

DOI: 10.7511/jslx20221001002

# 任意边界条件下 Timoshenko 梁及其修正理论的自振特性分析

吴宗欢, 马乾瑛\*, 王亚波, 李冰冰, 孙正

(长安大学 建筑工程学院, 西安 710061)

**摘要:**提出一种求解任意边界条件下经典 Timoshenko 梁以及修正 Timoshenko 梁自振频率和振型的新方法。利用改进的傅立叶级数消除传统傅立叶级数的边界不收敛问题,然后通过 Rayleigh-Ritz 法导出 Timoshenko 梁的拉格朗日泛函,根据 Hamilton 原理将原问题转化为求解矩阵广义特征值问题。通过与解析解对比,本文采用的方法具有较好的收敛性以及较高的计算精度;通过数值计算发现,经典 Timoshenko 梁的自振频率略高于修正的 Timoshenko 梁,随着振型阶数的提高,经典 Timoshenko 梁的计算结果逐渐偏离文献解和有限元结果,而修正的 Timoshenko 梁能够保持较好的一致性;对于不同边界条件下修正 Timoshenko 梁的计算结果均能与有限元的计算结果吻合得很好。最后运用 MATLAB 编程软件将程序设计为 App,对于不同情形的梁只需要修改参数即可,可为实际工程提供高效便捷的计算方案和可靠理论依据。

**关键词:**边界条件;自振频率;修正 Timoshenko 梁;Rayleigh-Ritz 法;APP 设计

**中图分类号:**O323 **文献标志码:**A **文章编号:**1007-4708(2024)03-0421-07

## 1 引言

1921年 Timoshenko 在欧拉梁的基础上考虑了梁的剪切变形以及转动惯量的影响,提出经典 Timoshenko 梁(OTB)理论,梁的计算精度得到了大幅提升,该理论也渗透到工程的各个领域。

目前,求解 Timoshenko 梁自振特性的方法主要有动解析法<sup>[1]</sup>、有限元法<sup>[2]</sup>和数值算法<sup>[3-5]</sup>等。金晶等<sup>[6]</sup>运用边界元法求解梁的振动微分方程,研究了简支梁的固有特性。王伟斌等<sup>[7]</sup>根据三维弹性理论,研究了带孔洞的功能梯度 Timoshenko 梁的振动特性。杨洋等<sup>[8]</sup>从材料力学和弹性力学的角度出发,对拉压不一致的双模量简支梁的自由振动特性做了研究。Mehrparvar 等<sup>[9]</sup>运用高阶 Haar 小波变换法研究了变截面梁的振动特性。黄梦情等<sup>[10]</sup>利用 Legendre 多项式拟合梁的主振型,通过能量法研究了横向功能梯度梁的自振特性。杜运兴等<sup>[11]</sup>根据 Hamilton 原理,运用幂级数研究

了纵向功能梯度梁的自振特性。Li<sup>[12]</sup>提出了一种改进的傅立叶级数法(IFSM),该方法可以很方便地分析任意边界条件下的梁系<sup>[13]</sup>和板系<sup>[14]</sup>结构的振动特征。

另外,Love<sup>[15]</sup>在 Timoshenko 梁的基础上考虑剪切角引起的截面转动惯量,提出了修正 Timoshenko 梁(MTB)理论。陈谔等<sup>[16]</sup>根据波动理论分析了 Timoshenko 梁的自振特性,从梁的相速度和群速度方面论证了 Timoshenko 梁实际上只存在一个频谱。徐梅玲等<sup>[17]</sup>给出了 MTB 简支梁的振型函数和频率解析式。也有学者通过实验证明 Timoshenko 梁确实存在第二频谱<sup>[18]</sup>。夏桂云<sup>[19]</sup>对相关文献进行了梳理,解释了 OTB 存在第二频谱的原因,根据现有理论与实验研究还不能直接下定论,需要更多的理论与实验进行验证。

通过以上文献的梳理可以看出,对于 Timoshenko 梁的振动特性研究取得了相当丰硕的成果,但可以看出,(1)上述的研究内容大都集中在特定

收稿日期:2022-10-01;修改稿收到日期:2022-11-21.

基金项目:国家自然科学基金(51208041);陕西省自然科学基金(2020SF-382,2014JM2-5080)资助项目.

