

DOI: 10.7511/jslx20220722001

基于 Fourier-TOuNN 的鲁棒性拓扑优化设计

高兴军¹, 李隆华¹, 李颖雄^{*2}

(1. 广东工业大学 土木与交通工程学院, 广州 510006; 2. 西南交通大学 智慧城市与交通学院, 成都 611756)

摘要:为推广拓扑优化设计方法的工程应用,需要在设计过程中考虑结构鲁棒性以应对实际工程荷载的随机性。本文基于神经网络提出了鲁棒性结构拓扑优化设计的高效方法。该方法通过优化 Fourier-TOuNN 神经网络的权值更新描述结构拓扑的密度变量,并引入随机荷载下结构柔顺度平均值和标准差的加权总和作为目标函数,从而定义了随机荷载下的结构鲁棒性优化问题。利用神经网络的自动反向微分功能,实现了优化过程中灵敏度的直接求解。借助 Fourier-TOuNN 细部尺寸可控特性,可在结构中生成细小支撑以抵抗随机荷载。数值算例表明,采用本文提出的方法可以高效地获得鲁棒性稳健的优化设计结果。

关键词:拓扑优化;鲁棒性设计;随机荷载;神经网络;傅里叶投影

中图分类号:O342

文献标志码:A

文章编号:1007-4708(2024)02-0241-07

1 引言

拓扑优化旨在给定设计域内寻找材料最优分布,使结构满足约束条件的同时具有最佳性能。目前拓扑优化领域内已有多种方法,如变密度法^[1]、参数化水平集法^[2]、可变形移动组件法^[3]以及渐进结构优化法^[4]等。

确定性拓扑优化设计已取得了诸多研究成果^[5-7]。然而,实际工程结构所受荷载通常具有不确定性。微小的荷载扰动可能会导致确定性优化设计的结构性能急剧下降。鲁棒性设计可以提升结构对荷载扰动的适应能力。在拓扑优化中考虑荷载不确定性^[8-10]具有重要的工程意义。

蒙特卡洛模拟是解决荷载不确定问题的有效方法之一,然而计算量通常较大。根据结构线弹性理论,将蒙特卡洛采样与拓扑优化迭代过程分离^[11],可以降低迭代过程的计算成本,并且可应用于多材料结构优化^[12]和多尺度优化设计^[13]。

传统拓扑优化方法可以实现精细化设计,但消耗时间会随单元数目增多显著增长,利用人工智能算法可以加速优化迭代过程,实现跨分辨率拓扑优化设计^[14]。将神经网络与拓扑优化框架融合,是当前研究热点之一^[15]。最近,Chandrase 等^[16]发展了 TOuNN (Topology Optimization using Neural

Network),构建了单元中心坐标与密度之间的映射关系,采用神经网络内置优化器更新权值及单元密度。利用权值实现高分辨率采样,利用神经网络反向自动求微分特性确定目标函数及约束函数灵敏度,利用傅里叶空间投影^[17] (Fourier-TOuNN)控制最小及最大长度,提升设计结果细部构造。

鲁棒性拓扑优化设计研究^[11-13]表明,优化算法会在结构主要传力路径之外生成细小支撑抵抗荷载扰动。Fourier-TOuNN 丰富结构细节的特性契合该类设计需求。此前基于 Fourier-TOuNN 的研究集中于确定性设计,本文使用 Fourier-TOuNN 解决随机荷载作用下鲁棒性优化设计问题,发展高效求解算法,讨论不同情况下荷载随机性对优化设计结果的影响,验证其在鲁棒性设计中的效率及有效性。

2 理论模型与优化方法

2.1 优化模型建立

利用固体各向同性材料惩罚 SIMP (Solid Isotropic of Material Penalization) 模型求解拓扑优化问题时,通常会在设计域内有限元网格上定义伪密度 $\rho(x) \in (0, 1]$, 并采用指数 p 惩罚中间密度单元的材料弹性模量,然后使用最优准则法或者移动渐近线等优化器更新设计变量,获得密度趋于 0~1 分布的清晰拓扑优化设计。

利用 Fourier-TOuNN 方法求解拓扑优化问题也需在设计域内所有坐标上定义伪密度 ρ , 但是 ρ 是用全连接神经网络 NN (Neural Network) 表示,

收稿日期: 2022-07-22; 修改稿收到日期: 2022-09-01.

基金项目: 国家自然科学基金(51808135); 中央高校基本科研业务费专项资金(2682022CX072)资助项目.

作者简介: 李颖雄*(1988-), 男, 博士, 助理研究员
(E-mail: liyingxiong@swjtu.edu.cn).

