

DOI: 10.7511/jslx20220804001

求解浅水波方程的并行物理信息神经网络算法

靳放, 郑素佩*, 封建湖, 林云云

(长安大学理学院, 西安 710064)

摘要: 双曲守恒律方程是一类比较特殊的偏微分方程, 其数值求解方法的研究一直是一个热点问题, 一个显著特性是即使初始条件是光滑的, 其解也可能会发展成间断。浅水波方程作为非线性双曲守恒律方程, 由于间断解的存在, 其精确求解存在很大困难。针对浅水波方程数值求解问题, 本文基于 PINN (Physics informed neural networks) 反问题网络结构构造新的网络, 构造的网络结构包括两个并行的神经网络, 其中一个网络与已知状态数据 (熵稳定格式加密求出) 相关, 另一个网络与方程本身相关。利用已知速度数据结合浅水波方程本身求解未知水深, 最终通过一些数值算例验证网络的可行性。结果表明, 新的网络结构可用于浅水波方程求解, 利用速度数据可以较为精确地推算出水深。

关键词: 浅水波方程; 深度学习; 神经网络; 激波

中图分类号: O354; O241.82

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2024)02-0352-07

1 引言

双曲守恒律方程是一类特殊的偏微分方程, 可以用来描述许多实际问题, 其中的浅水波方程, 可以用来研究河流、潮汐和海洋波浪等问题。由于解的不连续性, 浅水波方程的精确求解仍存在较大困难。Tadmor^[1]定义了熵稳定格式, 提供了一种简单有效的方法去获得稳定、具有物理意义的解。Ismail 等^[2]在熵守恒格式上添加了数值黏性项, 得到的新格式能很好地捕捉激波。王令等^[3]提出了移动网格熵稳定格式求解浅水波方程, 浅水波方程数值格式的分辨率得到了有效的提高, 这些方法目前得到广泛应用。

随着空间维数增高, 传统格式计算时计算量增大, 会引发维数灾难, 因此对于高维方程的数值解, 迫切需要研究出合适的解决方案。与经典的数值格式^[3-5]相比, 最近出现了许多使用深度学习算法去解决偏微分方程相关问题的研究^[6-10]。文献^[11]利用高斯过程回归表示线性算子设计函数, 且可以准确地推断出方程的解。随后, Raissi 等^[12,13]提出了用该方法求解非线性问题。文献^[14]提出了一种用物理方程作为运算限制的 PINN 算法, PINN 是把物理方程作为限制项加入神经网络中

使得训练的结果满足物理规律。虽然 PINN 在求解偏微分方程方面取得了极大的成功, 但也有其局限性, 处理具有不连续解的双曲守恒律方程时性能较差。毛志平等^[15]利用 PINN 来模拟高速空气动力学流动的双曲守恒律欧拉方程, 试图解决一维和二维欧拉方程的正问题与反问题。文献^[16]利用 PINN 求解气象背景下浅水波方程, 将时间区间划分为多个小区间, 通过在每个子区间中训练一个神经网络, 连续求解每个子区间上的浅水波方程。文献^[15,16]为利用深度学习求解双曲守恒律方程奠定了基础。

为了克服 PINN 的局限性, 使双曲守恒律方程的不连续性问题得到解决, 本文重新设计网络结构, 新的网络结构包括两个并行的神经网络, 其中一个网络与已知状态数据相关, 另一个网络与方程本身相关。在网络优化的过程中, 本文在损失函数中引入权重系数, 以增强网络优化的效果。PINN 反问题是利用已知数据去学习方程中的未知参数, 本文则是利用已知速度数据结合浅水波方程去学习未知水深。

2 控制方程

了解水的运动规律, 可以避免多种水流灾害, 所以对浅水波方程的研究有着重要的实际意义。下面给出一维和二维浅水波方程的表达形式。

一维浅水波方程

$$U_t + F(U)_x = -S \quad (1)$$

收稿日期: 2022-08-04; 修改稿收到日期: 2023-02-04.

基金项目: 国家自然科学基金(11971075; 11901057)资助项目.

作者简介: 郑素佩* (1978-), 女, 博士, 副教授, 硕士生导师

(E-mail: zsp2008@chd.edu.cn).

