

DOI: 10.7511/jslx20221026001

# 梯度多孔金属材料梁的屈曲和屈曲基础上的振动

李清禄\*, 赵煊贺, 张清华

(兰州理工大学 理学院, 兰州 730050)

**摘要:**为研究梯度多孔金属材料梁的屈曲以及屈曲附近的振动特性,首先建立了随从分布压力下梯度多孔材料梁的动力学控制方程,得到了描述后屈曲的静态控制微分方程和描述屈曲前后振动响应的控制方程。通过打靶法数值求解两组强非线性方程,获得了简支-固支梯度多孔梁的屈曲临界载荷以及屈曲前后振动频率与载荷之间的关系曲线。分析了孔隙率系数和孔隙分布方式对屈曲临界载荷和屈曲前后振动频率的影响。结果表明,随着孔隙率系数 $e_0$ 的增加,发生屈曲时的临界载荷减小;各阶固有频率也减小。屈曲前,各阶振动频率随载荷增大而减小,屈曲后,除三阶频率外,一阶和二阶频率随载荷增大而增大。

**关键词:**梯度多孔材料; 孔隙率; 随从载荷; 临界载荷; 频率

中图分类号: TU383; O343.7

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2024)03-0415-06

## 1 引言

随着复杂工况和各种复杂环境因素的出现,航空航天对材料的性能提出了越来越高的要求。为适应航空、航天、航海等在轻量化、多功能和高强度等方面的需求,将功能梯度材料的思想与多孔材料相结合,在制备过程中,通过改变多孔泡沫或金属泡沫内部的孔几何、密度和/或材料组成,提出了具有不同孔隙率分布的功能梯度多孔材料,简称梯度多孔材料<sup>[1,2]</sup>。在过去20年里,科研人员对梯度多孔材料的力学行为进行了大量的研究<sup>[3-5]</sup>。

目前,大多数研究都集中在梯度多孔梁和板的静态弯曲和屈曲方面。如 Magnucki 等<sup>[6]</sup>假设各向同性多孔梁的力学性能沿高度变化,对均布载荷作用下的简支梁进行了弯曲分析。Chen 等<sup>[7]</sup>采用 Ritz 法研究了梯度多孔 Timoshenko 梁的弹性屈曲和静态弯曲力学行为。She 等<sup>[8]</sup>利用 Navier 级数法分析了 FG 多孔纳米梁的受迫振动问题,考虑了均匀分布和非均匀分布两种类型的孔隙度分布,分析了孔隙率系数等多种因素对梁的共振位置的敏感性。Xiao 等<sup>[9]</sup>基于非局部弹性理论,研究了多孔梯度纳米梁在多物理场下的屈曲和后屈曲问

题。Li 等<sup>[10]</sup>考虑了两种孔隙分布模型,研究了 Mindlin 多孔圆板在热环境下的自由振动问题,分析了孔隙率等诸因素对振动频率的影响。

当结构发生变形时,作用其上的力的方向也随之发生改变,这样的力称为随从力。如航空航天中的发射火箭以及喷气式飞机的机翼上受到的力,这是一种典型的随从力,这种非保守的随从载荷将引起机翼的颤振。著名的 Leipholtz 模型<sup>[11]</sup>就是受均布随从力作用的立柱,这些在不同边界下的模型都是实际工程问题的简化。假设功能梯度材料梁的物性沿横向非均匀变化,赵凤群等<sup>[12]</sup>研究了切向随从载荷作用下梁的后屈曲力学行为。文献[13]研究了梯度多孔梁的非线性力学行为,既考虑了湿热等因素的影响,也考虑了飞机上受到的随从载荷对屈曲或弯曲行为的影响,但该梁的支承是对称简支。

综上,关于梯度多孔材料的研究是目前比较活跃的研究领域,其研究已由试验的制备转向理论的分析,也取得了很多有价值的学术成果。但梯度多孔梁在受到切线随从载荷时的过屈曲问题目前还没有见文献报道,尤其是过屈曲附近(前或后)的振动响应还是空白。由于材料中孔隙的出现,结构的

收稿日期: 2022-10-26; 修改稿收到日期: 2022-12-15.