并由神经网络中权值控制。如图1所示, Fourier-TOuNN 网络结构包括输入层、隐藏层和输出层。输入层输入离散后经过傅里叶投影的单元中心坐标;隐藏层包括线性层、归一化层和 RELU 激活函数;输出层输出坐标点密度值。研究表明^[17], Fourier-TOuNN 隐藏层层数过多会导致长度频率扩散,引起迭代振荡难以收敛,故本文神经网络隐藏层只有一层。输出层作为最后一层,使用 softMax 函数,确保输出密度值为 $0 \sim 1$ 。

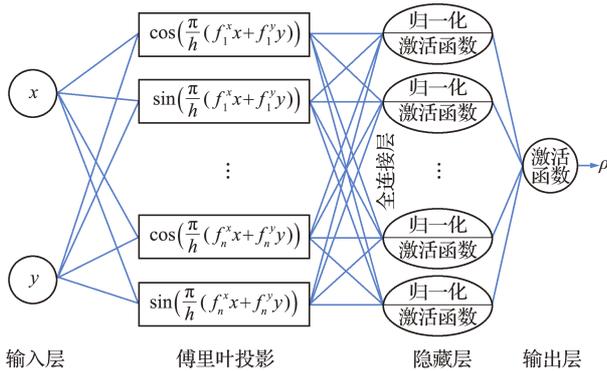


图1 Fourier-TOuNN 神经网络模型
Fig. 1 Neural network model of the Fourier-TOuNN

基于 Fourier-TOuNN 方法以结构柔顺度最小为目标的拓扑优化设计问题可以表示为

$$\begin{aligned} \min C(\omega, \rho_e) &= \mathbf{u}^T \mathbf{K}(\omega, \rho_e) \mathbf{u} \\ \text{s.t. } \mathbf{K}(\omega, \rho_e) \mathbf{u} &= \mathbf{f} \\ \sum_e \rho_e(\omega) v_e &\leq V^* \end{aligned} \quad (1)$$

式中 C 为柔顺度值, \mathbf{u} 为位移向量, \mathbf{K} 为结构单元刚度矩阵, \mathbf{f} 为施加的荷载, ω 为神经网络全连接层中的权值, ρ_e 为第 e 个元素的密度, v_e 为单元体积, V^* 为设定的体积分数。

本文采用随机变量来描述荷载不确定性,考虑材料体积约束,用均值和标准差表示结构响应,将两者加权和作为目标函数。基于 Fourier-TOuNN 方法考虑荷载不确定性的鲁棒性拓扑优化列式可表述为

$$\begin{aligned} \text{Min } J &= \mu(C_\Omega) + \beta \sigma(C_\Omega) \\ \text{s.t. } \mathbf{K}(\omega, \rho_e) \mathbf{U}^\gamma(\Omega) &= \mathbf{F}^\gamma(\Omega) \\ \sum_e \rho_e(\omega) v_e &\leq V^* \\ (\Omega \in \Theta, \gamma &= 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (2)$$

式中 J 为目标函数值, $\mu(C_\Omega)$ 和 $\sigma(C_\Omega)$ 为柔顺度值均值和标准差, β 为用于均值和标准差求和的权重因子, N 和 γ 分别为荷载工况总数和当前计算荷载工况, $\Omega \in \Theta$ 为在 Θ 样本空间内,不确定性问题对任意 Ω 都满足平衡方程。

2.2 目标函数

采用蒙特卡洛抽样考虑荷载幅值和方向不确定性。将作用在结构上的 N 个具有幅值和方向不确定性的荷载 $\mathbf{F}_k(\Omega)$ ($k = 1, 2, \dots, N$) 分别分解为水平方向和竖直方向上的荷载分量 f_{2k-1} 和 f_{2k} 。定义 $\xi_i(\Omega)$ 表示随机荷载的分量为

$$\begin{aligned} \xi_{2k-1}(\Omega) &= h_k(\Omega) \cos(\theta_k(\Omega)) \\ \xi_{2k}(\Omega) &= h_k(\Omega) \sin(\theta_k(\Omega)) \end{aligned} \quad (3)$$

式中 h_k 和 θ_k 分别为荷载 \mathbf{F}_k 的幅值和方向角。由式(3)可将作用在结构上的不确定荷载向量表示为水平和竖直方向上单位荷载的组合,根据结构线性叠加原理可描述其引起的结构位移,即

$$\mathbf{F}(\Omega) = \sum_{i=1}^{2N} \xi_i(\Omega) \mathbf{f}_i, \quad \mathbf{U}(\Omega) = \sum_{i=1}^{2N} \xi_i(\Omega) \mathbf{u}_i \quad (4)$$

式中 \mathbf{u}_i 表示荷载 \mathbf{f}_i 作用下的位移向量。由式(4)可计算不确定荷载作用下的结构柔顺度为

$$\begin{aligned} C_\Omega &= \mathbf{F}^T(\Omega) \mathbf{U}(\Omega) = \sum_{i,j=1}^{2N} \xi_i(\Omega) \xi_j(\Omega) \mathbf{f}_i^T \mathbf{u}_j = \\ &= \sum_{i,j=1}^{2N} \xi_i(\Omega) \xi_j(\Omega) C_{ij} \end{aligned} \quad (5)$$