式中 $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}$ 为守恒变量, $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + 0.5gh^2 \end{bmatrix}$ 为通量, $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ ghb_x \end{bmatrix}$ 为源项, h 为水深, g 为重力加速度, u 为水流速度, b_x 为底部地势函数。

二维浅水波方程

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x + \mathbf{G}(\mathbf{U})_y = -\mathbf{S}$$

式中 $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}$, $\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + 0.5gh^2 \\ huv \end{bmatrix}$, $\mathbf{G}(\mathbf{U}) =$

$\begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + 0.5gh^2 \end{bmatrix}$, h 为水深, g 为重力加速度, u 和 v 分别为 x 方向和 y 方向上的水流速度, $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ gh \frac{\partial z_b}{\partial x} + ghS_{f_x} \\ gh \frac{\partial z_b}{\partial y} + ghS_{f_y} \end{bmatrix}$ 是源项, z_b 为底部地势函数。

$gh(\partial z_b/\partial x)$ 和 $gh(\partial z_b/\partial y)$ 分别为水下底部作用力沿 x 方向和 y 方向上的分力, ghS_{f_x} 和 ghS_{f_y} 为水下底面摩擦力沿 x 方向和 y 方向上的分量, S_{f_x} 和 S_{f_y} 分别为 x 方向和 y 方向上的摩擦比率, 其表达式为

$$S_{f_x} = \frac{u}{k^2} \frac{(u^2 + v^2)^{1/2}}{h^{4/3}}, S_{f_y} = \frac{v}{k^2} \frac{(u^2 + v^2)^{1/2}}{h^{4/3}}$$

式中 k 为摩擦因数, 通常情况下取 $k = 50$ 。

3 算法

3.1 并行的物理信息神经网络

基于 PINN 的思想, 本文重新设计 PINN 反问题网络结构, 利用已知数据结合浅水波方程去求解方程中的未知量水深, 其中一个网络与已知速度数据相关, 另一个网络与浅水波方程本身相关。PINN 由于使用了共享超参数, 只能设置一种网络层, 为了使网络能够充分学习到浅水波方程中的状态量, 新的神经网络设置了两个并行的网络, 使得神经网络可以设置两种网络层。本文直接使用 Tensorflow 的自动微分技术, 优化过程使用优化器 Adam 和 L-BFGS, 网络结构如图 1 所示。

以一维浅水波方程为例, 该网络结构将向量 $\mathbf{z} = \{(x^1, t^1), (x^2, t^2), \dots, (x^N, t^N)\}$ 作为网络输入量, 先使用网络 1 学习已知的速度数据, 再把网络 1 学习到的 u_{NN} 添加到网络 2 中, 利用方程组的物理约束反向求出未知水深。

定义计算一维浅水波方程神经网络中损失函数为

$$\text{Loss} = \text{Loss}_{\text{data}} + \text{Loss}_F$$

式中 $\text{Loss}_{\text{data}}$ 和 Loss_F 对应于给定数据的损失函数和利用浅水波方程本身构造的损失函数, 令

$$f_1 = h_{NN}(x, t)_t + (h_{NN}(x, t) u_{NN}(x, t))_x$$

$$f_2 = (h_{NN}(x, t) u_{NN}(x, t))_t + (h_{NN}(x, t) u_{NN}^2(x, t) + 0.5gh_{NN}^2(x, t))_x$$

$$\text{Loss}_{\text{data}} = \omega_1 \text{Loss}_1 + \omega_2 \text{Loss}_2 + \omega_3 \text{Loss}_3$$

$$\text{Loss}_F = \omega_4 \text{Loss}_4 + \omega_5 \text{Loss}_5$$

$$\text{Loss}_1 = \frac{1}{N_u} \sum_{i=1}^{N_u} |u_{NN}^i - u(x_u^i, t_u^i)|^2$$

$$\text{Loss}_2 = \frac{1}{N_h} \sum_{i=1}^{N_h} |h_{NN}^i - h(x_h^i, t_h^i)|^2$$

$$\text{Loss}_3 = \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} |u_{NN}^i - u(x_f^i, t_f^i)|^2$$

$$\text{Loss}_4 = \frac{1}{N_{f_1}} \sum_{i=1}^{N_{f_1}} |f_1|^2$$

$$\text{Loss}_5 = \frac{1}{N_{f_2}} \sum_{i=1}^{N_{f_2}} |f_2|^2$$

式中 (x_u^i, t_u^i) 为初始点与边界点, (x_f^i, t_f^i) 为内部点, $\omega_i (i = 1, \dots, 5)$ 为权重系数。

