

DOI: 10.7511/jslx20220601001

二维水下声辐射问题的改进径向基点插值法研究

桂强¹, 孙磊¹, 游翔宇², 柴应彬³, 李威^{*1,4,5}

(1. 华中科技大学 船舶与海洋工程学院, 武汉 430074; 2. 长沙理工大学 水利与环境工程学院, 长沙 410114;

3. 武汉理工大学 船海与能源动力工程学院, 武汉 430063;

4. 华中科技大学 船舶与海洋水动力湖北省重点实验室, 武汉 430074;

5. 高新船舶与深海开发装备协同创新中心, 上海 200240)

摘要: 径向基点插值法是一种典型的无网格数值计算方法, 在分析声学问题时, 相比于传统有限元法能更好地抑制频散误差, 且在相同的节点分布下通常可以得到更精确的数值解。本文提出一种改进的节点选取方案用于构造插值形函数, 即改进径向基点插值法。该方案采取一个简单而直接的格式, 可确保在进行数值积分时同一背景积分单元中的被积函数是连续可微的, 从而减小数值积分误差, 得到比原始径向基点插值法更精确的数值解。同时, 为了处理外声场问题, 本文采用 DtN 映射技术将无限域截断为有界计算域, 满足索默菲尔辐射条件。数值试验表明, 相比于传统有限元法和原始径向基点插值法, 本文改进方法具有更高的计算精度和计算效率, 在研究水下声辐射问题时具有良好的应用前景。

关键词: 径向基点插值法; 水下声辐射; DtN 映射; 无界域; 无网格技术

中图分类号: O242.21; O302

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2024)02-0344-08

1 引言

具备良好通用性和有效性的有限元方法 FEM 受到广大工程师和研究人员的青睐, 使数值模拟成为分析各类工程问题的实用工具。然而, 在声学分析中, 由于数值频散的影响^[1,2], FEM 的求解精度随着计算波数的增加而迅速下降。因此在实际工程应用中, 通常需要遵循一个经验法则^[2], 即每个波长内至少划分六个单元, 才能获得可靠的求解精度。虽然高阶有限单元能够降低插值误差和频散误差, 但其计算精度受网格质量影响较大, 并使得大量的人工成本花费在网格划分上。尽管许多自适应分析技术已经发展起来^[3], 但计算效率仍然受到误差估计和网格优化算法的限制。

为了提高有限元模型的求解精度并减少声学分析中用于网格划分的人工成本, 许多先进的数值方法相继提出, 如光滑有限元法 S-FEM^[4]、质量重构有限元法 MR-FEM^[5]、广义有限元法 GFEM^[6]及重叠有限元法 OFEM^[7]等。在声学分析中这些方法都有各自的优缺点。相关研究表明, 这些方法能明显地抑制数值频散, 并获得较为满意的数值

解。然而, S-FEM 和 MR-FEM 分别需要额外的操作来构造光滑域和声质量矩阵; 基于单位分解的 GFEM 和 OFEM 需要引入大量的节点附加自由度, 增加了计算成本。

基于边界积分方程的边界元法 BEM^[8]也是声学分析中常用的数值工具之一。BEM 的主要优势在于只需要将问题域的边界离散为若干个边界单元。此外, Sommerfeld 辐射条件可以自动满足, 这对处理外声场问题是有利的。相比之下, FEM 等基于域离散的数值方法需要采用额外的技术将无限域截断为一个有界的计算域^[1]。然而, BEM 的系数矩阵是非稀疏和非对称的, 这导致了较高的计算成本。此外, 在处理外声场问题时, 为了克服计算频率与系数矩阵特征值一致时的数值解不稳定现象, BEM 通常需要引入额外的数值技术, 如 Chief 方法或 Burton Miller 法^[9]。

为了规避对网格的需求, 诸多无网格方法相继提出^[10]。由于场函数的近似通常是基于一个可变化的域, 无网格技术可以灵活地构造形函数, 因此能有效地降低插值误差和频散误差, 并在声学问题中得到良好的应用, 如点插值法 PIM^[11]、径向基点插值法 RPIM^[12]、局部 Petrov-Galerkin 法^[13]、有限球法 MFS^[14]、无单元伽辽金法 EFGM^[15]和局部 Chebyshev 配点法^[16]等。在各种无网格方法中, RPIM 作为一种有效且稳定的数值工具已在各个

收稿日期: 2022-06-01; 修改稿收到日期: 2022-09-02.

基金项目: 国家自然科学基金(52171336)资助项目.

作者简介: 李威^{*}(1975-), 男, 博士, 教授

(E-mail: hustliw@hust.edu.cn).