作者简介:马乾瑛\*(1982-),男,博士,副教授,硕士生导师(E-mail:mqy@chd.edu.cn).

引用本文:吴宗欢,马乾瑛,王亚波,等.任意边界条件下 Timoshenko 梁及其修正理论的自振特性分析[J].计算力学学报,2024,41(3):421-427.

WU Zong-huan, MA Qian-ying, WANG Ya-bo, et al. Analysis on natural vibration characteristics of Timoshenko beam and its modified theory with arbitrary boundary conditions[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2024, 41(3): 421-427.

的边界条件下,对于复杂边界条件下的研究还不足;(2)对于经典 Timoshenko 梁理论和修正的 Timoshenko 梁理论究竟孰是孰非还不能轻易下定结论,需要更多的理论和实验支撑。基于此,本文建立一种求解任意边界条件下 Timoshenko 梁的振动特性的方法,并通过该方法对 OTB 梁与 MTB 梁的振动特性进行对比分析。

本文首先基于 OTB 理论和 MTB 理论,利用改进的傅立叶级数(IFSM)得到两种梁的振动控制形函数,通过 Rayleigh-Ritz 能量法建立起两种梁的拉格朗日方程,其次运用 Hamilton 变分原理对其进行求解。最后通过 MATLAB 将其设计为 APP,旨在建立一种求解过程简洁、无需建模且计算效率高的梁自振特性的计算方法。

## 2 振动模型

如图 1 所示,梁的边界条件转化为线性弹簧以及旋转弹簧单元,通过调整弹簧单元的刚度值,可以模拟不同边界条件,如简支梁将弹簧刚度设置为  $k_0 = k_L = \infty, K_0 = K_L = 0$  即可。实际上,根据文献[20],计算时弹簧单元的刚度取到  $10^{10}$  以上即可模拟经典边界条件,弹性边界时可以取  $K = k = 10^2 \sim 10^8$ 。本文在模拟经典边界条件时取  $K = k = 10^{14}$ 。

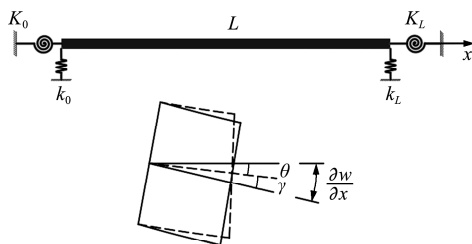


图1 Timoshenko 梁简图  
Fig. 1 Sketch of Timoshenko beam

### 2.1 梁的位移函数

为了避免传统傅立叶级数在任意自然边界处不连续的现象,采用适用性强的改进傅立叶级数作为形函数,并且根据文献[20],主函数采用傅立叶余弦级数在处理任意边界条件时比正弦级数有更好的收敛性。梁的位移函数表示为

$$\Delta(x, t) = \left( \sum_{n=0}^N a_n \cos(\lambda_n x) + \sum_{m=1}^4 b_m \sin(\lambda_m x) \right) e^{i\omega t} \quad (1)$$

式中  $\Delta$  取  $w$  和  $\theta$  为梁的挠度和截面转角函数。其中  $a_n$  和  $b_m$  为傅立叶系数,  $\lambda_n = n\pi x/L$ ,  $\lambda_m = m\pi x/L$ ,  $e^{i\omega t}$  为振动时间因子,  $\omega$  为自振频率。位移函数中的第二项为辅助项,用于克服梁边界不连续性问题。

### 2.2 两种梁理论的能量

不论 OTB 还是 MTB,体系中的势能主要包括弯曲应变能、剪切应变能以及边界弹簧储备的弹性势能;动能则包括截面转动和梁平动引起的能量反应。

梁弯曲变形时产生的弯曲应变能( $V_p$ )、剪切应变能( $V_t$ )和边界处弹簧的弹性势能( $V_s$ )分别表示为

$$V_p = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left[ \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right]^2 dx \quad (2)$$

$$V_t = \frac{1}{2} \int_0^L \kappa AG \left[ \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \theta(x, t) \right]^2 dx \quad (3)$$

由边界处线性弹簧的位移以及旋转弹簧引起的弹性势能为

$$V_s = \frac{1}{2} \{ k_0 w^2(x, t)_{x=0} + K_0 [\theta(x, t)]_{x=0}^2 + k_L w^2(x, t)_{x=L} + K_L [\theta(x, t)]_{x=L}^2 \} \quad (4)$$