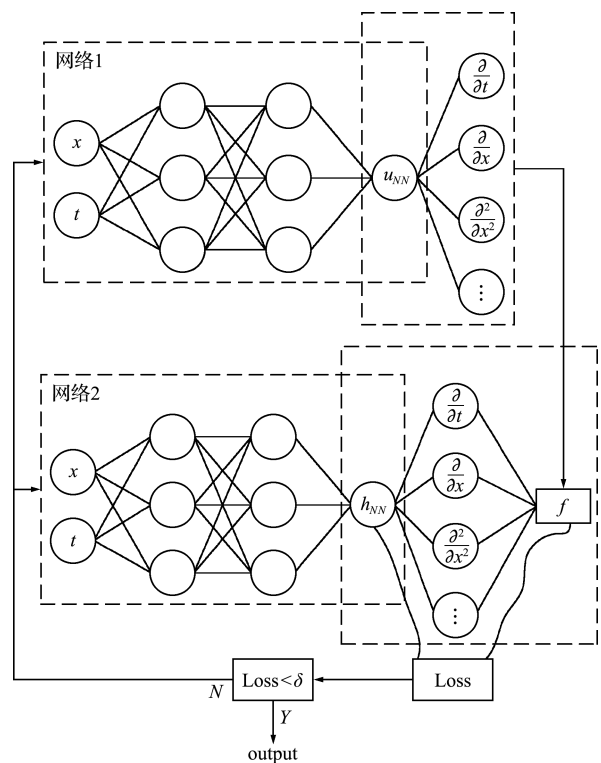


图 1 Concurrent PINN 网络结构
Fig. 1 Concurrent PINN network structure

在神经网络训练的过程中, 通过将损失函数最小化以达到理想的效果。本文在损失函数中增加了权重系数, 通过实验发现, 增加权重系数可以使神经网络训练的结果更好, 绝对误差变得更小。

3.2 熵稳定格式

因为双曲守恒律方程间断解的存在, Lax^[17]提出了弱解的概念, 由于弱解不唯一, 为了在弱解中寻找具有物理意义的熵解, Lax^[18]根据热力学第二定律提出了熵条件。为了研究熵稳定与数值粘性间的关系, Fjordholm 等^[19]设计了二阶熵守恒格式, 熵守恒格式由于没有耗散机制, 在激波附近会产生伪振荡。Roe 通过对熵守恒格式添加合适的数值粘性项得到一类熵稳定格式, 该格式能够较好地捕捉到激波。

一维浅水波方程熵稳定格式数值通量函数可表示为

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{ES} = \mathbf{F}_{i+1/2}^{EC} - \frac{1}{2} \mathbf{R}_{i+1/2} |\mathbf{\Lambda}_{i+1/2}| \mathbf{R}_{i+1/2}^T (\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i) \quad (2)$$

式中 $\mathbf{F}_{i+1/2}^{EC} = \begin{bmatrix} \bar{h}_{i+1/2} \bar{u}_{i+1/2} \\ (g/2)(\bar{h}^2)_{i+1/2} + \bar{h}_{i+1/2}(\bar{u}_{i+1/2})^2 \end{bmatrix}$, $(\bar{\cdot})_{i+1/2} = ((\cdot)_i + (\cdot)_{i+1})/2$ 表示算术平均, \mathbf{F}^{EC} 表示熵守恒通量, \mathbf{R} 为式(1)中 $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ 雅可比矩阵的右特征向量矩阵, $\mathbf{\Lambda}$ 为由特征值组成的对角矩阵, \mathbf{V} 为熵变量。采用 Roe 均值求解式(2)的耗散项, 详见文献[20]。本文算例使用熵稳定计算结果均由 Matlab 程序计算得到。

4 数值算例

用一维和二维浅水波方程的数值算例来验证新网络结构的可行性, 并对结果进行分析, 将网络预测结果和熵稳定格式得到的结果与参考解(由于方程没有精确解, 参考解由网格加密得到)进行对比(公平起见, 对比时使用同样数量的数据点)。本文同时也对损失函数加权与不加权后网络预测结果的 L_2 相对误差进行了对比。