研究领域得到应用。一方面,RPIM 插值形函数具有 Kronecker δ 函数的性质,即本质边界条件可以像 FEM 一样直接施加。另一方面,RPIM 对不规则的节点分布不敏感。然而,在构造标准 RPIM 插值形函数的过程中,由于支持域中的场节点会突然更新,即当节点进入或离开支持域时,实际上是跳入或跳出支持域,并且没有像 EFGM 一样使用钟状权函数,这就导致了在同一背景积分单元内的被积函数不连续,进而导致在求解声学问题时存在较大的积分误差。本文在原始 RPIM 的基础上^[10],提出一种新的插值节点选取方案来保证同一背景积分单元内被积函数是连续可微的^[17-19],称为改进径向基点插值法 mRPIM(modified RPIM),并通过频散误差分析证实了该方案可以显著抑制声学分析中的数值频散现象^[17,18]。本文将这种改进方法扩展到无限水域中的声辐射问题,通过引入 DtN (Dirichlet-to-Neumann) 映射技术^[20] 将无限域截断为有界计算域,满足索默菲尔德辐射条件。试验表明,相比于传统 FEM 和标准 RPIM, mRPIM 具有更高的计算精度和计算效率,在研究外声场辐射问题时具有良好的应用前景。

2 改进径向基点插值法

2.1 RPIM 形函数的构造

在声学问题中,场函数(声压 u) 的 RPIM 近似 u^h 可以表示为^[10]

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n R_i(r) a_i + \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) b_j = \mathbf{R}^T \mathbf{a} + \mathbf{P}^T \mathbf{b} \quad (1)$$

式中 $R_i(r)$ 为径向基函数(RBFs), n 为局部插值域中的场节点数, $p_j(\mathbf{x})$ 为多项式基函数(PBFs), m 为多项式基函数的个数, a_i 和 b_j 为对应的插值系数。

根据文献^[10],使用 PBFs 可以完全避免插值运算过程中的奇异矩阵,并保证 RPIM 的线性一致性;同时,PBFs 的使用可以提高求解精度,降低对形状参数和不规则节点分布的敏感性。本文将使用线性 PBFs, $p^T(\mathbf{x}) = [1 \ x \ y]$, 即 $m=3$ 。

本文采用标准的复合二次径向基函数(MQ-RBFs)

$$R_i(r) = [r^2 + (\alpha_c d_c)^2]^q \quad (2)$$

式中 $r = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}$ 为从场点 (x_i, y_i) 到插值点 (x, y) 的距离,文献^[10]表明形状参数取 $\alpha_c=2$, q 取 1.03 时获得较好的计算精度。

局部节点间距 d_c 可通过式(3)得到

$$d_c = \sqrt{A_d} / (\sqrt{N_d} - 1) \quad (3)$$

式中 A_d 为局部插值域的面积, N_d 为该域中的场节点数量。

将所有节点参数以及约束条件^[10]代入式(1),可以得到

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_e \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 & \mathbf{P}_m \\ \mathbf{P}_m^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \mathbf{G} \mathbf{a}_0 \quad (4)$$

系数 \mathbf{a}_0 可以通过求解方程(4)得到,然后将 \mathbf{a}_0 代入式(1),可以得到

$$u^h(\mathbf{x}) = \{\mathbf{R}^T \ \mathbf{P}^T\} \mathbf{G}^{-1} \{\mathbf{u}_e \ \mathbf{0}\}^T \quad (5)$$

RPIM 的插值形函数 $\Phi(\mathbf{x})$ 即可由式(6)得到,

$$\Phi(\mathbf{x}) = \{\phi_1(\mathbf{x}) \ \phi_2(\mathbf{x}) \ \cdots \ \phi_n(\mathbf{x})\} = \{\mathbf{R}^T \ \mathbf{P}^T\} \mathbf{G}^{-1} |_{1 \sim n} \quad (6)$$

2.2 数值积分及 mRPIM 形函数的构造

为了实现弱形式的数值积分,伽辽金无网格法通常需要一组全局背景积分单元,如图 1 所示。需要指出的是,RPIM 中形函数的构造与这些只用于数值积分的背景单元无关。更多关于背景积分单元和无网格法之间关系的讨论可以参见文献^[10]。本文采用四节点四边形单元作为背景积分单元,在每个背景单元内部采用传统的高斯积分格式。为确保各方法计算结果的对比是公平的,本文令场点与背景单元网格的节点重合,并且在 FEM 计算中也使用相同的节点(网格)。

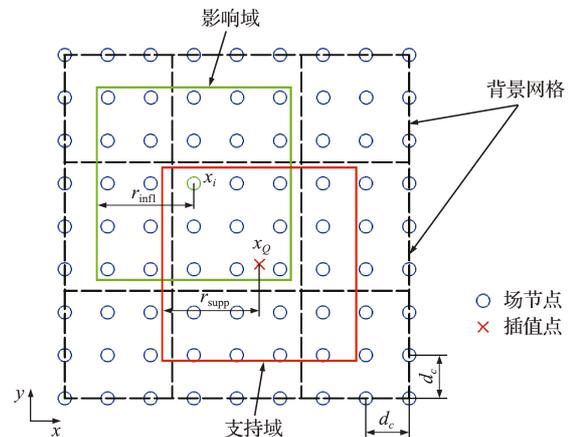


图 1 无网格方法中用于数值积分的背景单元
Fig. 1 Background cells for the numerical integration in meshless methods

此外,还需要说明支持域和影响域这两个概念。支持域是指用于构建插值点形函数的区域,影响域是指一个场节点影响的区域,如图 1 所示。当一个场节点位于插值点 x_0 的支持域中时,这个插值点也会由相应场节点的影响域覆盖。因此在实际计算中,两个域的大小总是相同的。本文将支持域替换为影响域,文献^[10]说明了这种操作的优点。实际上,影响域可以是任意形状,本文使用正