式中 C_{ij} 为 \mathbf{f}_i 和 \mathbf{u}_j 的内积。柔顺度均值和方差的表达式分别为

$$\mu(C_\Omega) = E\left(\sum_{i,j=1}^{2N} \xi_i(\Omega) \xi_j(\Omega) C_{ij}\right) = \sum_{i,j=1}^{2N} \xi_{ij} C_{ij} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(C_\Omega) &= E(C_\Omega^2) - [E(C_\Omega)]^2 = \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^{2N} (\xi_{ijkl} - \xi_{ij} \xi_{kl}) C_{ij} \end{aligned} \quad (7)$$

式中 ξ_{ij} 和 ξ_{ijkl} 分别为随机变量二阶矩和四阶矩,

$$\xi_{ij} = E(\xi_i(\Omega) \xi_j(\Omega))$$

$$\xi_{ijkl} = E(\xi_i(\Omega) \xi_j(\Omega) \xi_k(\Omega) \xi_l(\Omega)) \quad (8)$$

由式(6,7)可知,柔顺度 C_{ij} 和 $\xi_i(\Omega)$ 彼此独立。因此,可将不确定分析分解为两个步骤^[8], (1) 大规模蒙特卡洛抽样; (2) 多荷载工况下的结构确定性分析。确定了结构柔顺度均值和标准差后,引入权重系数 β , 可以构建综合考虑这两个因素的目标函数,具体表达式为

$$J = \mu(C_\Omega) + \beta \sigma(C_\Omega) \quad (9)$$

2.3 损失函数

本文拓扑优化数学模型是单约束下目标函数最小化问题,可以将式(2)转化为无约束优化问题,并使用 Pytorch 内置 Adam 优化器更新权值和设计,其中损失函数定义为

$$L(\omega) = \sum_e \rho_e^\beta J_e / J_0 + \alpha \left(\sum_e \rho_e v_e / V^* - 1 \right)^2 \quad (10)$$

式中 α 为惩罚参数, J_0 为缩放因子,可取结构初始

设计(单元密度 $\rho_e = V^*$)的结构柔顺度值。

2.4 灵敏度分析

根据链式法则,可以计算损失函数对设计变量 ω_i 的灵敏度为

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_i} = \sum_e \frac{\partial L}{\partial \rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial \omega_i} \quad (11)$$

由于神经网络反向传播时可以自动微分,故灵敏度分析可以通过神经网络自动进行,不需额外计算。损失函数对神经网络权值的灵敏度可表示为

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_i} = -\frac{p}{J_0} \left(\sum_e \rho_e^{p-1} J_e \frac{\partial \rho_e}{\partial \omega_i} \right) + \frac{2\alpha}{V^*} \left(\sum_k \rho_k v_k / V^* - 1 \right) \sum_e \frac{\partial \rho_e}{\partial \omega_i} v_e \quad (12)$$

3 算法

基于 Fourier-TOuNN 的鲁棒性拓扑优化设计的基本求解步骤如下。

(1) 建立优化模型。定义设计域几何参数、有限元网格、材料特性和位移边界条件,搭建神经网络 NN,定义体积分数 V^* 、长度控制范围值 l_{\min} 和 l_{\max} 以及柔顺度缩放系数 J_0 等。

(2) 蒙特卡洛模拟。生成随机样本,根据式(8)计算二阶矩 ξ_{ij} 和四阶矩 ξ_{ijkl} 。

(3) 神经网络计算。输入单元中心坐标值,利用神经网络进行傅里叶投影,经过隐藏层和输出层最终计算得到单元密度值。

(4) 有限元分析。利用式(5,9)分别计算柔顺度值和目标函数。

(5) 灵敏度分析和优化求解。利用神经网络自动微分求解灵敏度,并使用 Adam 优化器更新设计变量,无需额外增加工作量。

(6) 惩罚参数更新。材料惩罚参数和损失函数惩罚参数均采用连续增长策略,其中,材料惩罚参数更新公式为 $p_{\text{iter}+1} = \min(p_{\max}, p_{\text{iter}} + \Delta p)$, 损失函数惩罚参数为 $\alpha_{\text{iter}+1} = \min(\alpha_{\max}, \alpha_{\text{iter}} + \Delta \alpha)$ 。式中,iter 表示当前迭代数, p_{\max} 和 α_{\max} 分别为两个惩罚参数的最大值, Δp 和 $\Delta \alpha$ 为迭代增量。本文数值算例选取以下参数, $p_{\max} = 4$, $\alpha_{\max} = 100$, $\Delta p = 0.02$, $\Delta \alpha = 0.2$ 。

(7) 收敛判断。根据收敛准则判断循环是否收敛,若收敛则停止迭代,输出优化结果;否则返回至步骤(3),继续迭代。收敛判断准则为若灰色单元百分比(密度在 0.05~0.95 单元个数) $\epsilon_g = N_{\text{gray}} / N_{\text{total}}$ 小于设定值,则算法终止,本文数值算例取 $\epsilon_g^{\text{tol}} =$