基金项目: 国家自然科学基金(12062010; 12362009); 甘肃省自然科学基金重点项目(23JRA775)资助。

作者简介: 李清禄\*(1974-),男,博士,副教授,硕士生导师(E-mail:lqu2008@163.com).

引用本文: 李清禄, 赵煊贺, 张清华. 梯度多孔金属材料梁的屈曲和屈曲基础上的振动[J]. 计算力学学报, 2024, 41(3): 415-420.

LI Qing-lu, ZHAO Xuan-he, ZHANG Jing-hua. Buckling of beams made of graded porous metal materials and times new vibration on the basis of buckling[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2024, 41(3): 415-420.

自稳能力以及多孔材料的吸声性能与孔隙率有关<sup>[14]</sup>,因此从理论上研究孔隙对结构稳定性以及其他力学行为的影响十分必要。由于飞机进入大气层时,由于飞机自身的速度和气流的接触,机翼等部件上就会有强烈的切线随动载荷作用。从工程实际考虑,飞机等机械结构的很多连接部分在力学角度要么简化为铰接约束,要么简化为固定端约束,因此研究固支-简支不对称梁的力学行为更符合工程实际问题。本文将飞机上的某些关键部件简化为非对称约束梁,研究梯度多孔一端可移简支,一端固定梁受到切线随动载荷时屈曲附近(前或后)的振动响应。给出不同孔隙分布和孔隙率系数对诸因素的影响,以便为航空航天结构提供有参考价值的力学响应数值结果。

## 2 梯度多孔材料梁

考虑一端可移简支,一端固定的梯度多孔材料梁,梁的初始长度为  $l, b \times h$  的矩形截面,受到切向随从载荷(即梁在变形过程中载荷方向始终沿着切线方向)。坐标原点位于梁的最左端,  $xOy$  置于梁的几何中面,  $z$  轴沿梁的厚度方向,如图 1 所示。

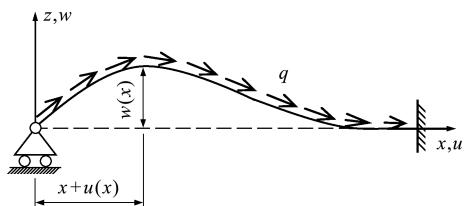


图 1 力学变形模型

Fig. 1 Mechanical model of the deformed beam

先给出梯度多孔梁的模型。考虑图 2 中两种非均匀孔隙率分布模型, 分别是由 Beam-I 和 Beam-II 定义的模型。 $E_0$  和  $E_1$  分别是最小(在  $z = -h/2$  处)和最大( $z = +h/2$  处)的弹性模量;

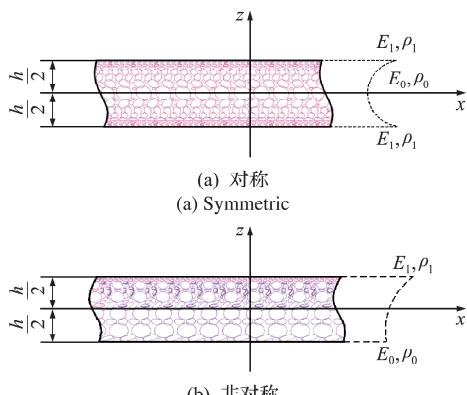


图 2 两种孔隙分布模式

Fig. 2 Two pore distribution modes

$\rho_0$  和  $\rho_1$  分别是最小(在  $z = -h/2$  处)和最大( $z = +h/2$  处)的密度。

假设多孔材料的力学性能沿材料厚度方向变化,材料属性即杨氏模量  $E(z)$  和质量密度  $\rho(z)$ , 表示为

Beam-I 为关于几何中面对称模型

$$E(z) = E_1 [1 - e_0 \cos(\pi z/h)] \quad (1)$$

$$\rho(z) = \rho_1 [1 - e_m \cos(\pi z/h)] \quad (2)$$

Beam-II 为关于几何中面不对称模型

$$E(z) = E_1 [1 - e_0 \cos(\pi z/2h + \pi/4)] \quad (3)$$

$$\rho(z) = \rho_1 [1 - e_m \cos(\pi z/2h + \pi/4)] \quad (4)$$

式中  $e_0 = 1 - E_2/E_1 (0 < e_0 < 1)$  为弹性模量的孔隙率系数,  $e_m = 1 - \rho_0/\rho_1 (0 < e_m < 1)$  为密度的孔隙率系数。