方形域,且域的大小由 r_{infl} 决定

$$r_{\text{infl}} = \alpha d_c \quad (7)$$

式中 α 为无因次系数,控制与 d_c 相关的影响域的实际大小。本文取 $\alpha = 2.5$, 即影响域的大小为节点间距的 2.5 倍。

通过以上概念可知,在构造标准 RPIM 插值形函数的过程中,支持域中的场节点会突然更新,即当节点进入或离开支持域时,实际上是跳入或跳出支持域,并且由于没有像 EFGM 一样使用钟状权重函数,这就导致了在同一背景积分单元内的被积函数不连续,进而导致在求解声学问题时存在较大的积分误差。

本文使用了一个改进的节点选择方案。在改进方案中,一个单元内的所有高斯积分点使用一个相同的支持域,且该支持域是使用四边形单元的形心构建的,如图 2 所示。这种节点选择方案不仅可以保证同一背景积分单元内 RPIM 形函数的兼容性,而且由于每个单元只执行一次支持域的构造,因此大大降低了计算成本。

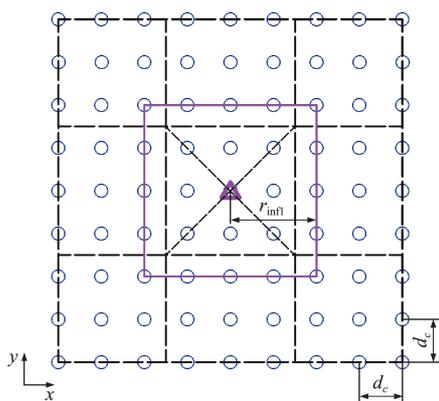


图 2 利用四边形单元形心构造背景单元内各积分点影响域的新型节点选择方案

Fig. 2 Node selection scheme for the mRPIM in which the influence domain of the integration points inside a background cell is constructed using the centre of the quadrangle (the purple triangle)

3 声辐射问题控制方程

3.1 声辐射问题的数学模型

典型外声场辐射问题如图 3 所示。辐射体边界 Γ 由互不重叠的狄利克雷边界 Γ_D 和诺依曼边界 Γ_N 组成,即 $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N, \Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ 。考虑到声学介质是理想的、均质的和静止的流体,则关于小扰动声压 u 的 Helmholtz 方程为^[21]

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad (8)$$

式中 $k = \omega/c$ 为波数。

边界条件表示为

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} && \text{on } \Gamma_D \\ \partial u / \partial n &= -j\rho\omega\bar{v}_n && \text{on } \Gamma_N \end{aligned} \quad (9)$$

式中 \bar{u} 和 \bar{v}_n 分别为对应边界上的声压和法向速度, n 为边界上的单位外法线向量, ρ 为声学介质密度。

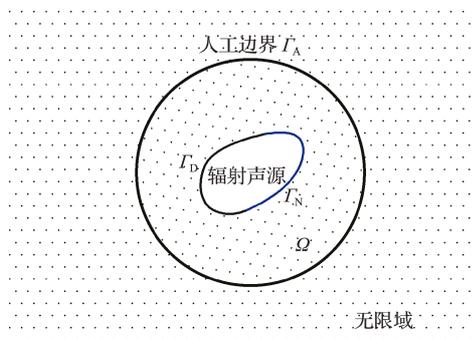


图 3 一个典型的无限域声辐射系统

Fig. 3 A typical acoustic radiator system in an infinite domain

根据运动方程,任意位置的声压 u 和声粒子速度 v 由式(10)可得

$$\nabla u = -j\rho\omega v \quad (10)$$

3.2 DtN 映射技术

在二维问题中保证波在无穷远处衰减为零的 Sommerfeld 辐射条件可表示为^[20,21]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left[\frac{\partial u(r)}{\partial r} - jku(r) \right] = 0 \quad (11)$$

式中 $r = \|\mathbf{x}\|$ 为从原点到无穷远处的距离。

本文选用 DtN 映射技术(一种精确无反射边界条件)来模拟无界区域^[20]。DtN 映射技术揭示了在人工边界 Γ_A 上声压 u 和声粒子速度 v 之间的关系。在二维问题中,DtN 边界的形状一般选择为半径为 R 的圆,沿该边界的压力由式(12)给出^[20]

$$u(r, \theta) = \frac{s}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)}(kR)} \cos n(\theta - \vartheta) u(R, \vartheta) d\vartheta \quad (12)$$

式中 $H_n^{(1)}$ 代表第一类 n 阶 Hankel 函数, s 为常数,且当 $n = 0$ 时, $s = 0.5$, 当 $n \neq 0$ 时, $s = 1$ 。

将微分方程(11)对距离 r 求导,可以得到

$$\frac{\partial u(r, \theta)}{\partial n} \Big|_{r=R} = - \sum_{n=0}^{\infty} s \int_0^{2\pi} m_n(\theta - \vartheta) u(R, \vartheta) d\vartheta \quad (13)$$