0.0025。

4 数值算例

本文数值算例所用材料弹性模量 $E = 1$, 泊松比 $\mu = 0.3$ 。为避免刚度矩阵奇异,取密度下限值 $\rho_{\min} = 0.01$ 。最小迭代次数设为 100 次,最大迭代次数设为 500 次。迭代收敛后,对每个单元采用 15×15 细网格提高拓扑分辨率。蒙特卡洛模拟时抽取 10^8 个样本计算样本二阶矩 ξ_{ij} 和四阶矩 ξ_{ijkl} 。为验证提出方法的有效性,设计了对比组 RTO-OC。RTO-OC是在 88 行 MATLAB 代码^[5]基础上增加了不确定性分析模块,并采用最优准则法求解。

4.1 荷载幅值不确定性

如图 2(a)所示,设计域左端固定,右上角和右下角分别施加方向相反的竖直集中荷载。采用 60×30 矩形四节点单元离散设计域,单元尺寸为单位长度。设定材料体积分数上限值为 50%。

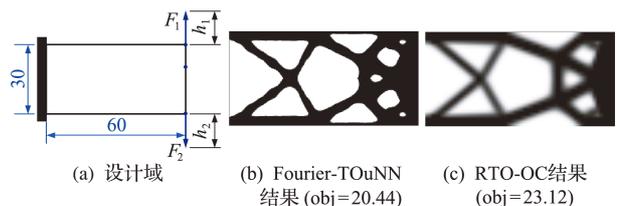


图 2 悬臂梁
Fig. 2 Cantilever beam

首先,分别利用 Fourier-TOuNN 和 RTO-OC 求解荷载幅值不确定性问题。荷载样本均值 $\mu_h = 1$ 和标准差 $\sigma_h = 0.1$ 的结果如图 2(b, c)所示。两者拓扑相似,但前者目标函数值降低了 12.87%。

Fourier-TOuNN 通过调整与局部方向正交的特征厚度(长度范围最大值、最小值和样本数量),实现结构细部尺寸的控制^[17]。取 $l_{\max} = 30$, 样本数量为 150 时,调整 l_{\min} 可以得到图 3 所示优化结果。

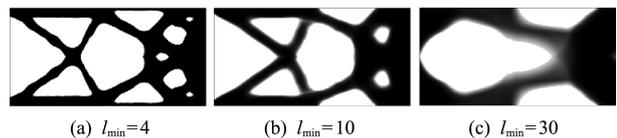


图 3 Fourier-TOuNN 在不同长度范围下的结果($L_{\max} = 30$)
Fig. 3 Results of Fourier-TOuNN with different length scale ($L_{\max} = 30$)

为了展示 Fourier-TOuNN 的计算效率,表 1 给出了两种方法处理不同规模问题时的计算时间和迭代步数。由表 1 可知,当采用精细网格即问题规模较大时,Fourier-TOuNN 计算效率高于 RTO-OC。但样本数量为 10^8 且采用粗网格时,前者计算效率略

低。这是由于采用 Python 中 Numpy 库生成随机样本及后续操作时,效率低于 MATLAB 内置函数。随着网格细化,蒙特卡洛模拟时间占比减小,迭代过程中前者计算效率优势凸显。表明 Fourier-TOuNN 在精细化设计中具有潜在的计算效率优势。

表 1 Fourier-TOuNN 和 RTO-OC 计算时间 (迭代步数) 对比

Tab.1 Comparison of the computational time (number of iteration steps) of Fourier-TOuNN and RTO-OC

样本数量	$n=10^7$		$n=10^8$	
	计算时间(迭代步数)			
网格尺寸	Fourier-TOuNN	RTO-OC	Fourier-TOuNN	RTO-OC
60×30	12.66 s (154)	13.89 s (120)	45.08 s (227)	25.43 s (120)
100×50	30.98 s (185)	37.69 s (119)	66.25 s (245)	62.08 s (190)
200×100	198.23 s (299)	221.78 s (200)	173.65 s (299)	232.59 s (200)
400×200	510.02 s (165)	716.28 s (120)	429.10 s (127)	729.14 s (120)
800×400	1592.45 s (118)	2515.61 s (95)	1361.31s (101)	2684.41 s (96)

注: Intel E5-2630 v2 CPU, 64 GB RAM。

下面研究荷载样本均值 μ_h 和标准差 σ_h 、权重因子 β 以及荷载相关系数 $\rho_{h_1 h_2}$ 对优化结果的影响。首先,设定 $\beta=1$ 和 $\rho_{h_1 h_2}=0$, 分别选取三组不同均值和标准差,得到了图 4 所示 9 种情况的优化结果,表 2 给出了相应的结构柔顺度均值和标准差。从图 4 可以看出, σ_h/μ_h 取值对拓扑设计结果有较大影响。当 σ_h/μ_h 较小时,材料主要分布到结构右侧,如图 4(d,g)所示。随着 σ_h/μ_h 增大,材料逐渐分布到结构左侧,右侧产生较多孔洞,如图 4(c,f,i)