算例 1 考虑一维浅水波小型溃坝问题, 此算例水深包括一个向左传播的稀疏波及一个向右传播的激波。计算区间为 $[-1, 1]$, 计算到 $t = 0.3$, 其初始条件为

$$h(x, 0) = \begin{cases} 2 & (x < 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}, u(x, 0) = 0$$

网络 1 设置 7 个隐藏层, 每层神经元个数都为 60, 网络 2 设置 8 个隐藏层, 每层神经元个数都为 80, 设 $\omega_1 = 20, \omega_2 = 20, \omega_3 = 70, \omega_4 = 1, \omega_5 = 1$ 。首先使用 Adam 优化器设置学习率为 0.01 迭代 1000 次, 再设置学习率为 0.001 迭代 1000 次, 使用 L-BFGS 优化器直到收敛。

损失函数加权与不加权时变量的 L_2 相对误差

对比列入表 1。由表 1 可知, 加权后误差值更小。参考解与熵稳定格式计算结果及网络预测结果的比较如图 2 所示, 可以看出, 该网络可以准确捕获出现的激波和稀疏波, 与参考解基本一致, 说明该网络结构适用于同时含有稀疏波与激波的问题。

表 1 小型溃坝问题加权与不加权 L_2 相对误差对比
Tab. 1 Comparison of weighted and unweighted L_2 relative errors for small dam break problems

	不加权	加权
h 的 L_2 相对误差	1.80e-02	8.12e-03
u 的 L_2 相对误差	1.40e-01	6.55e-02

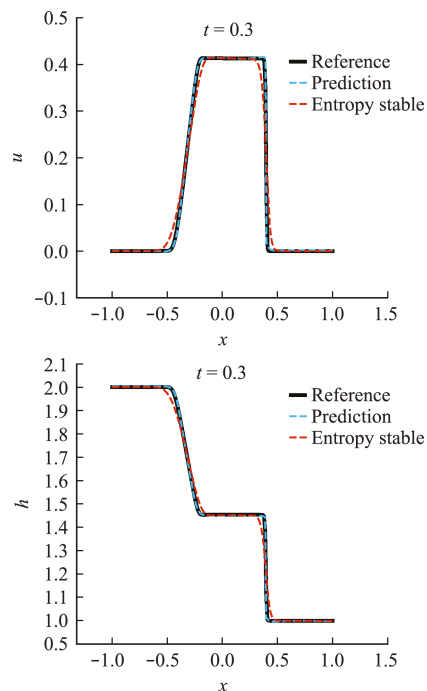


图 2 小型溃坝问题预测解与熵稳定格式结果比较

Fig. 2 Comparison diagram of predicted solutions and entropy stable scheme results for small dam break problems

算例 2 考虑一维浅水波方程水深接近零的溃坝问题, 计算区间为 $[-1, 1]$, 初始条件为

$$u(x, 0) = \begin{cases} -4 & (x < 0) \\ 4 & (x > 0) \end{cases}, h(x, 0) = 1$$

在网络优化的过程中, 设 $\omega_1 = 1000, \omega_2 = 20, \omega_3 = 5000, \omega_4 = 1, \omega_5 = 1$, 网络 1 设置 5 个隐藏层, 每层神经元个数都为 60, 网络 2 设置 5 个隐藏层, 每层神经元个数都为 60。首先使用 Adam 优化器设置学习率为 0.01 迭代 1000 次, 再设置学习率为 0.001 迭代 1000 次, 使用 L-BFGS 优化器直到收敛。

损失函数加权与不加权时变量的 L_2 相对误差对比列入表 2, 由表 2 可知, 加权后误差值更小。参考解与熵稳定格式计算结果及网络预测结果的比较如图 3 所示, 可以看出, 网络预测的结果保持

了浅水波水深非负的物理特性,与参考解基本一致,充分说明了该网络结构对水深接近零的溃坝问题同样适用。

表2 水深接近零的溃坝问题加权与不加权 L_2 相对误差对比

Tab.2 Comparison of weighted and unweighted L_2 relative errors for dam break problem with water depth approaching zero