式中 DtN 核 $m_n(\theta - \vartheta)$ 由式(14)给出

$$m_n(\theta - \vartheta) = - \frac{k}{\pi} \frac{H_n^{(1)'}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)} \cos n(\theta - \vartheta) \quad (14)$$

结合式(10~13),式(12)可以表示为

$$\partial u / \partial n = -Mu \quad \text{on } \Gamma_A \quad (15)$$

式中 M 为在边界 Γ_A 上声压 u 和声粒子速度之间的关系。

3.3 Helmholtz 方程的伽辽金弱形式

如图 3 所示,人工边界 Γ_A 将原始无界域截断

为有界计算域 Ω 。引入 DtN 映射技术后, Helmholtz 方程的伽辽金弱形式可以通过加权残差法^[1]得到,在该方法中,方程(1)的残差乘以与插值形函数相同的权函数 w ,然后在问题域上积分

$$-\int_{\Omega} w(\nabla^2 u + k^2 u) d\Omega = 0 \quad (16)$$

通过分部积分,并代入边界条件,可以得到

$$\int_{\Omega} (\nabla w) \cdot \nabla u d\Omega - k^2 \int_{\Omega} w \cdot u d\Omega + j\rho\omega \int_{\Gamma_N} w \cdot v_n d\Gamma + \int_{\Gamma_A} w M p d\Gamma = 0 \quad (17)$$

4 数值试验

通过两个数值实例验证 mRPIM 在二维水下声辐射问题中的优势,包括水下无限长圆柱的声辐射以及 Benchmark 标准潜艇模型中纵剖面的声辐射。使用如下 H^1 误差来评判数值解精度^[1]

$$e = \frac{\sqrt{\int_{\Omega} (v^{*ext} - v^{*h})^T (v^{ext} - v^h) d\Omega}}{\sqrt{\int_{\Omega} (v^{*ext})^T v^{ext} d\Omega}} \quad (18)$$

式中 v^{*ext} 和 v^{*h} 分别为声速精确解 v^{ext} 和声速数值解 v^h 的复共轭。

4.1 无限长圆柱声辐射

研究一个半径为 a 的无限长圆柱声辐射问题,如图 4 所示。由于 z 轴方向的尺寸远大于其他方向的尺寸,且变量沿 z 轴方向不变,因此原三维问题可以简化为二维问题。考虑圆柱 n 阶振动模式,该问题的解析解可由式(19)得到^[21]

$$u(r, \theta) = \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)}(ka)} \cos(n\theta) \quad (19)$$

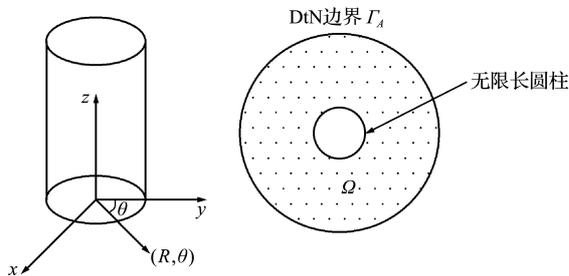


图 4 无限长圆柱声辐射问题
Fig. 4 Pure harmonic radiation from an oscillating cylinder

在该问题中,取圆柱和圆形 DtN 边界的半径分别为 0.5 m 和 2 m。在圆柱边界上施加诺依曼边界条件。采用网格的平均节点间距为 $d_c = 0.093$ m,如图 5 所示。根据经验法则^[2],FEM 的计算波数应小于 $k = 10.7$,才能获得满意的求解精度。

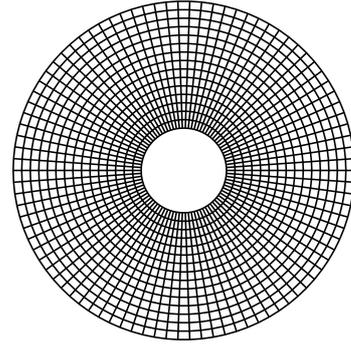


图 5 无限长圆柱声辐射模型的网格
Fig. 5 Employed mesh for the infinite cylinder

图 6 分别给出了计算波数 $k=4$ 和 8 时的辐射声压指向性(即距圆柱声学中心 1 m 处的声压幅值分布)。其中,Exact 表示由式(19)得到的精确解;FEM,RPIM 和 mRPIM 分别表示由有限元法、标准径向基点插值法和改进径向基点插值法获得的数值解。对于相对较低的波数,三种方法的计算结果均能与精确解保持一致。当波数增加到 $k=8$ 时,FEM 得到的结果可见较大误差,与 FEM 和标准 RPIM 相比,mRPIM 可以得到最精确的数值解。