在 OTB 理论中梁线性位移产生的动能为

$$T_p^O = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \left[ \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right]^2 dx \quad (5)$$

截面弯曲变形引起的转动动能为

$$T_j^O = \frac{1}{2} \rho I \int_0^L \left[ \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} \right]^2 dx \quad (6)$$

式中  $\kappa, E, A, G$  和  $I$  分别为梁的截面形状系数、材料杨氏模量、截面面积、截面剪切模量和截面惯性矩,  $G = E/[2(1+\nu)]$ ,  $\nu$  为泊松比。符号的上标  $O$  表示 OTB 理论,  $M$  表示 MTB 理论,无上标则表示 OTB 与 MTB 都相同。

### 2.3 MTB 理论中的能量

根据 MTB 理论<sup>[16]</sup>,其与 OTB 理论中产生的能量区别在于考虑了剪切变形引起的截面转动惯量增加的转动动量。所以转动惯量为

$$T_j^M = T_j^O + \frac{1}{2} \rho I \int_0^L \left[ \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x \partial t} - \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} \right]^2 dx \quad (7)$$

### 2.4 求解过程

上文建立了梁中的动能以及势能表达式,则体系的拉格朗日泛函可以表示为

$$Lg = V_p + V_t + V_s - T_p - T_j \quad (8)$$

根据 Hamilton 原理,对傅立叶系数求偏导可得

$$\frac{\partial Lg}{\partial a_i} = 0, \quad \frac{\partial Lg}{\partial b_j} = 0 \quad (9)$$

式中 共计  $2(N+4+1)$  个方程,整理之后可以得到特征矩阵方程

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \{\mathbf{H}\} = 0 \quad (10)$$

式中  $\mathbf{K}$  为刚度矩阵,  $\mathbf{M}$  为质量矩阵,  $\omega$  为梁的圆频率,  $\{\mathbf{H}\}$  为傅立叶级数的系数组成的列向量。梁发生自由振动时必有  $|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0$ , 求解该特征行列式可以得到频率  $\omega$  与振型。计算时采用 Matlab 编程软件进行编程计算。将式(1)写为

$$\Lambda(x, t) = \phi(x) P^T e^{i\omega t} \tag{11}$$

$$\{\phi(x)\} = \{1, \cos(\lambda_1 x), \cos(\lambda_2 x) \cdots \cos(\lambda_n x), \sin(\lambda_1 x) \cdots \sin(\lambda_4 x)\}$$

$$\{p\} = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_4\}$$

下面以刚度矩阵  $K_p$  为例,质量矩阵可采用相同的方法计算,将式(11)代入式(2~10),可以得到矩阵  $K$  为

$$K = [K_p] + [K_s] \tag{12}$$

$$K_p = \begin{bmatrix} K_{P11} & K_{P12} \\ K_{P21} & K_{P22} \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$K_{P11} = kAG \int_0^L [w'(x)]^T w'(x) dx$$

$$K_{P21} = K_{P12}^T = kAG \int_0^L [w'(x)]^T \theta(x) dx$$

$$K_{P22} = kAG \int_0^L \theta(x)^T \theta(x) dx + EI \int_0^L [\theta'(x)]^T \theta'(x) dx$$

根据三角函数的正交性可知,矩阵  $K$  和矩阵  $M$  均为稀疏矩阵,简化了实际计算时的计算量,提高了计算效率。

### 3 收敛性与计算精度分析

下面通过 OTB 理论模拟简支梁进行说明。材料参数设置列入表 1,设置边界弹簧刚度系数  $k = 10^{14}$  N/m,截面形状系数  $\kappa$  根据 Cowper<sup>[21]</sup> 理论得出。表 2 列出了本文的方法对比解析解的前 10 阶结果,解析解采用文献[16]的方法。为了便于比较,定义无量纲频率  $\Omega = \omega L^2 \sqrt{\rho A / EI}$ 。

表 1 材料系数  
Tab. 1 Material coefficient

$L/m$	$E/GPa$	$\kappa$	$b \times h/m$	$\nu$	$\rho/kg \cdot m^{-3}$
8	210	$\frac{10(1+\nu)}{12+11\nu}$	$0.25 \times 0.5$	0.3	7850