$e_0$  和  $e_m$  的关系可以通过式(5)确定<sup>[15]</sup>

$$E_0/E_1 = (\rho_0/\rho_1)^2 \quad (5)$$

因此,孔隙度系数之间的关系是

$$e_m = 1 - \sqrt{1 - e_0} \quad (6)$$

## 3 控制微分方程

### 3.1 几何、物理和平衡方程

由小应变假设,任一点的正应变为

$$\epsilon(x, z) = \Lambda - 1 - (\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x)z \quad (7)$$

式中  $\theta$  为横截面的转角,  $\Lambda$  为轴线伸长率。

对线弹性材料,  $\sigma(x, z) = E(z) \cdot \epsilon(x, z)$ , 于是在整个截面上积分得轴力和弯矩分别为

$$N(x) = \iint_A \sigma \mathrm{d}A = A(\Lambda - 1) - B \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} \quad (8)$$

$$M(x) = - \iint_A \sigma z \mathrm{d}A = -B(\Lambda - 1) + D \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} \quad (9)$$

刚度系数  $A, B$  和  $D$  定义为

$$(A, B, D) = \iint_A (1, z, z^2) E(z) \mathrm{d}A = \\ E_1 b(h f_1, h^2 f_2, h^3 f_3) \quad (10)$$

平衡方程为

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} = \Lambda(q \cos\theta + q_x), \quad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \Lambda(q \sin\theta + q_z) \quad (11)$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = \Lambda(-H \sin\theta + V \cos\theta + m_\theta) \quad (11)$$

式中 惯性力为

$$q_x = -I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad q_z = -I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad m_\theta = -I_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (12)$$

式中  $I_0$  和  $I_1$  定义为

$$(I_0, I_1) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z)(1, z^2) \mathrm{d}z = \rho_1(h f_4, h^3 f_5) \quad (13)$$

轴力  $N(x)$  可用梁横截面上水平内力  $H$  和铅

垂内力  $V$  表示为

$$N(x) = -H \sin\theta - V \cos\theta \quad (14)$$

由式(8,9)结合式(14),可计算出

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dx} &= \frac{1}{f_2^2 - f_1 f_3} \left[ \frac{f_2}{E_1 b h^2} (H \cos\theta + V \sin\theta) - \frac{f_1}{E_1 b h^3} M \right] \\ \Lambda &= 1 + \frac{1}{f_2^2 - f_1 f_3} \left[ \frac{f_3}{E_1 b h} (H \cos\theta + V \sin\theta) - \frac{f_2}{E_1 b h^2} M \right] \end{aligned}$$

### 3.2 动力学控制微分方程

综合以上分析,动力学方程的无量纲形式为

$$\begin{aligned} U_{,\xi} &= \Lambda \cos\theta^* - 1, \quad W_{,\xi} = \Lambda \sin\theta^* \\ \frac{\partial\theta^*}{\partial\xi} &= \frac{1}{f_2^2 - f_1 f_3} \left[ \frac{f_2}{12\delta} (H^* \cos\theta^* + V^* \sin\theta^*) - \frac{f_1}{12} M^* \right] \\ \frac{\partial H^*}{\partial\xi} &= -\Lambda \frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2} + \Lambda Q \sin\theta^*, \quad \frac{\partial V^*}{\partial\xi} = -\Lambda \frac{\partial^2 W}{\partial\tau^2} + \Lambda Q \sin\theta^* \\ \frac{\partial M^*}{\partial\xi} &= \Lambda (-H^* \sin\theta^* + V^* \cos\theta^*) + \frac{I_1}{I_0 l^2} \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial\tau^2} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{式中 } \Lambda = 1 + \frac{1}{f_2^2 - f_1 f_3} \left[ \frac{f_3}{12\delta^2} (H^* \cos\theta^* + V^* \sin\theta^*) - \frac{f_2}{12\delta} M^* \right]$$