	不加权	加权
h 的 L_2 相对误差	1.71e-02	1.26e-03
u 的 L_2 相对误差	5.45e-03	1.95e-04

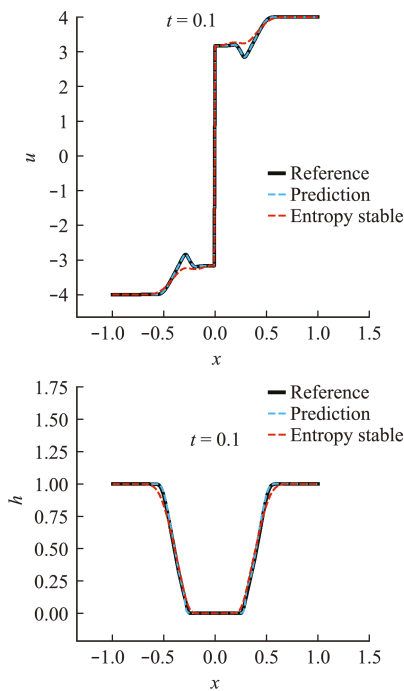


图3 高度接近零的溃坝问题预测解与熵稳定格式结果比较
Fig.3 Comparison diagram of predicted solution and entropy stable scheme results for dam break problem with height close to zero

算例3 考虑二维潮汐模拟问题,对潮汐模拟的研究有助于预防海洋灾害问题,在区域 $[-2, 2] \times [-2, 2]$ 上考虑二维方程,初始条件为

$$h(x, y, 0) = z(x, y, 0) + \zeta(x, y, 0)$$

$$u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = 0$$

式中 $z(x, y) = 1 + 0.01\cos(\pi x/2)\cos(\pi y/2)$

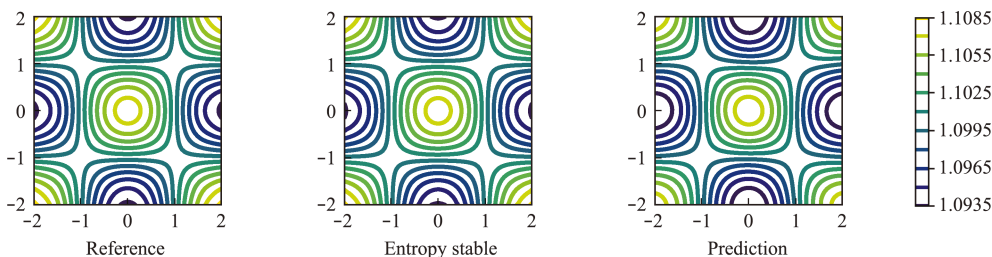


图4 潮汐模拟水深等值线比较
Fig.4 Tidal simulation depth contour comparison diagram

$$\zeta(x, y, 0) = 0.1 \exp(-10^{-16} R^2), R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

在网络优化的过程中,设 $\omega_1 = 20, \omega_2 = 20, \omega_3 = 20, \omega_4 = 100, \omega_5 = 100, \omega_6 = 1, \omega_7 = 1, \omega_8 = 1$, 网络1设置3个隐藏层,每层神经元个数为50,网络2设置3个隐藏层,每层神经元个数为50。首先使用Adam优化器设置学习率为0.001迭代2000次,使用L-BFGS优化器直到收敛。

损失函数加权与不加权时变量的 L_2 相对误差对比列入表3,由表3可知,加权后误差值更小。参考解与熵稳定格式计算结果及神经网络预测结果的水深等值线如图4所示,可以看出均对称性良好,结构清晰。参考解与熵稳定格式计算结果及神经网络预测结果的比较如图5所示,可以看出网络预测的结果对称性良好,结构清晰,与参考解基本一致,充分说明了网络结构对二维潮汐模拟这类连续问题同样适用。

表3 潮汐模拟问题加权与不加权 L_2 相对误差对比
Tab.3 Comparison of weighted and unweighted L_2 relative errors in tidal modeling problems

	不加权	加权
h 的 L_2 相对误差	4.25e-03	1.22e-04
u 的 L_2 相对误差	8.31e-01	4.45e-02
v 的 L_2 相对误差	8.37e-01	4.42e-02