表 2 OTB 简支梁前 10 阶无量纲频率  $\Omega$  随截断数  $N$  取值变化情况

Tab. 2 Variation of the top 10 dimensionless frequency of OTB simply supported beam with truncation number  $N$

$N$	10	14	18	22	解析解
$\Omega_1$	9.806	9.806	9.806	9.806	9.806
$\Omega_2$	38.496	38.496	38.496	38.496	38.496
$\Omega_3$	84.117	84.117	84.117	84.117	84.117
$\Omega_4$	144.04	144.04	144.04	144.04	144.04
$\Omega_5$	215.49	215.49	215.49	215.49	215.49
$\Omega_6$	295.97	295.97	295.97	295.97	295.97
$\Omega_7$	383.36	383.35	383.35	383.35	383.35
$\Omega_8$	476.06	475.94	475.94	475.94	475.94
$\Omega_9$	572.77	572.45	572.44	572.44	572.44
$\Omega_{10}$	681.93	671.88	671.85	671.84	671.84

由表 2 可知,前 7 阶振型截断数  $N$  取到 10 基本达到收敛状态,最大误差为 0.02%,截断数取到 14 则得到精确解;截断数取到 18 时,前 10 阶振型基本达到收敛,与有限元的最大误差为 0.01%,截断数取到 22 时得到精确解。说明本文给出的计算方法具有较好的收敛性以及极高的计算精度。在下文的计算中取截断数  $N = 22$ 。

## 4 数值算例与分析

### 4.1 OTB 与 MTB 对比

夏呈<sup>[22]</sup>从 Timoshenko 梁的群速度和相速度两者与波数的关系系统讨论了 Timoshenko 梁的自振特性,并给出了修正后 Timoshenko 梁的频率计算解析式。下面从能量变化的角度对其进行分析和比较。对比经典 OTB 理论下的梁与修正 MTB 理论下的梁前 8 阶自振频率,以有限元软件的计算结果和文献的计算结果共同作为参考,结果列入表 3。

表 3 简支梁 OTB 与 MTB 理论自振频率误差对比 ( $L/h = 16$ )

Tab. 3 Comparison of natural frequency error between OTB and MTB theory of simply supported beam ( $L/h = 16$ )

$\Omega$	OTB	$e/\%$	MTB	$e/\%$	文献解	FEM
$\Omega_1$	9.806	0.06	9.806	0.06	9.8074	9.833
$\Omega_2$	38.496	0.22	38.496	0.22	38.484	38.50
$\Omega_3$	84.117	0.50	84.110	0.49	84.031	83.894
$\Omega_4$	144.04	0.82	143.97	0.77	143.64	143.11
$\Omega_5$	215.49	1.19	215.20	1.05	214.27	213.24
$\Omega_6$	295.97	1.41	294.98	1.07	293.1	291.66
$\Omega_7$	383.35	1.90	380.71	1.20	377.74	376.21
$\Omega_8$	475.94	2.43	470.0	1.15	466.32	465.19

注:  $e = |\text{OTB(MTB)} - \text{文献}| / \text{文献} \times 100\%$ 。

由表 3 可知,经典 Timoshenko 梁的自振频率相较于有限元和文献的结果偏大,随着频率阶数的增加,误差呈现增大的趋势;采用 MTB 梁理论与文献和有限元结果基本保持一致,最大误差不超过 1.2%,并且误差基本保持同一水平,这是由于考虑了剪切角引起的截面转动惯量,因此 MTB 的计算结果小于 OTB 的计算结果,与有限元和文献[16]的解吻合较好,这与以往的研究结论相同。

### 4.2 跨高比的影响

根据上面的计算结果可以看出,采用 MTB 理论的计算结果比 OTB 梁理论更加接近梁的自振特性,并且得出了和以往研究相同的结论。下面讨论跨高比对梁自振频率的影响,分别设置  $L = 2\text{ m}, 4\text{ m}, 8\text{ m}$ ,其中  $L = 8$  的计算结果列入表 3,其余跨度的计算结果列入表 4。

表4 不同跨高比简支梁 OTB 与 MTB 理论自振频率误差对比  
 Tab. 4 Comparison of natural vibration frequency errors between OTB and MTB theory of simply-supported beams with different span and height ratios