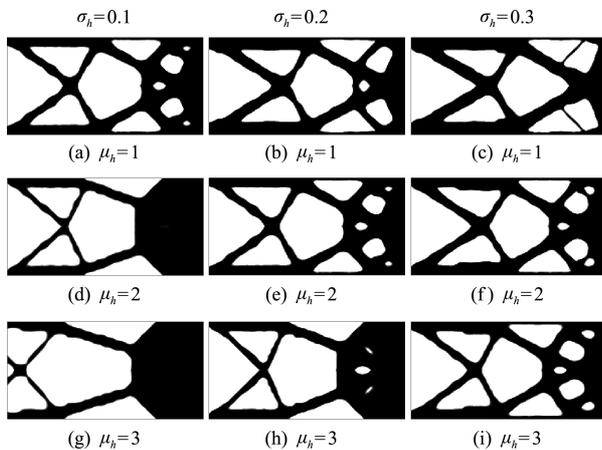


图 4 悬臂梁在荷载幅值随机性下的鲁棒性设计
Fig.4 Robust design of cantilever beams under random load amplitude

表 2 荷载幅值随机性下的柔顺度均值和标准差
Tab.2 Mean and standard deviation of compliance for different parameters of load amplitude

幅值样本均值	幅值样本方差	柔顺度均值	柔顺度标准差
$\mu_h = 1$	$\sigma_h = 0.1$	17.27	3.16
	$\sigma_h = 0.2$	22.23	9.17
	$\sigma_h = 0.3$	29.80	18.26
$\mu_h = 2$	$\sigma_h = 0.1$	63.25	5.16
	$\sigma_h = 0.2$	69.08	12.66
	$\sigma_h = 0.3$	77.59	23.14
$\mu_h = 3$	$\sigma_h = 0.1$	139.02	7.21
	$\sigma_h = 0.2$	145.74	16.89
	$\sigma_h = 0.3$	155.66	28.44

所示。这是因为 σ_h/μ_h 较小时,两个集中力的合力在竖直方向产生的弯矩较小,结构主要抵抗拉力作用。随着 σ_h/μ_h 增大,结构要抵抗的弯矩随之增大。由表 2 可知,结构柔顺度均值和标准差随着样本均值和标准差的增大而增大。表明结构抵抗荷载不确定性程度的增强以牺牲结构刚度为代价。

其次,研究相关系数 $\rho_{h_1 h_2}$ 的影响。设定 $\mu_h=1$ 和 $\sigma_h=0.1$, 选取不同 $\rho_{h_1 h_2}$ (其中, $\rho_{h_1 h_2} \in [-1, 1]$)。图 5 和表 3 分别给出了不同相关系数的优化设计及柔顺度的均值和标准差。

随着相关系数 $\rho_{h_1 h_2}$ 增大,两个力幅值相关性增强,其合力使结构产生的力矩减小。 $\rho_{h_1 h_2}=1$ 表明两个力幅值完全相同,即使不需要边界位移约束也可实现自平衡。此时拓扑设计与确定性荷载工况相同(图 5(f))。

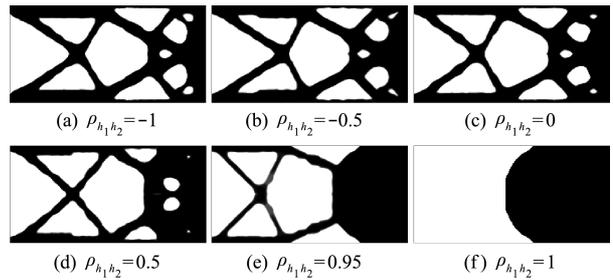


图 5 不同相关系数下悬臂梁鲁棒性设计
Fig.5 Robust design of cantilever beams under different correlation coefficients

表 3 不同相关系数下结构柔顺度均值与标准差
Tab.3 Mean and standard deviation of structural compliance with different correlation coefficients

相关系数	柔顺度均值	柔顺度标准差
-1	18.84	4.10
-0.5	18.09	3.57
0	17.27	3.16
0.5	16.39	3.02
0.95	15.42	3.00
1	14.54	2.89

4.2 荷载方向不确定性

采用集中荷载作用下的轴向受压柱研究荷载方向不确定性对优化结果的影响。如图 6(a)所示,设计域底部固定,荷载作用在结构顶部中心,其幅值为 $F=1$ 。采用 40×60 矩形四节点单元离散设计域,材料体积分数为 30%。

