

基于虚拟激励法的大跨度桥梁非平稳 随机振动分析闭合解

赵岩^{*1,2}, 张亚辉¹, 林家浩¹

(1. 大连理工大学 力学与航空航天学院 工业装备结构分析优化与 CAE 软件全国重点实验室, 大连 116023;

2. 大连理工大学宁波研究院, 宁波 315016)

摘要: 针对大跨度结构考虑地面空间运动的非一致地震响应分析问题, 结合虚拟激励法, 应用傅里叶分析建立了结构非平稳随机振动响应演变功率谱分析的频域方法。建立的方法完全基于频域执行, 给出了响应演变功率谱的闭合解表达式。由于实现了确定性调制过程与随机过程的有效分离, 应用离散傅里叶变换进行计算不需要较高的采样分析频率就可以获得较好精度的数值结果。数值算例研究了某斜拉桥的考虑地面运动空间效应非平稳随机地震响应, 与通常时频分析方法进行对比, 验证了本文频域方法的正确性和有效性。

关键词: 多点输入; 非平稳; 随机振动; 虚拟激励法; 闭合解

中图分类号: O324

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2024)01-0202-07

1 引言

随机振动问题广泛存在于地震、风、波浪和空间不平顺等复杂环境载荷作用下结构和装备的设计和安全性评价中。自创建以来, 虚拟激励法作为线性随机振动分析的高效精确方法, 在桥梁抗震/抗风、车辆工程和航空航天工程等各个领域得到广泛的应用^[1,2], 成为分析随机振动问题的一种有力手段。虚拟激励法在创建和发展过程中, 得到钟万勰院士的极大关怀和大力支持, 特别是结合钟万勰院士提出的精细积分法和偶辛体系, 虚拟激励法对于非平稳问题和随机波传播问题等都给出了有效的解决途径^[3-5]。基于以往随机振动虚拟激励法处理非平稳随机振动问题的分析思路, 本文给出一种非平稳随机振动分析闭合解的求解方式。

在很多实际工程结构的抗震分析中, 地震输入通常采用一致地面激励, 即假定各支承点的地面运动是相同的。这种假定对于跨度不是很大的高层建筑或高耸结构来说, 是比较合理的。但对于大跨度桥梁、水坝和管线等空间结构, 由于地震发生时, 结构的各支承点受地震传播的行波效应、局部场地

效应和部分相关效应的影响, 各支承处输入的地面运动显著不同, 需要采用多点输入地震作用模型^[6]。早期关于大跨度多点输入地震响应分析的研究, 很多工作都建立在地面运动做为平稳随机过程假设的基础之上。实际地震观测发现, 地震发生过程中振动强度通常经历上升、平稳和下降三个阶段, 呈现出一种典型的非平稳特性。Priestley^[7]建议采用演变激励模型描述地震的非平稳特性, 由于具有比较明确的物理意义, 该模型在地震工程得到广泛的应用。对于非一致非平稳地震载荷作用下的结构响应分析, Perotti^[8]模拟地面运动为具有演变谱的非平稳随机过程, 采用随机振动方法研究了多支座大跨度结构的地震响应行为。Alderucci 等^[9]针对地面运动空间变异性对于大跨度多支承结构非平稳振动问题推导出了结构响应演变功率谱密度函数的闭合解, 研究了演变过程模型和西格玛振荡过程模型。文献[10]结合虚拟激励法与精细积分方法研究了大跨度结构非平稳(包括非均匀调制)随机地震响应的有效分析。

大跨度结构非平稳随机振动问题通常需要进行时频分析。在时频分析过程中, 需要对每一频点执行一次时域逐步积分, 如果分析的频域区间包含过多的频点, 这种方法会消耗过多计算资源。本文基于虚拟激励法从频域建立了大跨度结构多点输入非平稳振动分析的有效方法, 推导了考虑地震地面运动部分相干效应时结构响应演变功率谱的闭

收稿日期: 2023-11-08; 修改稿收到日期: 2023-12-24.

基金项目: 国家自然科学基金(11772084; U1906233); 国家重点研发计划(2017YFC0307203); 中央高校基础研究经费(DUT22ZD209)资助项目.