$\Omega$	$L/h=8$						$L/h=4$					
	OTB	$e/\%$	MTB	$e/\%$	文献解	FEM	OTB	$e/\%$	MTB	$e/\%$	文献解	FEM
$\Omega_1$	9.6225	0.02	9.6224	0.01	9.6209	9.6273	8.992	0.17	8.988	0.12	8.977	8.9816
$\Omega_2$	35.99	0.22	35.974	0.17	35.91	35.708	29.663	1.78	29.296	0.51	29.145	29.245
$\Omega_3$	73.919	0.88	73.673	0.54	73.274	72.655	54.55	4.19	51.161	2.29	52.357	52.753
$\Omega_4$	118.82	1.92	117.34	0.65	116.58	115.75	80.644	6.38	77.525	2.27	75.808	76.654
$\Omega_5$	167.66	3.15	162.38	0.10	162.54	162.02	106.94	8.07	99.306	0.35	98.953	100.32
$\Omega_6$	218.66	4.40	204.98	2.12	209.43	209.81	133.18	9.37	121.02	0.62	121.77	123.70
$\Omega_7$	270.78	5.59	248.93	2.93	256.44	258.19	159.27	10.3	147.53	2.2	144.34	146.83
$\Omega_8$	323.44	6.66	299.11	1.36	303.23	306.67	185.17	11.1	170.32	2.22	166.71	169.77

由表4可知,当跨高比 $L/h=8$ 时,采用OTB理论时从第7阶频率开始出现较大误差,大于5%,并且误差随着频率阶数的增加而增大,而采用MTB理论计算的结果能够保持较高的精度,计算误差小于3%;当跨高 $L/h=4$ 时,OTB理论的误差进一步向低频区扩大,第4阶频率的误差已经达到了6.38%,而MTB理论依然能够与文献解和有限元结果保持较好的一致性。由表3和表4可知,

随着跨高比的减小,由于剪切变形而引起的截面转动惯量对自振频率的影响逐步增大,由此导致了OTB的偏差向低频区转移。

#### 4.3 不同边界条件下的自振频率对比

经典边界。设置边界条件为固定-固定(C-C)和固定-自由(C-F),取前10阶无量纲频率对比,计算结果列入表5。悬臂梁(C-F)前三阶振型的挠度曲线和转角曲线如图2所示。

表5 不同边界条件下 OTM 梁和 MTB 梁与有限元(FEM)计算结果对比  
 Tab. 5 Comparison of OTM beam and MTB beam with finite element (FEM) calculation results under different boundary conditions

$\Omega$	C-F 边界					C-C 边界				
	OTB	$e/\%$	MTB	$e/\%$	FEM	OTB	$e/\%$	MTB	$e/\%$	FEM
$\Omega_1$	3.5052	0.27	3.5045	0.27	3.5148	21.801	0.04	21.801	0.04	21.792
$\Omega_2$	21.577	0.08	21.577	0.08	21.595	58.207	0.41	58.203	0.40	57.969
$\Omega_3$	58.797	0.24	58.795	0.24	58.655	109.69	0.82	109.66	0.79	108.79
$\Omega_4$	111.07	0.62	111.04	0.60	110.38	173.30	1.26	173.12	1.16	171.14
$\Omega_5$	175.86	1.03	175.71	0.95	174.06	246.49	1.69	245.85	1.43	242.39
$\Omega_6$	250.55	1.45	249.98	1.22	246.96	327.15	2.10	325.34	1.54	320.41
$\Omega_7$	332.92	1.87	331.26	1.36	326.81	413.58	2.50	409.35	1.45	403.50
$\Omega_8$	421.16	2.27	417.19	1.31	411.80	504.43	2.87	495.83	1.11	490.37