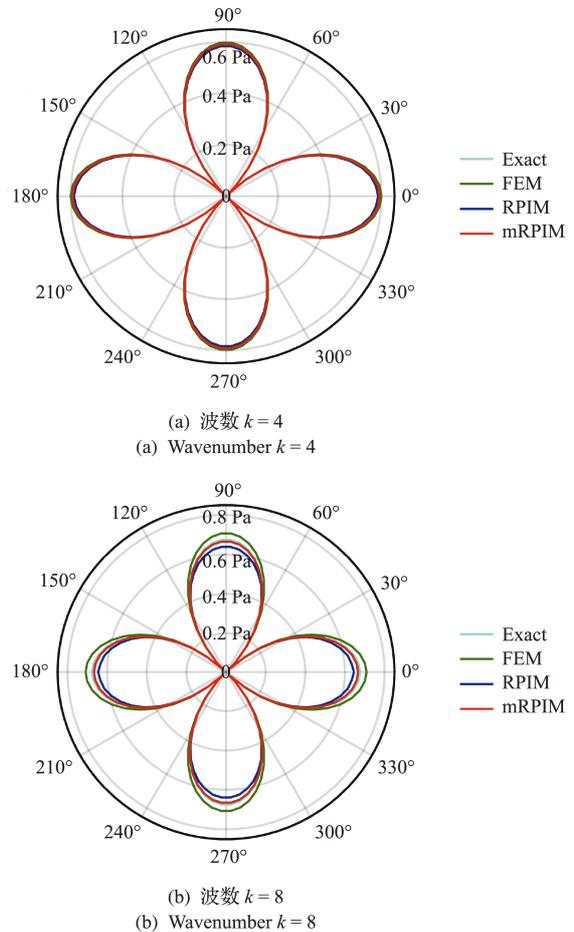


图 6 无限长圆柱辐射声压指向性
Fig. 6 Directivity patterns of the acoustic radiation pressures by the oscillating cylinder at different wavenumbers

图 7 给出了当平均节点间距为 $d_c = 0.047$ m 时,相对误差 e 随计算频率的变化。根据经验法则,在声学分析中,离散空间尺度与计算波数相关,故而横坐标取无量纲波数 kd_c 。三种方法的数值误差均随着计算频率的增加而增加,当 FEM 和标准 RPIM 的计算频率分别大于 $kd_c = 0.35$ 和 $kd_c = 0.7$ 时,相对误差超过 10%,而 mRPIM 总能得到较高的计算精度,并且这种计算优势在高频时更加突出。

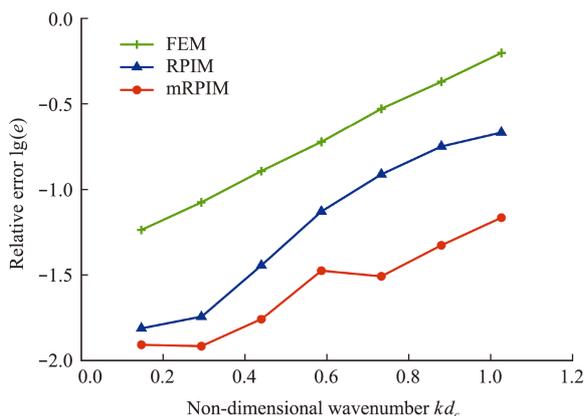


图 7 相对误差 e 随无量纲波数 kd_c 的变化

Fig. 7 Relationship between the numerical errors and the computational wavenumbers

图 8 给出了三种方法的收敛性曲线。三种方法的相对误差均随着网格的细化而逐渐降低并趋于零,说明三种方法均收敛。但从曲线斜率来看, mRPIM 的收敛速度要高于 FEM 和标准 RPIM。

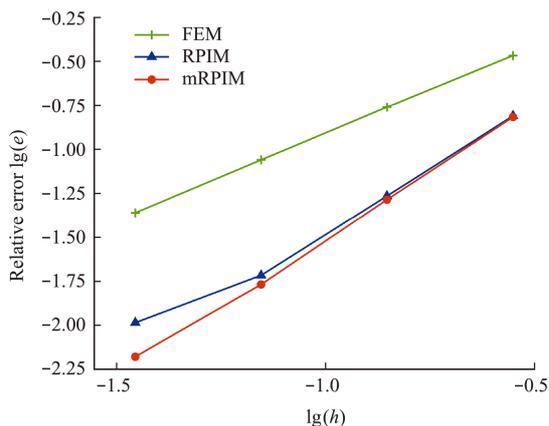


图 8 收敛性曲线

Fig. 8 Convergence curve

由于无网格方法使用了比 FEM 更多的节点构造形函数,因此在使用相同节点分布情况下,无网格方法的条件数和计算成本往往要高于 FEM。图 9 给出了本文用三种方法的条件数与计算误差之间的关系。可以看出,要获得相同的计算精度, mRPIM 的条件数小于 FEM 和标准 RPIM。

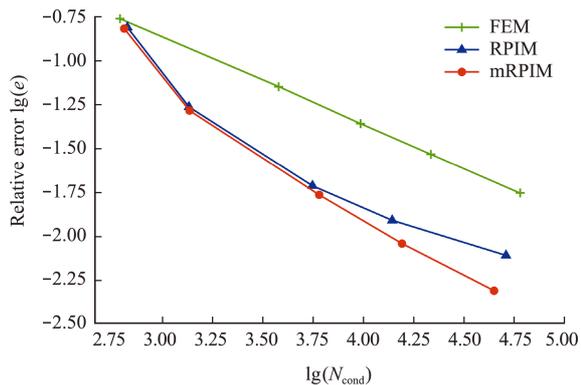


图 9 条件数与计算误差之间的关系

Fig. 9 Relationship between condition number and calculation error

图 10 给出了计算时间与相对误差的关系。可以看出,要获得相同的计算精度, mRPIM 需要的求解时间小于 FEM 和标准 RPIM,即 mRPIM 的计算效率最高。