算例4 考虑二维浅水波方程圆形溃坝问题,水深包含一个向内的稀疏波与一个向外的激波。计算区域为 $[-1, 1] \times [-1, 1]$, 计算到 $t = 0.1$ 。初始条件为

$$h(x, y, 0) = \begin{cases} 2 & \sqrt{x^2 + y^2} < 0.5 \\ 1 & \text{others} \end{cases}$$

$$u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = 0, z_b(x, y) = 0$$

在网络优化的过程中设 $\omega_1 = 200, \omega_2 = 20, \omega_3 = 20, \omega_4 = 3000, \omega_5 = 3000, \omega_6 = 1, \omega_7 = 1, \omega_8 = 1$, 网络1设置4个隐藏层,每层神经元个数为40,60,40和60,网络2设置4个隐藏层,每层神经元个数为60。首先使用Adam优化器设置学习率为0.001迭代2000次,使用L-BFGS优化器直到收敛。

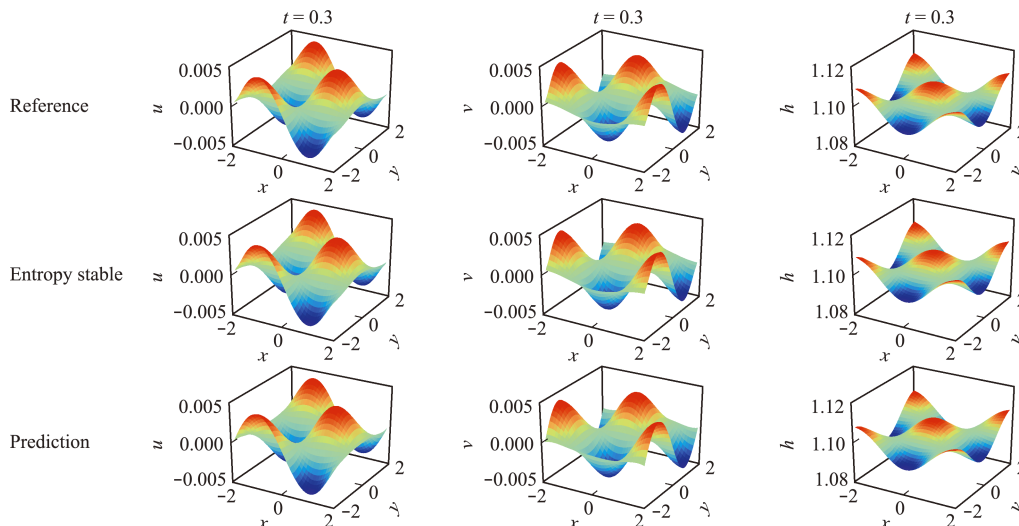


图5 潮汐模拟问题预测解与熵稳定格式结果比较

Fig. 5 Comparison of predicted solutions to tidal simulation problems with entropy stable scheme results

损失函数加权与不加权时变量的 L_2 相对误差对比列入表4,由表4可知加权后误差值更小。参考解与熵稳定格式计算结果及神经网络预测结果的水深等值线如图6所示,可以看出,相较而言,神经网络预测结果没有非物理振荡产生。参考解与熵稳定格式计算结果及网络预测结果的比较如图7所示,可以看出网络预测的结果对称性良好,没有出现非物理振荡,与参考解基本一致,说明了该网络结构适

用于含有激波与稀疏波的二维溃坝问题。

表4 圆形溃坝问题加权与不加权 L_2 相对误差对比
Tab. 4 Comparison of weighted and unweighted L_2 relative errors for circular dam break problem

	不加权	加权
h 的 L_2 相对误差	2.40e-02	6.15e-03
u 的 L_2 相对误差	1.58e-01	3.29e-02
v 的 L_2 相对误差	1.53e-01	3.24e-02