上述动力学控制方程的无量纲化为

$$(\xi, U, W) = \frac{1}{l}(x, u, w), \quad \theta^* = \theta, \quad \delta = \frac{l}{h},$$

$$(Q, H^*, V^*, M^*) = \frac{12l}{bh^3 E_1} (q l^2, Hl, Vl, M),$$

$$\tau = \frac{t}{l^2} \sqrt{\frac{bh^3 E_1}{12I_0}}$$

$$\begin{aligned} \text{将方程(18)的解分为静态解和振动解两部分} \\ \{U(\xi, \tau), W(\xi, \tau), \theta^*(\xi, \tau), H^*(\xi, \tau), V^*(\xi, \tau), \\ M^*(\xi, \tau)\} = \{U_s(\xi), W_s(\xi), \theta_s(\xi), H_s(\xi), V_s(\xi), \\ M_s(\xi)\} + \{u_d, w_d, \theta_d, h_d, v_d, m_d\} \cos\omega\tau \end{aligned} \quad (16)$$

式中下标  $s$  为后屈曲静态解,  $d$  为动态解,  $\omega$  为振动频率。

## 4 数值结果与讨论

本节分过屈曲静态解和过屈曲前后的振动两部分分别讨论。选用与文献[4,15]相同的开孔泡沫金属多孔材料,其  $E_0 = 200$  GPa,  $\rho_0 = 7850$  kg/m<sup>3</sup>。

### 4.1 稳定性分析

静态解满足的控制方程为

$$\begin{aligned} U_{s,\xi} &= \Lambda_s \cos\theta_s - 1, \quad W_{s,\xi} = \Lambda_s \sin\theta_s, \\ \frac{d\theta_s}{d\xi} &= \frac{1}{f_2^2 - f_1 f_3} \left[ \frac{f_2}{12\delta} (H_s \cos\theta_s + V_s \sin\theta_s) - \frac{f_1}{12} M_s \right] \\ \frac{dH_s}{d\xi} &= \Lambda Q \cos\theta, \quad \frac{dV_s}{d\xi} = \Lambda Q \sin\theta \\ \frac{dM_s}{d\xi} &= \Lambda_s (-H_s \sin\theta_s + V_s \cos\theta_s) \end{aligned} \quad (17)$$

式中 静轴线伸长率为

$$\Lambda_s = 1 + \frac{1}{f_2^2 - f_1 f_3} \left[ \frac{f_3}{12\delta^2} (H_s \cos\theta_s + V_s \sin\theta_s) - \frac{f_2}{12\delta} M_s \right]$$

静态过屈曲问题对应的边界条件为

$$U_s(0) = \Delta, \quad W_s(0) = H_s(0) = M_s(0) = 0 \quad (18)$$

$$U_s(1) = W_s(1) = \theta_s(1) = 0 \quad (19)$$

式中  $\Delta$  为可移铰支座处的纵向位移。

方程(17)是包含 7 个变量且相互耦合的非线性方程,加上边界条件构成两点边值问题,采用打靶法<sup>[16]</sup>求其数值解。

通过计算,图 3 给出了各孔隙率系数下,梁发生屈曲时的临界载荷值。可以看出,Beam-I 梁的临界载荷随  $e_0$  的增加是线性单调递减;而 Beam-II 梁发生屈曲的临界载荷随  $e_0$  的增加是非线性单调递减的。另外,随着孔隙率系数越大,Beam-I 梁和 Beam-II 梁屈曲的临界载荷值之间的差值越来越大。值得指出的是,  $e_0 = 0$  的特殊情况下,两种孔隙模式梁均退化为均质材料梁,其屈曲的临界载荷为  $Q_{cr} = 57.175$ ,其结果与文献[11]的解析法结果十分吻合,说明了本文计算模型的正确性以及结果的可靠性和普适性。