作者简介: 赵岩^{*}(1974-), 男, 博士, 教授
(E-mail: yzhao@dlut.edu.cn).

合解。由于实现了确定性调制过程与随机过程的分离,应用本文的方法只需要对确定性调制过程实施傅里叶分析计算,在具有较高精度的前提下,计算效率获得有效的提升。

2 非一致激励下大跨度结构运动方程

对于一个有 n_1 个地面支座和 n_2 个自由度的离散线性大跨度结构,其多点地震激励运动方程可写成如下的分块矩阵形式^[1]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{M}_{sb} \\ \mathbf{M}_{sb}^T & \mathbf{M}_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_s(t) \\ \ddot{\mathbf{x}}_b(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s & \mathbf{C}_{sb} \\ \mathbf{C}_{sb}^T & \mathbf{C}_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_s(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_b(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & \mathbf{K}_{sb} \\ \mathbf{K}_{sb}^T & \mathbf{K}_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_s(t) \\ \mathbf{x}_b(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_b(t) \end{Bmatrix} \quad (1)$$

式中 $\mathbf{x}_b(t)$ 为支座的地面强迫位移, $\mathbf{x}_s(t)$ 为结构系统所有非支座节点位移, $\mathbf{p}_b(t)$ 为地面作用于支座的力, $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{K}$ 分别为结构的质量阵、阻尼阵和刚度阵,下标 s 和 b 分别对应于结构的非支座自由度和支座自由度。对于集中质量离散化模型,质量矩阵中的交互项 $\mathbf{M}_{sb}$ 和 $\mathbf{M}_{bs}$ 为零。

在求解运动方程(1)时,可将绝对位移 $\mathbf{x}_s(t)$ 分解为拟静位移 $\mathbf{y}_s(t)$ 和动态相对位移 $\mathbf{y}_r(t)$ 两部分,即

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}_s(t) \\ \mathbf{x}_b(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_s(t) \\ \mathbf{x}_b(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_r(t) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

式中 拟静位移 $\mathbf{y}_s(t)$ 满足静力学平衡方程

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & \mathbf{K}_{sb} \\ \mathbf{K}_{sb}^T & \mathbf{K}_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_s(t) \\ \mathbf{x}_b(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_b(t) \end{Bmatrix} \quad (3)$$

由式(3)可得拟静位移 $\mathbf{y}_s(t)$ 和地面支座节点位移 $\mathbf{x}_b(t)$ 满足

$$\mathbf{y}_s(t) = -\mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{K}_{sb} \mathbf{x}_b(t) \quad (4)$$

假定阻尼力与动态相对速度 $\dot{\mathbf{y}}_r(t)$ 成正比,即在运动方程(1)中以 $\dot{\mathbf{y}}_r(t)$ 与 $\mathbf{0}$ 代替 $\dot{\mathbf{x}}_s(t)$ 与 $\dot{\mathbf{x}}_b(t)$,则运动方程(1)可改写为

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{y}}_r(t) + \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{y}}_r(t) + \mathbf{K}_s \mathbf{y}_r(t) = \mathbf{M}_s \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{K}_{sb} \ddot{\mathbf{x}}_b(t) \quad (5)$$

在多点随机地震作用下大跨度结构反应地震分析中,假定地震波按一定的水平方向传播。在地震波传播方向上,地面支座加速度 $\ddot{\mathbf{u}}_b(t)$ 可采用均匀调制演变随机过程模型进行描述,如下

$$\ddot{\mathbf{u}}_b(t) = \mathbf{G}(t) \ddot{\mathbf{u}}(t) \quad (6)$$

式中 $\mathbf{G}(t)$ 为由慢变调制函数组成的确定性对角矩阵, $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ 为零均值平稳随机加速度向量。

地面支座加速度 $\ddot{\mathbf{u}}_b(t)$ 与运动方程(5)右端加速度向量

$$\ddot{\mathbf{x}}_b(t) = \{ \ddot{\mathbf{x}}_1(t), \ddot{\mathbf{x}}_2(t), \dots, \ddot{\mathbf{x}}_{m_1}(t) \}^T \quad (7)$$