首先,设定荷载样本标准差 $\sigma_\theta = \pi/12$ 和权重因子 $\beta = 1$, 分别采用 Fourier-TOuNN 方法与 RTO-OC方法进行优化,其优化结果分别如图 6(b,c)所示。可以看出,两者拓扑结构相似,但前者目标函数值相比后者降低了 23.11%,证实了 Fourier-TOuNN 可以得到高质量的优化设计。

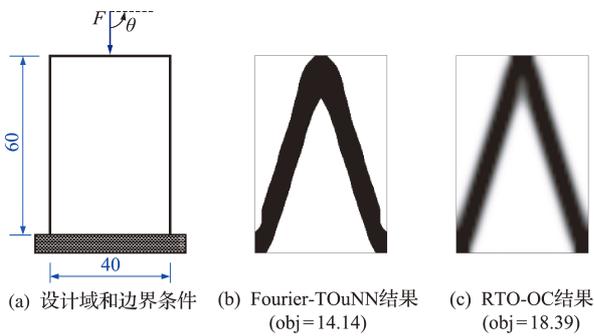


图 6 柱子受一个集中荷载

Fig. 6 Column subjected to one concentrated load

其次,研究标准差 σ_θ 和权重因子 β 对优化结果的影响。图 7 给出了 12 种工况下的拓扑设计结果。随着 σ_θ 或 β 增大,结构中间支撑的尺寸逐渐变大,以提高侧向刚度。表 4 给出了相应的结构柔顺

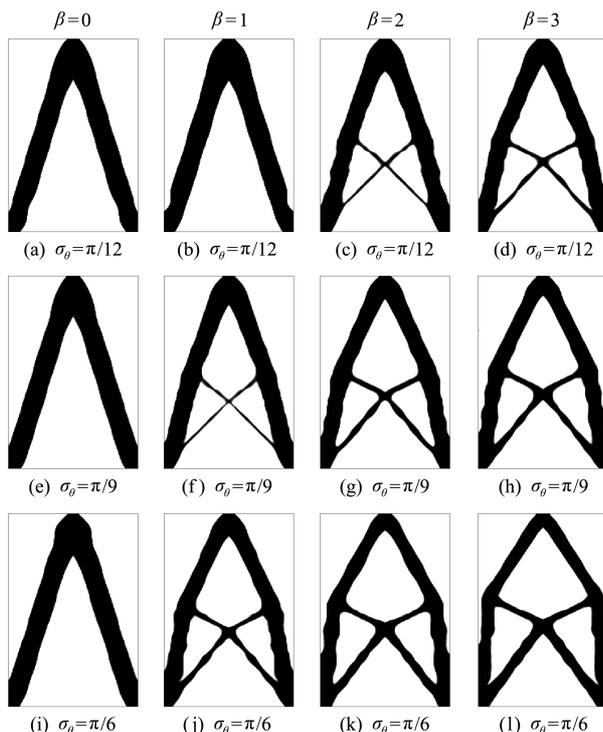


图 7 柱在荷载方向随机性下的鲁棒性设计

Fig. 7 Robust designs of the column under random load direction

表 4 荷载方向随机性下柔顺度均值和标准差

Tab. 4 Mean and standard deviation of compliance under random load direction

方向样本方差	权重因子	柔顺度均值	柔顺度标准差
$\sigma_\theta = \pi/12$	$\beta = 0$	10.09	4.03
	$\beta = 1$	10.11	4.03
	$\beta = 2$	10.65	3.74
	$\beta = 3$	11.26	3.53
$\sigma_\theta = \pi/9$	$\beta = 0$	12.09	6.43
	$\beta = 1$	12.54	5.92
	$\beta = 2$	13.56	5.52
	$\beta = 3$	14.21	5.21
$\sigma_\theta = \pi/6$	$\beta = 0$	16.95	11.01
	$\beta = 1$	17.75	9.24
	$\beta = 2$	19.52	8.47
	$\beta = 3$	21.75	7.86

度均值和标准差。当 σ_θ 不变时,随着 β 增加,结构柔顺度的标准差减小,而其均值增加。当 β 不变时,改变 σ_θ 也会引起拓扑设计变化。随着 σ_θ 增加,结构柔顺度均值和标准差均增大。这说明为了应对更高层次的荷载不确定性,结构刚度性能受到了削弱。

4.3 荷载兼具幅值和方向不确定性

采用如图 8(a)所示的细长柱来研究幅值和方向不确定性的影响。在设计区域左上角和右上角分别施加两个幅值和方向相同的集中荷载。采用 30×120 矩形四节点单元离散设计域。设定目标函数权重因子 $\beta = 3$, 体积分分数设为 30%。

首先,对比 Fourier-TOuNN 和 RTO-OC得到的优化结果。当 $\sigma_h = 0.3, \sigma_\theta = 0$ 时,两种方法的优化结果如图 8(b,c)所示。可以看出,前者水平支撑构件更为清晰,而且目标函数值比后者减小了 1.69%。