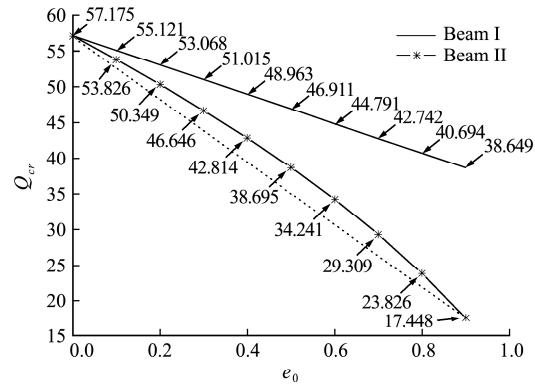


图 3  $e_0 - Q_{cr}$  关系曲线

Fig. 3 Relationship curve of  $Q_{cr}$  vs.  $e_0$

图 4 给出了随从载荷与左端转角之间的关系曲线。显然,对称和非对称模型下,多孔梁都发生分叉失稳,  $e_0$  越大,到达失稳时的  $Q_{cr}$  越小。当载荷  $Q > Q_{cr}$  后,梁进入后屈曲状态,在后屈曲平衡状态,随着载荷的增加,梁的变形为非线性单调递增。可以看出,对称和非对称模型下多孔梁的后屈曲平衡路径曲线是有差异的。说明材料孔隙分布模式的不同,不但影响梁发生屈曲的临界载荷,而且也会影响梁进入后屈曲状态时的力学响应。

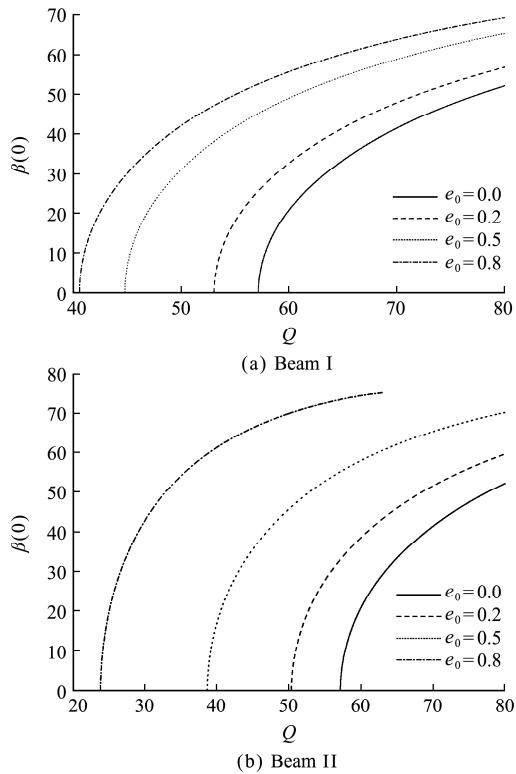


图4 随从分布压力与左端转角的关系曲线

Fig. 4 Relationship curves between follower distribution pressure and left end angle

## 4.2 屈曲基础上的振动响应

重点分析上面得到的屈曲临界载荷附近(前后)的振动响应。着重考虑梯度多孔梁的线性振动问题,为此将式(17)代入式(15),并令  $\sin\theta_d = \theta_d$ ,  $\cos\theta_d = 1$ , 在方程中忽略动态响应的非线性项(详细的推导由于篇幅这里省略),则得到梯度多孔梁过屈曲振动的控制方程

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_d}{d\xi} = -\Lambda_s \Theta_d \sin\theta_s + \Gamma \cos\theta_s \\ \frac{dw_d}{d\xi} = \Lambda_s \Theta_d \cos\theta_s + \Gamma \sin\theta_s \\ \frac{d\Theta_d}{d\xi} = \frac{1}{f_2^2 - f_1 f_3} \left\{ \frac{f_2}{12\delta} [(h_d - V_s \Theta_d) \cos\theta_s + (v_d - H_s \Theta_d) \sin\theta_s] - \frac{f_1}{12} m_d \right\} \\ \frac{dh_d}{d\xi} = \Lambda_s [\omega^2 u_d - Q \Theta_d \sin\theta_s] + \Gamma q \cos\theta_s \\ \frac{dv_d}{d\xi} = \Lambda_s [\omega^2 w_d + Q \Theta_d \cos\theta_s] + \Gamma q \sin\theta_s \\ \frac{dm_d}{d\xi} = \Lambda_s [-(h_d + V_s \Theta_d) \sin\theta_s + (v_d - H_s \Theta_d) \cos\theta_s] + \Gamma (V_s \cos\theta_s - H_s \sin\theta_s) - \frac{f_5}{f_4 \delta^2} \omega^2 \Theta_d \end{array} \right. \quad (20)$$