的转换关系可表示为

$$\ddot{\mathbf{x}}_b(t) = \mathbf{E} \ddot{\mathbf{u}}_b(t) \quad (8)$$

式中 $\mathbf{E}$ 为一个 $m_1 \times n_1$ 的转换矩阵。显然,当只考虑三个平动分量而不考虑转动分量时, $m_1 = 3n_1$ 。

由式(4,5,8)可分别改写为

$$\mathbf{y}_s(t) = -\mathbf{P} \mathbf{u}_b(t) \quad (9)$$

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{y}}_r(t) + \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{y}}_r(t) + \mathbf{K}_s \mathbf{y}_r(t) = \mathbf{M}_s \mathbf{P} \ddot{\mathbf{u}}_b(t) \quad (10)$$

式中 系数矩阵 $\mathbf{P}$ 为

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{K}_{sb} \mathbf{E} \quad (11)$$

3 大跨度结构非平稳随机振动分析的频域方法

3.1 结构非平稳随机输入及响应

由方程(9,10)可知,系统的非平稳随机输入为地震时地面支座运动的位移向量 $\mathbf{u}_b(t)$ 和加速度向量 $\ddot{\mathbf{u}}_b(t)$ 。在上述非平稳随机输入作用下,结构的非平稳随机位移响应,按式(2)由拟静位移 $\mathbf{y}_s(t)$ 和动态相对位移 $\mathbf{y}_r(t)$ 两部分组成。对于结构动态相对位移 $\mathbf{y}_r(t)$,其动力学控制微分方程为式(10),可由杜哈曼积分表示为

$$\mathbf{y}_r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{h}(\tau) \mathbf{M}_s \mathbf{P} \ddot{\mathbf{u}}_b(t-\tau) d\tau \quad (12)$$

式中 $\mathbf{h}(\tau)$ 为系统的脉冲响应函数矩阵,其与系统的频率响应函数矩阵 $\mathbf{H}(\omega)$ 存在傅里叶变换关系为

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \\ \mathbf{H}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{h}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \end{aligned} \quad (13)$$

大跨度结构非平稳随机振动的位移响应 $\mathbf{x}_s(t)$ 为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s(t) &= \mathbf{y}_r(t) + \mathbf{y}_s(t) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{h}(\tau) \mathbf{M}_s \mathbf{P} \ddot{\mathbf{u}}_b(t-\tau) d\tau - \mathbf{P} \mathbf{u}_b(t) \end{aligned} \quad (14)$$

3.2 结构非平稳随机振动的相关分析

进行大跨度结构非平稳随机响应的相关分析,由式(14)可知,结构位移响应 $\mathbf{x}_s(t)$ 的自相关函数为

$$\begin{aligned} E[\mathbf{x}_s(t_k) \mathbf{x}_s^T(t_l)] &= E[\mathbf{y}_r(t_k) \mathbf{y}_r^T(t_l)] + \\ &= E[\mathbf{y}_r(t_k) \mathbf{y}_s^T(t_l)] + E[\mathbf{y}_s(t_k) \mathbf{y}_r^T(t_l)] + \\ &= E[\mathbf{y}_s(t_k) \mathbf{y}_s^T(t_l)] \end{aligned} \quad (15)$$

式(15)右端项具有四个部分,分别为动态相对位移 $\mathbf{y}_r(t)$ 和拟静位移 $\mathbf{y}_s(t)$ 的自相关函数,以及两者的互相关函数。为推导方便,首先考察式(15)右端第一项结构动态相对位移 $\mathbf{y}_r(t)$ 的自相关分析,有

$$\begin{aligned} E[\mathbf{y}_r(t_k) \mathbf{y}_r^T(t_l)] &= \mathbf{R}_{y_r y_r}(t_k, t_l) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{h}(\tau_k) \mathbf{M}_s \mathbf{P} \mathbf{G}(t_k - \tau_k) E[\ddot{\mathbf{u}}(t_k - \tau_k) \times \\ &\quad \ddot{\mathbf{u}}^T(t_l - \tau_l)] \mathbf{G}^T(t_l - \tau_l) \mathbf{P}^T \mathbf{M}_s^T \mathbf{h}^T(\tau_l) d\tau_k d\tau_l \end{aligned} \quad (16)$$