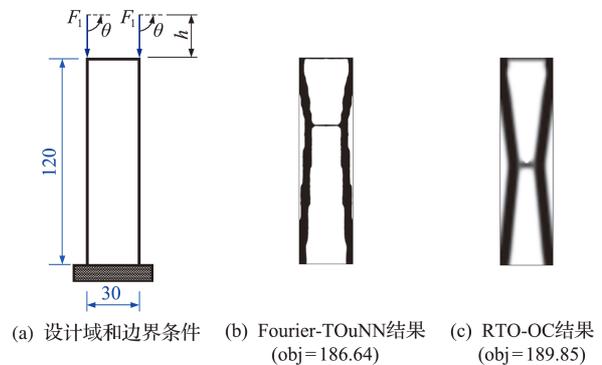


图 8 柱子受两个集中荷载

Fig. 8 A column subjected to two concentrated loads

其次,讨论幅值或方向不确定性的影响。设定 $\sigma_h = 0.3, \sigma_\theta = 0$, 以及 $\sigma_h = 0, \sigma_\theta = \pi/180$, 拓扑结果分别如图 9(a,b)所示。可以看出,这两种拓扑设

计有显著差异。

最后,讨论荷载幅值和方向混合不确定性的影响。对该算例,幅值不确定性相比方向不确定性对拓扑优化设计的影响相对较小,故设定幅值标准差 $\sigma_h=0.3$ 。荷载方向标准差则分别采取 $\sigma_\theta=\pi/180$, $\sigma_\theta=\pi/90$, $\sigma_\theta=\pi/45$,得到的拓扑设计分别如图9(c~e)所示。可以看出,设计中间有交叉横向支撑。高层框架结构常采用此类设计,以抵抗风荷载或者地震等随机荷载。表5给出了相应的柔顺度均值和标准差。结果表明,荷载幅值和方向标准差对结构拓扑构形有显著的影响,也证实利用本文方法可以得到鲁棒性稳健的优化设计。

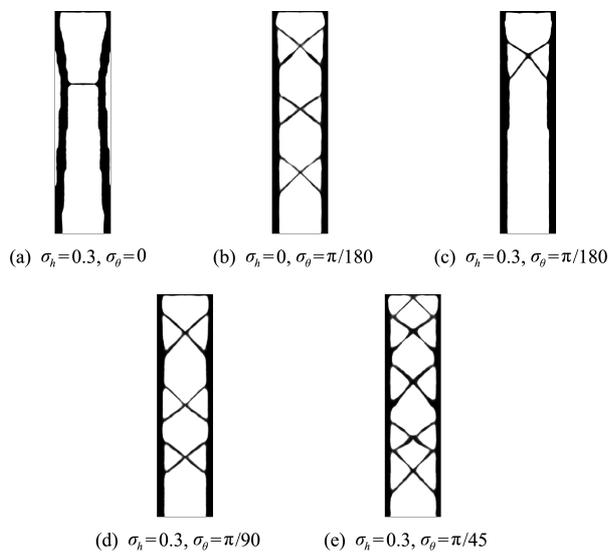


图9 柱在荷载幅值兼方向随机性下的鲁棒性设计

Fig. 9 Robust designs for random load amplitude and direction

表5 荷载幅值兼方向随机下柔顺度均值和标准差
Tab. 5 Mean and standard deviation of compliance under random load amplitude and direction

幅值样本方差	方向样本方差	柔顺度均值	柔顺度标准差
$\sigma_h=0.3$	$\sigma_\theta=0$	70.47	38.72
$\sigma_h=0$	$\sigma_\theta=\pi/180$	76.62	2.87
	$\sigma_\theta=\pi/180$	77.33	43.36
$\sigma_h=0.3$	$\sigma_\theta=\pi/90$	88.03	49.30
	$\sigma_\theta=\pi/45$	114.37	70.47

5 结 论

在拓扑优化设计中考虑随机荷载具有工程实际意义。本文基于 Fourier-TOuNN 方法研究了随机荷载作用下结构鲁棒性拓扑优化问题。与 RTO-OC 方法相比,Fourier-TOuNN 得到的优化设计具有更小的柔顺度均值和标准差。利用 Fourier-TOuNN 丰富结构细部的特性,可以在主传力路径外有效地生成支撑构件,提高优化结果的鲁棒性。

本文研究了算法中一系列参数对优化结果的影响,包括蒙特卡洛样本均值、标准差和加权和权重因子,结果表明提高结构刚度和增强其鲁棒性相互冲突,必须牺牲其中一个指标来提高另一个指标。得益于神经网络的反馈机制,可以自动高效地计算灵敏度,节省了计算成本并降低了编译难度,这将为利用该方法解决结构稳定性优化等^[18]其他需要生成细小支撑的优化设计问题提供可行途径。

参考文献(References):