式中  $\Gamma = \frac{1}{f_2^2 - f_1 f_3} \left\{ \frac{f_3}{12\delta^2} [(v_d - H_s \Theta_d) \sin\theta_s + (h_d + V_s \Theta_d) \cos\theta_s] - \frac{f_2}{12\delta} m_d \right\}$

模态函数的边界条件为

$$w_d(0) = h_d(0) = m_d(0) = 0 \quad (21)$$

$$u_d(1) = w_d(1) = \Theta_d(1) = 0 \quad (22)$$

如果方程(20)单独求解振动频率,会导致离散节点的不吻合,为了解决此问题,本文将方程(17)描述的过屈曲问题和方程(20)描述的振动问题联立求解。因此,这时需要待求的未知量的个数多达14个之多,其中包括未知载荷Q和未知频率ω,这就需要积分14个微分方程。因此,仍采用打靶法寻找振动频率随载荷的变化关系。

图5给出了 $e_0=0$ 即均匀梁屈曲( $Q_{cr}=57.175$ )前后振动频率随载荷之间的关系曲线。当 $Q=0$ 时,自振频率分别为 $\omega_1=15.41$ , $\omega_2=49.91$ , $\omega_3=104.0$ 。

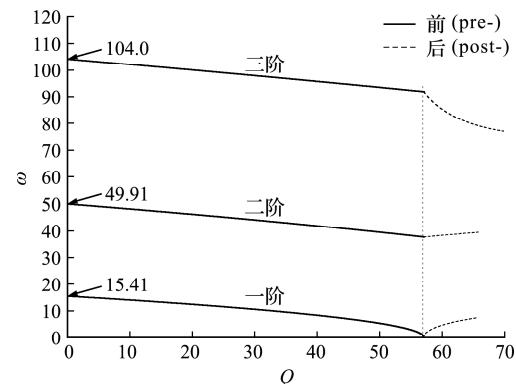
图5 均匀梁Q-ω关系曲线  
Fig. 5 Q-ω relationship curve of uniform beam

图6~图8给出了Beam-I和Beam-II梁在不同孔隙系数下屈曲前和屈曲后的前三阶Q-ω的关系曲线(二阶和三阶只给出了Beam-I情况)。为了方便后边把随从载荷直接说成Q,频率说成ω。可以看出,屈曲前,在不同的孔隙率系数下,一阶频率ω随Q的关系曲线呈非线性单调递减,而二阶和三阶频率与随从载荷的变化曲线是线性递减。当到达临界载荷时,一阶频率变为0,二阶和三阶频率不会变为0。屈曲后,一阶频率随载荷非线性增加,二阶频率随载荷单调线性增加,三阶频率非线性减小到一个极值,之后趋于一个稳定的值,或者说对于三阶频率,过屈曲后当载荷达到某一个值时,无论载荷怎么增加,振动频率几乎不变。

还可以看出,随着材料孔隙率系数的增加,梁发生失稳的临界载荷减小了,且自振频率(即载荷为0时)也减小了,说明孔隙率系数的增加会减弱梁的整体刚度。说明孔隙率系数对梯度多孔梁屈曲和屈曲附近的振动均有显著影响(可以预见,Beam-II梁也有类似的力学特性)。