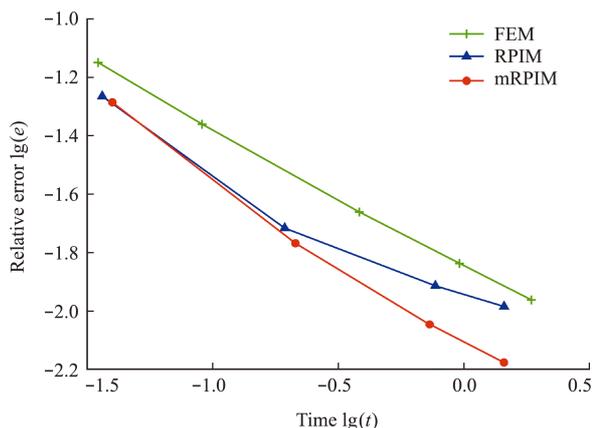


图 10 计算时间与相对误差的关系

Fig. 10 Relationship between the computational time and the relative numerical errors

4.2 潜艇中纵剖面声辐射

本节研究潜艇的声辐射问题。该模型取自德国 FWG 机构提出的用于模拟潜艇水下回波特性标准的 BeTSSi-Sub 模型^[22],如图 11 所示。为简化问题模型,省略了尾舵和附体等结构,并将结构总长度设置为 1 m,如图 12 所示。同时为简化问题描述,在艏部定义为诺伊曼边界条件(如红线所示),而其他部分定义为声学刚性边界,控制方程仍为式(17)。在实际计算中,人工边界半径设置为 2 m,平均节点间距为 $d_c = 0.037$ m,表示该节点分布的合理计算波数不应超过 $k = 26.9$ 。由于难以得到该问题的理论解,并且理论证明^[23],可以采用很密的网格(即以相对较高的计算成本)通过 FEM 获得问题的参考解。本文使用的致密网格节点间距为 $d_c = 0.011$ m。

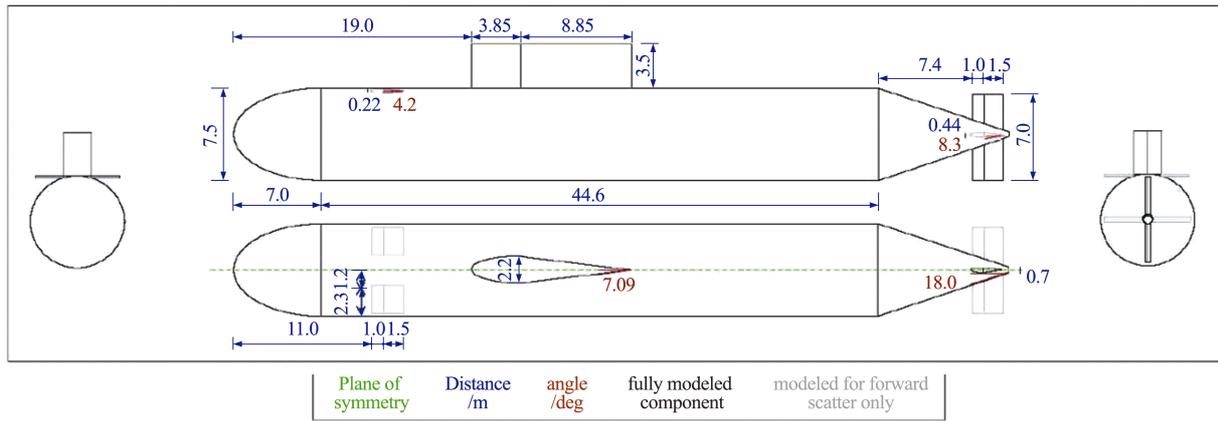


图 11 标准 BeTSSi-Sub 潜艇模型
Fig. 11 Standard BeTSSi-Sub submarine model

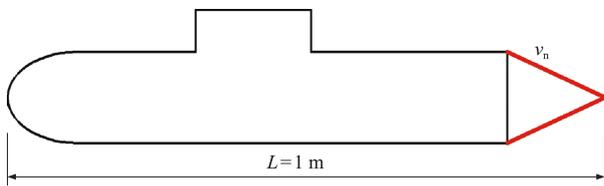


图 12 简化模型
Fig. 12 Simplified submarine model

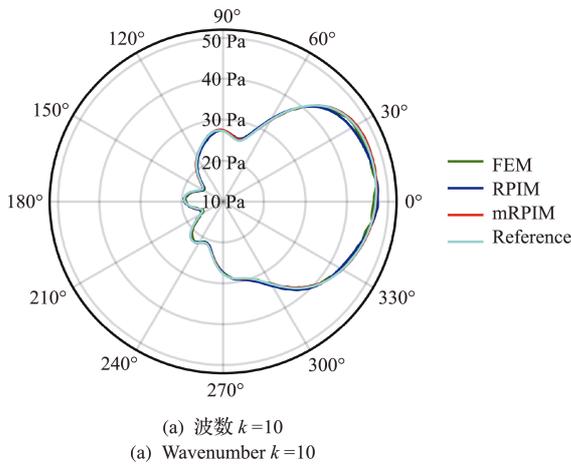


图 13 给出了计算波数为 $k=10$ 和 20 时的辐射声压指向性。可以看出,当计算波数较低时,三种方法均能得到与参考解相一致的结果。当波数增加到 $k=20$ 时,FEM 和 RPIM 计算结果存在较大误差,均无法准确描述辐射声场,而 mRPIM 仍然能与参考解保持一致,表明 mRPIM 在求解复杂声学问题时有较大优势。