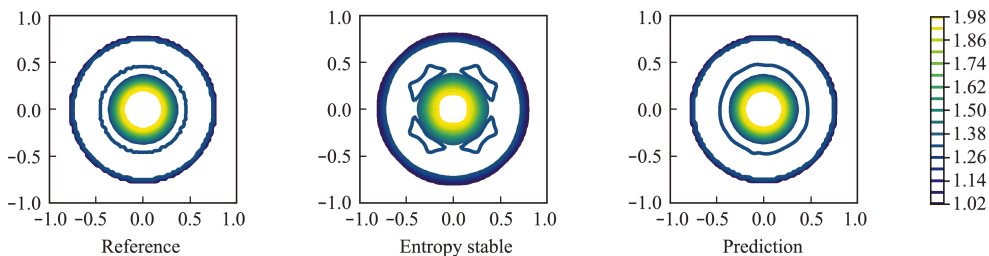


图6 圆形溃坝问题水深等值线比较

Fig. 6 Comparison chart of water depth isoline for circular dam break problem

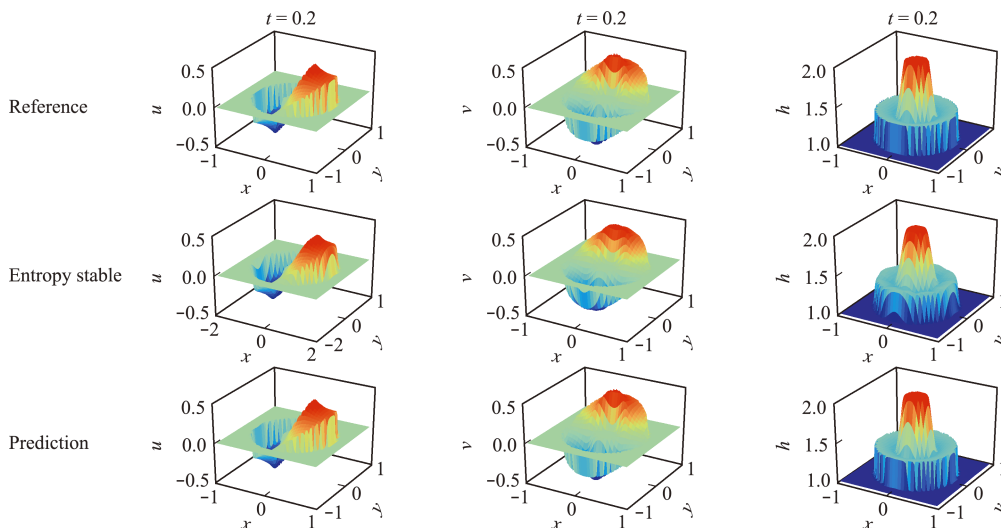


图7 圆形溃坝问题预测解与熵稳定格式结果比较

Fig. 7 Comparison diagram of predicted solution and entropy stable scheme results for circular dam break problem

5 结 论

本文基于 PINN 反问题求解方法构造了一种新的网络框架,利用已知速度数据反向求解浅水波方程中的未知水深。将该网络结构应用于一维和二维浅水波方程,其中已知数据使用熵稳定方法得到。由于未知水深与已知速度相关,在设置损失函数权重系数时,可偏重于速度数据前的权重系数,效果更好。数值实验结果表明,网络结构可适用于浅水波方程间断问题、连续问题以及同时含有激波与稀疏波问题,且预测出来的结果与参考解基本一致,经过优化训练后可较为精确地推断出水深。对于求解其他类型双曲守恒律方程还需进一步研究。

参考文献(References):