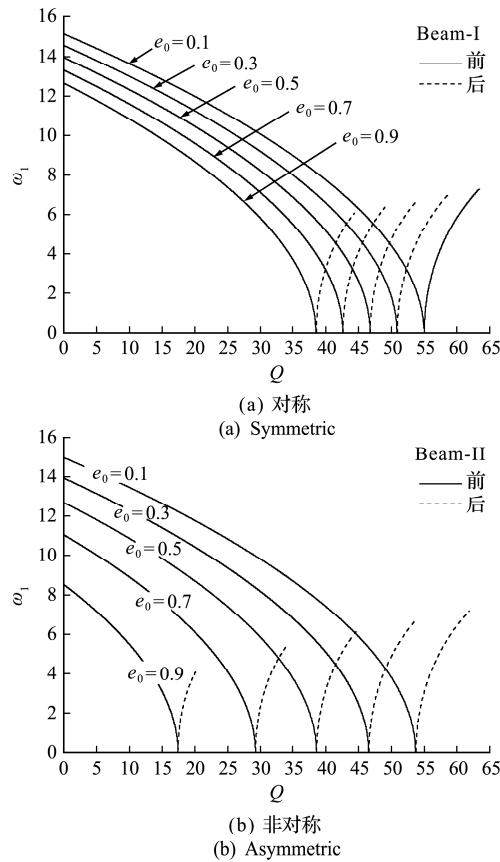
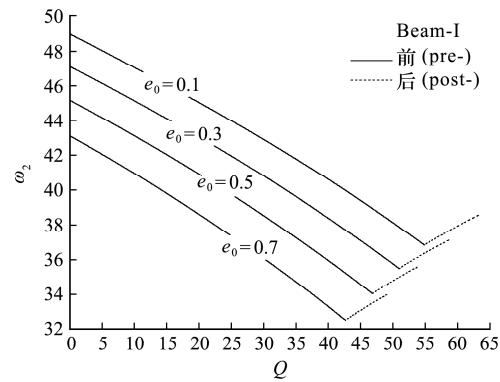
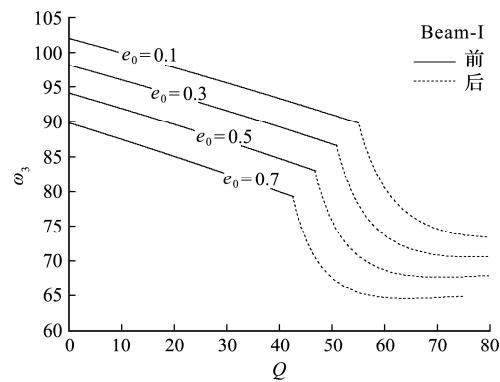
图 6 梯度多孔梁  $Q-\omega_1$  关系曲线Fig. 6  $Q-\omega_1$  relationship curve of graded porous beams图 7  $Q-\omega_2$  关系曲线Fig. 7  $Q-\omega_2$  relationship curve of graded porous beams图 8  $Q-\omega_3$  关系曲线Fig. 8  $Q-\omega_3$  relationship curve of graded porous beams

表 1 给出了不同孔隙率系数下的无量纲自振频率。由表 1 可知,两种分布模式下的自振频率都随孔隙率系数的增大而增大;Beam-II 模型梁的自振频率小于同样工况下的 Beam-I。孔隙率系数越大,两种模型下自振频率之间的差越大。

表 1 不同孔隙率下的自振频率  
Tab. 1 Natural vibration frequency under different porosity

$e_0$	Beam-I			Beam-II		
	1	2	3	1	2	3
0.0	15.41	49.91	104.0	15.41	49.91	104.0
0.1	15.13	48.99	102.1	14.95	48.42	100.91
0.3	14.55	47.13	98.22	13.92	45.07	93.94
0.5	13.95	45.18	94.16	12.67	41.03	85.51
0.7	13.31	43.12	89.84	11.03	35.73	74.45
0.9	12.66	40.98	85.37	8.81	27.56	57.42

## 5 结 论

(1) 孔隙对称分布时,梁发生失稳时的临界载荷随孔隙率系数线性单调递减;非对称分布时则非线性单调递减。这是由于孔隙率系数的增加会消弱梁的整体刚度。

(2) 两种模型下,随着随从载荷的增加,屈曲前的各阶振动频率均减小,其中  $\omega_1$  是非线性的, $\omega_2$  和  $\omega_3$  (甚至更高阶频率)是线性减小的;屈曲后,除了三阶频率随载荷的增加非线性减小,一阶和二阶频率随载荷的变化则相反。

(3) 两种模型下,各孔隙率系数下的临界载荷对应的一阶频率都为 0,而高阶频率则不为 0。

(4) 孔隙率系数一定时,对称模型下多孔梯度梁具有更大的稳定性和更大的振动固有频率。

## 参考文献(References):

- [1] Lau A P S, Chen G F. *Porous Materials: Processing and Applications* [M]. Burlington: Elsevier Science, 2014.
- [2] Shishulin A V, Fedoseev V B, Shishulina A V. Variation of the curie temperature in porous materials[J]. *Technical Physics Letters*, 2020, **46**(7): 680-682.
- [3] Carson J K. A versatile effective thermal diffusivity model for porous materials[J]. *International Journal of Thermophysics*, 2021, **42**(10): 141.
- [4] Wattanasakulpong N, Chaikittiratana A, Pornpeerakeat S. Chebyshev collocation approach for vibration analysis of functionally Graded porous beams based on third-order shear deformation theory [J].