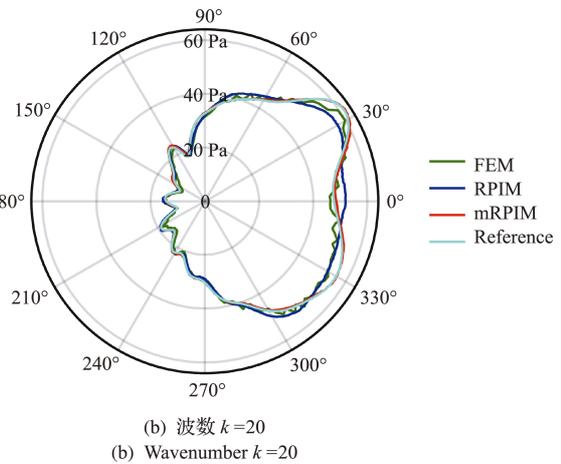


图 13 潜艇中纵剖面辐射声压指向性
Fig. 13 Directivity patterns of the acoustic radiation pressures by the submarine structure at different wavenumbers

5 结 论

本文提出一种改进径向基点插值法用于二维水下声辐射问题的研究。在改进方法中,使用了一种简单而有效的节点选取方案用于构造插值形函数,即一个单元内的所有积分点共用一个相同的支持域,该支持域是使用背景积分单元的中心点构建的。该方案可以使得同一背景积分单元内的被积函数连续可微,从而显著降低积分误差和数值频散误差,提高声学分析中的计算精度和效率。为了处理无限水域,本文采用了 DtN 映射技术将问题域截断为有限计算域。数值算例表明,mRPIM 能有效地提高标准 RPIM 在水下声辐射问题中的计算

精度和收敛速度,并且计算效率远高于传统有限元法。

参考文献(References):

- [1] Bathe K J. *Finite Element Procedures* (2nd Edition) [M]. Prentice Hall:2014.
- [2] Chai Y B, You X Y, Li W. Dispersion reduction for the wave propagation problems using a coupled “FE-Meshfree” triangular element[J]. *International Journal of Computational Methods*,2020,**17**(9):1950071.
- [3] 齐 钰,分层介质散射问题的自适应完全匹配层方法 [D]. 北京邮电大学,2019. (QI Yu. An Adaptive Complete Matched Layer Method for Scattering Problem