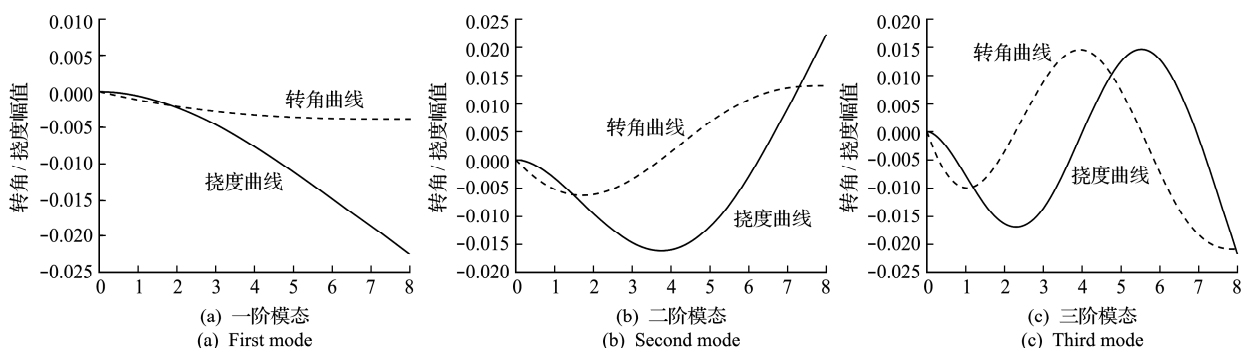


图2 悬臂梁(C-F)前三阶模态转角与挠度曲线

Fig. 2 Mid-rotation angle and deflection curve of the first three modes of cantilever beam

由表 5 可知,采用 MTB 梁理论,不论是在 C-C 还是 C-F 边界的情况下,均能和有限元计算结果保持一致,误差保持在同一水平,而经典 OTB 梁由于未考虑剪切变形引起的转动惯量,误差随振型阶数的提高而逐渐变大,并且结合表 3 和表 6 也能得出相同的结论。可见经典 OTB 梁产生的误差主要是因为未考虑截面的剪切转动惯量导致的。

弹性边界。表 6 为简支 MTB 梁在弹性边界下与有限元计算结果的对比。选用 ABAQUS 的接地弹簧模拟边界条件,弹簧刚度设置为  $k_0 = k_L = 10^8 \text{ N/m}$ 。图 3 为将特征向量代入振型表达式得到弹性边界下简支梁的前 4 阶振型。

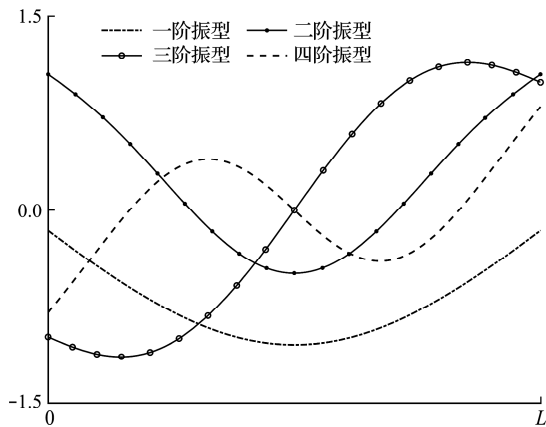


图 3 简支梁弹性边界下前 4 阶振型

Fig. 3 First 4 order vibration mode diagram of simply-supported beam with elastic boundary condition

表 6 弹性边界下简支梁(MTB)与有限元计算结果  
Tab. 6 Simply supported beam (MTB) under elastic boundary and finite element calculation results

$\Omega$	MTB	$e/\%$	FEM
$\Omega_1$	8.1562	0.00	8.1527
$\Omega_2$	21.075	0.00	21.072
$\Omega_3$	35.736	0.00	35.740
$\Omega_4$	65.611	0.00	65.616
$\Omega_5$	115.58	0.02	115.61
$\Omega_6$	180.22	0.07	180.35
$\Omega_7$	255.48	0.20	255.98
$\Omega_8$	338.27	0.44	339.77

由表 6 可知,采用本文建立的方法对弹性边界具有很好的拟合效果,前 8 阶频率的最大误差不超过 0.5%。说明该方法求解任意边界条件下的 Timoshenko 梁的自振频率及振型均能得到较好的计算结果。

最后通过 MATLAB 中 APP-Designer 工具箱将本文方法封装为梁板结构振动特性分析系统,对

于不同情况的梁,只需要修改参数即可快速得到梁的频率和振型,省去了建模过程,也不需要划分网格,是一种适应性好、兼具计算效率和计算精度的方案。

## 5 结 论

本文通过能量-变分原理提出了一种求解任意边界条件下的经典 Timoshenko 梁与修正 Timoshenko 梁的自振频率及振型的新方法,并对两种梁振动特性进行对比。主要结论如下。