- [1] Bendsoe M P, Sigmund O. Material interpolation schemes in topology optimization [J]. *Archive of Applied Mechanics*, 1999, **69**(9): 635-654.
- [2] Wei P, Li Z Y, Li X P, et al. An 88-line MATLAB code for the parameterized level set method based topology optimization using radial basis functions [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2018, **58**(2): 831-849.
- [3] Du Z L, Cui T C, Liu C, et al. An efficient and easy-to-extend Matlab code of the Moving Morphable Component (MMC) method for three-dimensional topology optimization [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2022, **65**(5): 158.
- [4] Xie Y M, Steven G P. A simple evolutionary procedure for structural optimization [J]. *Computers & Structures*, 1993, **49**(5): 885-896.
- [5] Andreassen E, Clausen A, Schevenels M, et al. Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2011, **43**(1): 1-16.
- [6] Ferrari F, Sigmund O. A new generation 99 line Matlab code for compliance topology optimization and its extension to 3D [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2020, **62**(4): 2211-2228.
- [7] Liu Y, Yang C, Wei P, et al. An ODE-driven level-set density method for topology optimization [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2021, **387**: 114159.
- [8] Liu J, Wen G L, Qing Q X, et al. Robust topology optimization for continuum structures with random loads [J]. *Engineering Computations*, 2018, **35**(2): 710-732.
- [9] Bai S, Kang Z. Robust topology optimization for structures under bounded random loads and material uncertainties [J]. *Computers & Structures*, 2021, **252**: 106569.
- [10] Kogiso N, Ahn W, Nishiwaki S, et al. Robust topology optimization for compliant mechanisms consi-

- dering uncertainty of applied loads [J]. *Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing*, 2008, **2**(1): 96-107.
- [11] Zhao J P, Wang C J. Robust topology optimization under loading uncertainty based on linear elastic theory and orthogonal diagonalization of symmetric matrices [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2014, **273**: 204-218.
- [12] Gao X J, Chen W H, Li Y X, et al. Robust topology optimization of multi-material structures under load uncertainty using the alternating active-phase method [J]. *Composite Structures*, 2021, **270**: 114065.
- [13] Cai J H, Wang C J, Fu Z F. Robust concurrent topology optimization of multiscale structure under single or multiple uncertain load cases [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2020, **121**(7): 1456-1483.
- [14] 叶红玲, 李继承, 魏南, 等. 基于深度学习的跨分辨率结构拓扑优化设计方法 [J]. 计算力学学报, 2021, **38**(4): 430-436. (YE Hong-ling, LI Ji-cheng, WEI Nan, et al. Cross-resolution acceleration design for structural topology optimization based on deep learning [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2021, **38**(4): 430-436. (in Chinese))
- [15] 阎军, 许琦, 张起, 等. 人工智能在结构拓扑优化领域的现状与未来趋势 [J]. 计算力学学报, 2021, **38**(4): 412-422. (YAN Jun, XU Qi, ZHANG Qi, et al. Current and future trends of artificial intelligence in the field of structural topology optimization [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2021, **38**(4): 412-422. (in Chinese))
- [16] Chandrasekhar A, Suresh K. TOuNN: Topology optimization using neural networks [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2021, **63**(3): 1135-1149.
- [17] Chandrasekhar A, Suresh K. Approximate length scale filter in topology optimization using Fourier enhanced neural networks [J]. *Computer-Aided Design*, 2022, **150**: 103277.
- [18] Gao X J, Li Y X, Ma H T, et al. Improving the overall performance of continuum structures: A topology optimization model considering stiffness, strength and stability [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, **359**: 112660.

Robust topology optimization of structures subjected to random loads using the Fourier-TOuNN

GAO Xing-jun¹, LI Long-hua¹, LI Ying-xiong^{*2}

(1. School of Civil and Transportation Engineering, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China;

2. Institute of Smart City and Intelligent Transportation, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China)

Abstract: To promote the engineering application of topology optimization, it is imperative to consider the randomness of structural loads often encountered in practical scenarios. In this paper, an efficient framework for robust structural topology optimization based on the neural network is developed, which updates the density variable describing the structural topology by optimizing the weights of the Fourier-TOuNN neural network. In the developed framework, the weighted sum of the mean and standard deviation of the structural compliance under random loads is introduced as the objective function, thereby defining the structural robustness under random loads. Using the automatic reverse differentiation function of the neural network, the automatic derivation of the sensitivities in the optimization process can be realized. With the controllability of local of the Fourier-TOuNN, small auxiliary components can be generated in the structure to withstand random loads. Numerical examples show that robust structural designs can be efficiently obtained by using the developed framework.

Key words: topology optimization; robust design; random load; neural networks; Fourier projection

引用本文/Cite this paper:

高兴军, 李隆华, 李颖雄. 基于 Fourier-TOuNN 的鲁棒性拓扑优化设计 [J]. 计算力学学报, 2024, **41**(2): 241-247.

GAO Xing-jun, LI Long-hua, LI Ying-xiong. Robust topology optimization of structures subjected to random loads using the Fourier-TOuNN [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2024, **41**(2): 241-247.