- in Layered Media[D]. Beijing University of Posts and Telecommunications, 2019. (in Chinese))
- [4] 柴应彬. 基于光滑有限元法的二维和三维声学问题数值模拟研究[D]. 华中科技大学, 2014. (CHAI Ying-bin. Study on the Numerical Simulation of 2D and 3D Acoustic Problems Based on Smoothed Finite Element Methods[D]. Huazhong University of Science and Technology, 2014. (in Chinese))
- [5] 何智成. 汽车中频 NVH 高效高精度计算理论与方法[D]. 湖南大学, 2014. (HE Zhi-cheng. Computing Theory and Methods for Vehicle Mid-Frequency Vibration and Noise with High Efficiency and Precision [D]. Hunan University, 2014. (in Chinese))
- [6] Gui Q, Zhang G Y, Chai Y B, et al. A finite element method with cover functions for underwater acoustic propagation problems[J]. *Ocean Engineering*, 2022, **243**:110174.
- [7] Chai Y B, Bathe K J. Transient wave propagation in inhomogeneous media with enriched overlapping triangular elements[J]. *Computers & Structures*, 2020, **237**:106273.
- [8] 祝家麟, 袁政强. 边界元分析[M]. 北京: 科学出版社, 2009. (ZHU Jia-lin, YUAN Zheng-qiang. *Boundary Element Analysis*[M]. Beijing: Science Press, 2009. (in Chinese))
- [9] 郑昌军, 高海峰, 杜磊, 等. 边界元特征值分析及 Burton-Miller 法探究[J]. 计算力学学报, 2016, **33**(3): 335-342. (ZHENG Chang-jun, GAO Hai-feng, DU Lei, et al. BEM eigenvalue analysis and the investigation of the Burton-Miller method [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2016, **33**(3): 335-342. (in Chinese))
- [10] Liu G R, Gu Y T. 无网格法理论及程序设计[M]. 王建国, 周学军, 译. 济南: 山东大学出版社, 2007. (LIU G R, GU Y T. *An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming*[M]. WANG Jian-ming, ZHOU Xue-jun, translated. Jinan: Shandong University Press, 2007. (in Chinese))
- [11] 徐有运. 基于单元基光滑点插值法的船舶外场声学研究[D]. 大连理工大学, 2020. (XU You-yun. Study on Exterior Acoustic of Ships Based on the Cell-based Smoothed Point Interpolation Method [D]. Dalian University of Technology, 2020. (in Chinese))
- [12] 李莹, 夏茂辉, 董凯. 无网格局部径向点插值法求解 Helmholtz 方程[J]. 郑州大学学报(理学版), 2012, **44**(4): 26-30 (LI Ying, XIA Mao-hui, DONG Kai. A meshless local radial point interpolation method for the helmholtz equation [J]. *Journal of Zhengzhou University* (Natural Science Edition), 2012, **44**(4): 26-30. (in Chinese))
- [13] You X Y, Li W, Chai Y B. A truly meshfree method for solving acoustic problems using local weak form and radial basis functions[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2020, **365**:124694.
- [14] 轩建平, 翟康, 李锐. 有限球法及其应用[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2016, **44**(8): 115-120. (XUAN Jian-ping, ZHAI Kang, LI Rui. The method of finite spheres and its application[J]. *Journal of Huazhong University of Science and Technology* (Natural Science Edition), 2016, **44**(8): 115-120. (in Chinese))
- [15] 吴迪, 李小林. 时间分数阶扩散波方程的无单元 Galerkin 法分析[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(2): 215-223. (WU Di, LI Xiao-lin. An element-free Galerkin method for time-fractional diffusion-wave equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(2): 215-223. (in Chinese))
- [16] Wang F J, Zhao Q H, Chen Z T, et al. Localized Chebyshev collocation method for solving elliptic partial differential equations in arbitrary 2D domains [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2021, **397**: 125903.
- [17] You X Y, Gui Q, Zhang Q F, et al. Meshfree simulations of acoustic problems by a radial point interpolation method [J]. *Ocean Engineering*, 2020, **218**: 108202.
- [18] 桂强. 二维水下声学问题的改进径向点插值无网格法研究[D]. 华中科技大学, 2020. (GUI Qiang. Research on a Modified Radial Point Interpolation Meshfree Method for Two-Dimensional Underwater Acoustic Problems[D]. Huazhong University of Science & Technology, 2020. (in Chinese))
- [19] Qu J, Dang S N, Li Y C, et al. Analysis of the interior acoustic wave propagation problems using the modified radial point interpolation method (M-RPIM)[J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2022, **138**:339-368.
- [20] Grote M J, Keller J B. On nonreflecting boundary conditions[J]. *Journal of Computational Physics*, 1995, **122**(2): 231-243.
- [21] 程建春. 声学原理[M]. 北京: 科学出版社, 2012. (CHENG Jian-chun. *Acoustics Principle*[M]. Beijing: Science Press, 2012. (in Chinese))
- [22] Nell C W, Gilroy L E. An Improved Basis Model for the BeTSSi Submarine[R]. DRDC Atlantic TR, 2003.
- [23] Ihlenburg F, Babuska I. Finite element solution of the Helmholtz equation with high wave number. Part I: The h version of the FEM [J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 1995: 9-37.

A modified radial point interpolation method for the analysis of underwater acoustic radiation problems

GUI Qiang¹, SUN Lei¹, YOU Xiang-yu², CHAI Ying-bin³, LI Wei^{*1,4,5}

(1. School of Naval Architecture and Ocean Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China;

2. School of Hydraulic and Environmental Engineering, Changsha University of Science & Technology, Changsha 410114, China;

3. School of Naval Architecture, Ocean and Energy Power Engineering, Wuhan University of Technology, Wuhan 430063, China;

4. Hubei Key Laboratory of Naval Architecture and Ocean Engineering Hydrodynamics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China;

5. Collaborative Innovation Center for Advanced Ship and Deep-Sea Exploration (CISSE), Shanghai 200240, China)

Abstract: The radial point interpolation method (RPIM), a typical meshless technique, outperforms the classic finite element method (FEM) in suppressing the numerical dispersion errors and generating more accurate solutions using the same node distributions in acoustic analyses. In this work a modified node selection scheme for the construction of shape functions is developed and the proposed method is termed the modified RPIM (mRPIM). This scheme employs a simple and effective form which makes the integrand inside an identical background cell compatible. Thus, the integration error is significantly reduced and the solution accuracy is improved. Meanwhile, the Dirichlet-to-Neumann (DtN) mapping technique is utilized to make the infinite domain a bounded computational domain and the Sommerfeld radiation condition can be satisfied. Numerical experiments show that the proposed mRPIM can yield more accurate solutions and be more efficient than the standard FEM and the standard RPIM, and is promising in solving underwater acoustic radiation problems.

Key words: radial point interpolation method; underwater acoustic radiation problems; DtN mapping; infinite domain; meshless technique

引用本文/Cite this paper:

桂 强,孙 磊,游翔宇,等. 二维水下声辐射问题的改进径向基点插值法研究[J]. 计算力学学报, 2024, 41(2): 344-351.

GUI Qiang, SUN Lei, YOU Xiang-yu, et al. A modified radial point interpolation method for the analysis of underwater acoustic radiation problems[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2024, 41(2): 344-351.