(1) 经典 Timoshenko 梁求得自振频率略高于修正的 Timoshenko 梁,并且随着跨高比的增大,与解析解的结果偏离程度越大;而修正的 Timoshenko 梁能够和文献或有限元计算结果保持一致,且误差保持同一水平。

(2) 本文方法对于任意边界条件下 Timoshenko 梁及其修正理论的自振特性计算都能适用,并且具有较高的精度。运用 MATLAB 中 APP-Designer 工具箱设计 APP,对于不同工况的梁,无需建模,只需要修改参数即可,具有收敛速度快,计算效率高的特点,可以快速得到自振频率以及振型,为工程实际运用提供理论依据。

## 参考文献(References):

[1] Eisenberger M. Dynamic stiffness matrix for variable cross-section Timoshenko beams[J]. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 1995, **11**(6): 507-513.

[2] Auciello N M, Ercolano A. A general solution for dynamic response of axially loaded non-uniform Timoshenko beams [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2004, **41**(18-19): 4861-4874.

[3] 张琼,杜永峰,朱前坤. 梁式结构受移动荷载作用非平稳随机振动的 DQ-PEM 方法[J]. *计算力学学报*, 2022, **39**(4): 413-419. (ZHANG Qiong, DU Yong-feng, ZHU Qian-kun. DQ-PEM method for non-stationary random vibration analysis of beam structures under moving loads [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2022, **39**(4): 413-419. (in Chinese))

[4] 贺丹,杨万里. 基于修正偶应力和高阶剪切变形理论的变截面微梁的自由振动[J]. *计算力学学报*, 2017, **34**(3): 292-296. (HE Dan, YANG Wan-li. Free vibration analysis of non-uniform micro-beams based on modified couple stress theory and high-order shear deformation theory [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2017, **34**(3): 292-296. (in Chinese))

