **243**: 112655.
- [4] Sato D, Osabel D M, Kasai K. Evaluation method for practical application of viscoelastic damper using equivalent sinusoidal waveforms of long-duration random excitations in along-and across-wind directions [J]. *Engineering Structures*, 2022, **254**: 113735.
- [5] Crewe A. Passive energy dissipation systems in structural engineering [J]. *Structural Safety*, 1998, **20**(2): 197-198.
- [6] Ferry J. *Viscoelastic Properties of Polymer* [M]. New York: Wiley and Sons, 1980.
- [7] Nakra B C. Vibration control with viscoelastic materials-III [J]. *The Shock and Vibration Digest*, 1984, **16**(5): 17-22.
- [8] 李创第,杨雪峰,李宇翔,等. 设置连接阻尼器的相邻结构随机地震动响应的简明封闭解[J]. 计算力学学报, 2022, **39**(6): 729-736. (LI Chuang-di, YANG Xue-feng, LI Yu-xiang, et al. A concise closed-form solution for the random ground vibration response of two adjacent structures with connected dampers [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2022, **39**(6): 729-736. (in Chinese))
- [9] Mathur V, Khandelwal K. Flow of fractional maxwell fluid in oscillating pipe-like domains [J]. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 2017, **3**(2): 841-858.
- [10] Makris N. Complex-parameter kelvin model for elastic foundations [J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 1994: **23**(3): 251-264.
- [11] Ge X G, Gong J H, Zhao C J, et al. Structural dynamic responses of building structures with non-viscous dampers under Kanai-Tajimi spectrum excitation [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2022, **517**: 116556.
- [12] Renaud F, Dion J L, Chevallier G, et al. A new identification method of viscoelastic behavior: Application to the generalized Maxwell model [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2011, **25**(3): 991-1010.
- [13] 刘美华,邹万杰,葛新广,等. 基于欧进萍谱的广义 Maxwell 耗能结构随机响应简明解法[J]. 振动与冲击, 2022, **41**(4): 124-133. (LIU Mei-hua, ZOU Wan-jie, GE Xin-guang, et al. A concise analytic solution to seismic response of structure with generalized Maxwell dampers under OU Jinping spectrum excitation [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2022, **41**(4): 124-133. (in Chinese))
- [14] Shu Z, You R K, Zhou Y. Viscoelastic materials for structural dampers: A review [J]. *Construction and Building Materials*, 2022, **342**: 127955.
- [15] 武岳. 风工程与结构抗风设计(第二版)[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2019. (WU Yue. *Wind Engineering and Wind-Resistant Design of Structures* (2nd Edition) [M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2019. (in Chinese))
- [16] 林家浩,张亚辉,赵岩. 虚拟激励法在国内外工程界的应用回顾与展望[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(1): 1-32. (LIN Jia-hao, ZHANG Ya-hui, ZHAO Yan. The pseudo-excitation method and its industrial application in China and abroad [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(1): 1-32. (in Chinese))
- [17] 杨庆山,沈世钊. 悬索结构随机风振反应分析[J]. 建筑结构学报, 1998, **19**(4): 29-39. (YANG Qing-shan, SHEN Shi-zhao. Wind induced random response anal-

- ysis of cable roof structures[J]. *Journal of Building Structures*, 1998, **19**(4):29-39. (in Chinese))
- [18] 李创第, 杜传知, 葛新广. 高层 Maxwell 耗能结构随机风振响应解析分析[J]. 广西科技大学学报, 2017, **28**(2):79-84, 118. (LI Chuang-di, DU Chuan-zhi, GE Xin-guang. Analysis of random wind-induced response of tall building structure with Maxwell dampers[J]. *Journal of Guangxi University of Science and Technology*, 2017, **28**(2):79-84, 118. (in Chinese))
- [19] 袁 玲. 高层建筑横风向风荷载特性与风振效应研究[D]. 广州大学, 2014. (YUAN Ling. Study on Characteristics of Cross-Wind Wind Load and Wind-Induced Vibration Effect of High-Rise Buildings[D]. Guangzhou University, 2014. (in Chinese))
- [20] 邹万杰, 郭昭君, 李创第. 多自由度 Maxwell 结构基于传递矩阵法的风振响应解析法[J]. 桂林理工大学学报, 2017, **37**(1):68-76. (ZOU Wan-jie, GUO Zhao-jun, LI Chuang-di. Analysis of wind induced vibration response based on transfer matrix method for multi-degree freedom Maxwell structures[J]. *Journal of Guilin University of Technology*, 2017, **37**(1):68-76. (in Chinese))
- [21] Li C D, Yang X F, Li Y X, et al. Wind vibration responses of structure with generalized Maxwell model viscoelastic dampers[J]. *Structures*, 2023, **47**:425-433.
- [22] 王修琼, 崔剑峰. Davenport 谱中系数 K 的计算公式及其工程应用[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2002, **30**(7):849-852. (WANG Xiu-qiong, CUI Jian-feng. Formula of coefficient K in expression of davenport spectrum and its engineering application [J]. *Journal of Tongji University (Natural Science Edition)*, 2002, **30**(7):849-852. (in Chinese))
- [23] 方 同. 工程随机振动[M]. 北京:国防工业出版社, 1995. (FANG Tong. *Engineering Random Vibration* [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1995. (in Chinese))

Wind vibration response analysis of a generalized Maxwell viscoelastic damped energy dissipation structures with supports

LI Chuang-di¹, YANG Xue-feng¹, LI Yu-xiang¹, GE Xin-guang^{*2}, WANG Chang-sheng³
 (1. School of Civil and Architectural Engineering, Guangxi University of Science and Technology, Liuzhou 545006, China;
 2. School of Civil and Architectural Engineering, Guangxi University of Technology, Liuzhou 545616, China;
 3. Architectural Engineering Institute, HuangHuai University, Zhumadian 463000, China)

Abstract: Viscoelastic dampers are connected to a structure by using supports during installation. In the analysis of the stochastic response of energy-consuming structures with viscoelastic dampers, the stiffness of the supports is often considered infinite or the influence of the support stiffness is often ignored in order to simplify the simulation process. In fact, it is more practical to consider the influence of brace stiffness. Aiming at the complicated process of wind-induced vibration response analysis of viscoelastic damping energy dissipation structures considering the influence of brace stiffness, a concise analytical solution based on Davenport spectrum for wind vibration response of generalized Maxwell viscoelastic damping energy dissipation structures considering brace stiffness is proposed. Based on the differential constitutive model of a generalized Maxwell viscoelastic damper, the equivalent constitutive relation of the viscoelastic damper considering support stiffness is presented. The equivalent constitutive relation of the viscoelastic damper is combined with the equation of the structural motion, and the complex mode method is used to decouple them, and the unified expression of the structural wind-induced response is obtained. The series response power spectral density function of the energy dissipation structure under Davenport wind speed spectrum is decomposed into the product form of frequency domain response function and Davenport power spectral density function. Based on the definition of spectral moment in random vibration theory, the expression of series response spectral moment without integral term is obtained after integrating the response power spectral density function. In the example, the accuracy of the proposed method is verified by comparing with the results of the virtual excitation method, and the influence of the support stiffness on the energy dissipation system is analyzed.

Key words: supports; generalized Maxwell model; viscoelastic dampers; Davenport wind speed spectrum; wind vibration response; spectral moments