- [1] Tadmor E. The numerical viscosity of entropy stable schemes for systems of conservation laws: I [J]. *Mathematics of Computation*, 1987, **49**(179):91-103.
- [2] Ismail F, Roe P L. Affordable, entropy-consistent Euler flux functions II: Entropy production at shocks [J]. *Journal of Computational Physics*, 2009, **228**(15):5410-5436.
- [3] 王 令,郑素佩. 基于移动网格的熵稳定格式求解浅水波方程[J]. 水动力学研究与进展(A辑), 2020, **35**(2):188-193. (WANG Ling, ZHENG Su-pei. Solving shallow water wave equation based on moving grid entropy stable scheme[J]. *Chinese Journal of Hydrodynamics*, 2020, **35**(2):188-193. (in Chinese))
- [4] Fjordholm U S, Mishra S, Tadmor E. Arbitrarily high-order accurate entropy stable essentially non-oscillatory schemes for systems of conservation laws [J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2012, **50**(2):544-573.
- [5] Levy D, Puppo G, Russo G. A fourth-order central WENO scheme for multidimensional hyperbolic systems of conservation laws [J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2002, **24**(2):480-506.
- [6] Han J Q, Jentzen A, Weinan E. Solving high-dimensional partial differential equations using deep learning [J]. *Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America*, 2018, **115**(34):8505-8510.
- [7] Sirignano J, Spiliopoulos K. DGM: A deep learning algorithm for solving partial differential equations [J]. *Journal of Computational Physics*, 2018, **375**:1339-1364.
- [8] Sun L N, Gao H, Pan S W, et al. Surrogate modeling for fluid flows based on physics-constrained deep learning without simulation data [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, **361**:112732.
- [9] 赵青宇,郑素佩,李 霄. 机器学习在求解一维双曲守恒律方程中的应用 [J]. 计算力学学报, 2022, **39**(2):229-236. (ZHAO Qing-yu, ZHENG Su-pei, LI Xiao. Application of machine learning in solving one dimensional hyperbolic conservation law equation [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2022, **39**(2):229-236. (in Chinese))
- [10] Bar-Sinai Y, Hoyer S, Hickey J, et al. Learning data-driven discretizations for partial differential equations [J]. *Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America*, 2019, **116**(31):15344-15349.
- [11] Rasmussen C E, Williams C K I. *Gaussian Processes for Machine Learning* [M]. MIT Press, 2005.
- [12] Raissi M, Perdikaris P, Karniadakis G E. Numerical Gaussian processes for time-dependent and nonlinear partial differential equations [J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2018, **40**(1):172-198.
- [13] Raissi M, Karniadakis G E. Hidden physics models: Machine learning of nonlinear partial differential equations [J]. *Journal of Computational Physics*, 2018, **357**:125-141.
- [14] Raissi M, Perdikaris P, Karniadakis G E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations [J]. *Journal of Computational Physics*, 2019, **378**:686-707.
- [15] Mao Z P, Jagtap A D, Karniadakis G E. Physics-informed neural networks for high-speed flows [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, **360**:112789.
- [16] Bihlo A, Popovych R O. Physics-informed neural networks for the shallow-water equations on the sphere [J]. *Journal of Computational Physics*, 2022, **456**:111024.
- [17] Lax P D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation [J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1954, **7**(1):159-193.
- [18] Lax P D. *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves* [M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1973.
- [19] Fjordholm U, Mishra S, Tadmor E. *Energy Preserving and Entropy Stable Schemes for the Shallow*

Water Equations[M], Cambridge:Cambridge University Press,2009.

[20] 刘 刚,金 生.基于修正Roe格式的有限体积法求解二维浅水方程[J].水利水运工程学报,2009(3):

29-33(LIU Gang,JIN Sheng. Finite volume model for the 2D shallow water equations using modified Roe scheme [J]. *Hydro-Science and Engineering*, 2009 (3):29-33. (in Chinese))

Concurrent PINN algorithm for solving shallow water wave equations

JIN Fang, ZHENG Su-pei*, FENG Jian-hu, LIN Yun-yun
(College of Science,Chang'an University,Xi'an 710064,China)

Abstract:Hyperbolic conservation equation is a special class of partial differential equations, and the study of its numerical solution method has always been a hot topic. One of its remarkable properties is that its solution may contain discontinuity even if the initial conditions are smooth. As a representation of the nonlinear hyperbolic conservation law, the shallow water wave equation is difficult to be solved precisely because of the existence of discontinuous solutions. In order to solve numerically the shallow water wave equation, a new network is constructed based on the inverse problem framework of PINN (Physics-informed Neural Networks). The network structure consists of two parallel neural networks, one of which is related to the known data obtained by the entropy stable schemes. The other network is related to the equation itself. The unknown water depth is determined by combining the known velocity data with the shallow water wave equation itself. Finally, the feasibility of the network is verified by some numerical examples. The results show that the new network structure can be used to solve the shallow water wave equation, and the water depth can be accurately calculated.

Key words:shallow water wave equation; deep learning; neural networks; shock wave

引用本文/Cite this paper:

靳 放,郑素佩,封建湖,等.求解浅水波方程的并行物理信息神经网络算法[J].计算力学学报,2024,41(2):352-358.

JIN Fang, ZHENG Su-pei, FENG Jian-hu, et al. Concurrent PINN algorithm for solving shallow water wave equations [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2024, 41(2):352-358.