- [5] 张 琼,南娜娜,朱前坤,等.人行荷载下梁式结构振动分析的DQ-IQ混合法[J].计算力学学报,2019,**36**(2):166-172. (ZHANG Qiong, NAN Na-na, ZHU Qian-kun, et al. DQ-IQ hybrid method for structure vibration analysis of beam structure under pedestrian loading[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2019, **36**(2):166-172. (in Chinese))
- [6] 金 晶,邢誉峰.铁木辛柯梁固有振动频率的边界元解法[J].北京航空航天大学学报,2012,**38**(7):976-980. (JIN Jing, XING Yu-feng. Boundary element solution method of free vibration of Timoshenko beam [J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2012, **38**(7):976-980. (in Chinese))
- [7] 王伟斌,杨文秀,滕兆春.多孔功能梯度材料 Timoshenko 梁的自由振动分析[J].计算力学学报,2021,**38**(5):586-594. (WANG Wei-bin, YANG Wen-xiu, TENG Zhao-chun. Free vibration analysis of porous functionally graded materials Timoshenko beam [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2021, **38**(5):586-594. (in Chinese))
- [8] 杨 洋,姚文娟.不同模量铁木辛柯梁的自由振动特性分析[J].上海大学学报(自然科学版),2019,**25**(6):978-989. (YANG Yang, YAO Wen-juan. Analytical solution for free vibration of Timoshenko beam with different modulus[J]. *Journal of Shanghai University (Natural Science Edition)*, 2019, **25**(6):978-989. (in Chinese))
- [9] Mehrparvar M, Majak J, Karjust K, et al. Free vibration analysis of tapered Timoshenko beam with higher order haar wavelet method [J]. *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences*, 2022, **71**(1):77.
- [10] 黄梦情,陈美霞.最佳平方逼近下的轴向功能梯度梁自由振动分析[J].哈尔滨工程大学学报,2020,**41**(4):506-511. (HUANG Meng-qing, CHEN Mei-xia. Free-vibration analysis of axial functionally graded beams based on best square approximation[J]. *Journal of Harbin Engineering University*, 2020, **41**(4):506-511. (in Chinese))
- [11] 杜运兴,程 鹏,周 芬.变截面功能梯度 Timoshenko 梁的自由振动分析[J].湖南大学学报(自然科学版),2021,**48**(5):55-62. (DU Yun-xing, CHENG Peng, ZHOU Fen. Free vibration analysis of functionally graded Timoshenko beams with variable section [J]. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2021, **48**(5):55-62. (in Chinese))
- [12] Li W L. Free vibrations of beams with general boundary conditions[J]. *Journal of Sound and vibration*, 2000, **237**(4):709-725.
- [13] 鲍四元,周 静,陆健炜.任意弹性边界的多段梁自由振动研究[J].应用数学和力学,2020,**41**(9):985-993. (BAO Si-yuan, ZHOU Jing, LU Jian-wei. Free vibration of multi-segment beams with arbitrary boundary conditions [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(9):985-993. (in Chinese))
- [14] 张 俊.瑞利里兹法的改进及其在复杂板结构弯曲振动特性分析中的应用[D].华中科技大学,2020. (ZHANG Jun. A Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Engineering [D]. Huazhong University of Science and Technology, 2020. (in Chinese))
- [15] Love A E. A treatise on the mathematical theory of elasticity[J]. *Nature*, 1920, **105**(2643):511-512.
- [16] 陈 镨,万春风,薛松涛,等. Timoshenko 梁运动方程的修正及其影响[J].同济大学学报(自然科学版),2005(6):711-715. (CHEN Rong, WAN Chun-feng, XUE Song-tao, et al. Modification of motion equation of Timoshenko beam and its effect [J]. *Journal of Tongji University (Natural Sciences)*, 2005, **33**(6):711-715. (in Chinese))
- [17] 徐梅玲,叶 茂,付明科,等.修正 Timoshenko 梁自由振动及 Euler 梁误差分析[J].科学技术与工程,2015,**15**(15):88-94. (XU Mei-ling, YE Mao, FU Ming-ke, et al. Systematic modal analysis of simply supported beam based on the modified motion equation of Timoshenko [J]. *Science Technology and Engineering*, 2015, **15**(15):88-94. (in Chinese))
- [18] Diaz-de-Anda A, Flores J, Gutierrez L, et al. Experimental study of the Timoshenko beam theory predictions [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2012, **331**(26):5732-5744.
- [19] 夏桂云. Timoshenko 梁的第二频谱分析[J].湖南大学学报(自然科学版),2021,**48**(11):142-149. (XIA Gui-yun. Analysis on the second frequency spectrum of Timoshenko beam [J]. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2021, **48**(11):142-149. (in Chinese))
- [20] Li W L. Comparison of Fourier sine and cosine series expansions for beams with arbitrary boundary conditions [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, **255**(1):185-194.
- [21] Cowper G R. The shear coefficient in Timoshenko's beam theory [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1966, **33**(2):335.
- [22] 夏 呈.修正铁摩辛柯梁受迫振动响应分析及其应用[D].东南大学,2017. (XIA Cheng. Analysis and Application of Forced Vibration Response of Modified Iron Mosinko Beam [D]. Southeast University, 2017. (in Chinese))

## Analysis on natural vibration characteristics of Timoshenko beam and its modified theory with arbitrary boundary conditions

WU Zong-huan, MA Qian-ying\*, WANG Ya-bo, LI Bing-bing, SUN Zheng

(Department of Architecture and Civil Engineering, Chang'an University, Xi'an 710061, China)

**Abstract:** A new method for determining the natural frequencies and mode shapes of a classical Timoshenko beam and modified Timoshenko beam with arbitrary boundary conditions is presented. The improved Fourier series is used to eliminate the boundary non-convergence problem of the traditional Fourier series, and then the Lagrange functionals of the Timoshenko beams are derived by the Rayleigh-Ritz method. According to the Hamilton principle, the original problem is transformed into a generalized matrix eigenvalue problem. Compared with the analytical solution, the method used in this paper has better convergence and higher calculation accuracy. The numerical results show that the natural frequency of the classical Timoshenko beam is slightly higher than that of the modified Timoshenko beam. With the increase of the vibration mode order, the calculation results of the classical Timoshenko beam gradually deviate from the solution from the published literature and the finite element results, while the modified Timoshenko beam can maintain good consistency. The calculation results of the modified Timoshenko beam under different boundary conditions are in good agreement with the finite element results. Finally, the MATLAB software is used to produce an App program. Using this App, for different beams, only the parameters need to be modified, which can provide an efficient and convenient calculation scheme and reliable theoretical basis for practical engineering.

**Key words:** boundary conditions; modified Timoshenko beam; natural vibration characteristics; Rayleigh-Ritz method; IFSM method; App design