- Acta Mechanica Sinica*, 2018, **34**(6):1124-1135.
- [5] 孙云,陈江,李世荣.基于物理中面FGM板屈曲的有限元分析[J].计算力学学报,2020, **37**(5):560-566. (SUN Yun, CHEN Jiang, LI Shi-rong. Finite element analysis for the buckling of functionally graded material plates based on physical neutral surface [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2020, **37**(5):560-566. (in Chinese))
- [6] Magnucki K, Stasiewicz P. Elastic bending of an isotropic porous beam[J]. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 2004, **9**(2):351-360.
- [7] Chen D, Yang J, Kitipornchai S. Elastic buckling and static bending of shear deformable functionally graded porous beam[J]. *Composite Structures*, 2015, **133**:54-61.
- [8] She G L, Liu H B, Karami B. On resonance behavior of porous FG curved nanobeams[J]. *Steel and Composite Structures*, 2020, **36**(2):179-186.
- [9] Xiao W S, Guo Y, Zhu H P. Buckling and post-buckling of magneto-electro-thermo-elastic functionally graded porous nanobeams[J]. *Microsystem Technologies*, 2019, **25**(6):2451-2470.
- [10] Li Q L, Yan X, Zhang J H. Axisymmetric vibration analysis of graded porous Mindlin circular plates subjected to thermal environment[J]. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2021, **16**(3):371-388.
- [11] Leipholz H. *Stability of Elastic Systems* [M]. Sijhoff & Noordhoff, 1980.
- [12] 赵凤群,王忠民,刘宏昭.非保守功能梯度材料杆的后屈曲分析[J].工程力学,2007, **24**(6):54-58. (ZHAO Feng-qun, WANG Zhong-min, LIU Hong-zhao. Post-buckling analysis of FGM beam subjected to non-conservative forces [J]. *Engineering Mechanics*, 2007, **24**(6):54-58. (in Chinese))
- [13] 李清禄,王思瑶,张清华.湿-热-机耦合梯度多孔材料梁的非线性力学行为[J].航空材料学报,2022, **42**(3):38-44. (LI Qing-lu, WANG Si-yao, ZHANG Jing-hua. Nonlinear mechanical behavior of graded porous material beam subjected to moisture-heat-mechanics loads [J]. *Journal of Aeronautical Materials*, 2022, **42**(3):38-44. (in Chinese))
- [14] 陈文炯,刘书田.周期性吸声多孔材料微结构优化设计[J].计算力学学报,2013, **30**(1):45-50. (CHEN Wen-jiong, LIU Shu-tian. Optimizing design of microstructural configurations of periodic porous sound-absorbing materials [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2013, **30**(1):45-50. (in Chinese))
- [15] Ashby M, Evans A, Fleck N. et al. Metal foams: A design guide[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2001, **54**(6):B105-B106.
- [16] Li S R, Zhou Y H. Shooting method for non-linear vibration and thermal buckling of heated orthotropic circular plates[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, **248**(2):379-386.

## Buckling of beams made of graded porous metal materials and times new vibration on the basis of buckling

LI Qing-lu\*, ZHAO Xuan-he, ZHANG Jing-hua

(School of Sciences, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

**Abstract:** In order to study the buckling of a graded porous metal beam and its vibration characteristics near buckling, the governing equations of motion of the gradient porous metal beam under the distributed follower pressure were first established, and the governing differential equations of static equilibrium describing post-buckling and the governing equations describing the vibration response before and after buckling were obtained. Two sets of strongly nonlinear equations were solved numerically by shooting method, and the critical buckling load of hinged-fixed graded porous beams and the relationship between the vibration frequency and the load before and after buckling were obtained. The effects of porosity coefficient and porosity distribution on critical buckling load and vibration frequency before and after buckling were analyzed. The results show that the critical load decreases with the increase of porosity coefficient; the natural frequencies also decrease. Before buckling, the natural vibration frequencies decrease with the increase of load. After buckling, the first-and second-order frequencies increase with the increase of load, except for the third order frequencies.

**Key words:** graded porous material; porosity; follower force; critical load; frequency