令 $\bar{\tau}_k = t_k - \tau_k$, $\bar{\tau}_l = t_l - \tau_l$, 对于式(16)的平稳随机向量 $\ddot{\mathbf{u}}(t)$, 根据相关函数与功率谱密度之间的关系, 有

$$E[\ddot{\mathbf{u}}(t_k - \tau_k)(\ddot{\mathbf{u}}(t_l - \tau_l))^T] = E[\ddot{\mathbf{u}}(\bar{\tau}_k)(\ddot{\mathbf{u}}(\bar{\tau}_l))^T] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{S}_{\ddot{\mathbf{u}}}(\omega) e^{i\omega(\bar{\tau}_l - \bar{\tau}_k)} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^r \ddot{\mathbf{u}}_j^*(\omega, \bar{\tau}_k) \ddot{\mathbf{u}}_j^T(\omega, \bar{\tau}_l) \right) d\omega \quad (17)$$

式中 推导过程利用了输入激励功率谱矩阵 $\mathbf{S}_{\ddot{\mathbf{u}}}$ 的谱分解。将式(17)代入式(16), 并交换积分运算符号有

$$E[\mathbf{y}_r(t_k) \mathbf{y}_r^T(t_l)] = \mathbf{R}_{\mathbf{y}_r \mathbf{y}_r}(t_k, t_l) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^r \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \times \mathbf{h}(\tau_k) \mathbf{M}_s \mathbf{P} \mathbf{G}(t_k - \tau_k) \ddot{\mathbf{u}}_j^*(t_k - \tau_k, \omega) \ddot{\mathbf{u}}_j^T(t_l - \tau_l, \omega) \times \mathbf{G}^T(t_l - \tau_l) \mathbf{P}^T \mathbf{M}_s^T \mathbf{h}^T(\tau_l) d\tau_k d\tau_l \right) d\omega \quad (18)$$

$$\text{令 } \alpha_j(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{h}(\tau) \mathbf{M}_s \mathbf{P} \tilde{\mathbf{f}}_j(t - \tau, \omega) d\tau \quad (19)$$

式中 $\tilde{\mathbf{f}}_j(t - \tau, \omega) = \mathbf{G}(t) \mathbf{W}(\omega) \mathbf{S}_{\ddot{\mathbf{u}}}(\omega) \boldsymbol{\varphi}_j \sqrt{\lambda_j} e^{i\omega t}$

$$\mathbf{G}(t) \mathbf{W}(\omega) \mathbf{S}_{\ddot{\mathbf{u}}}(\omega) \boldsymbol{\varphi}_j \sqrt{\lambda_j} e^{i\omega t} \quad (20)$$

式中 $\boldsymbol{\varphi}_j$ 和 λ_j 为矩阵 $\mathbf{S}_{\ddot{\mathbf{u}}}$ 的谱分解特征对, $\tilde{\mathbf{f}}_j(t - \tau, \omega)$ 为虚拟激励法的虚拟激励载荷向量, 而 $\alpha_j(t, \omega)$ 为虚拟激励作用下的虚拟响应。

由此, 可得系统非平稳随机振动响应 $\mathbf{y}_r(t)$ 的互相关矩阵为

$$E[\mathbf{y}_r(t_k) \mathbf{y}_r^T(t_l)] = \mathbf{R}_{\mathbf{y}_r \mathbf{y}_r}(t_k, t_l) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^r \alpha_j^*(t_k, \omega) \alpha_j^T(t_l, \omega) \right) d\omega \quad (21)$$

对于式(15)右端的其余三部分的期望运算, 其推导过程与上述结构动态相对位移 $\mathbf{y}_r(t)$ 的自相关分析类似, 为避免繁琐, 本文直接给出最后的结果如下。

结构拟静位移响应 $\mathbf{y}_s(t)$ 的自相关函数为

$$E[\mathbf{y}_s(t_k) \mathbf{y}_s^T(t_l)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^r \beta_j^*(t_k, \omega) \beta_j^T(t_l, \omega) \right) d\omega$$

$$\beta_j(t, \omega) = \mathbf{P} \mathbf{G}(t) \tilde{\mathbf{u}}(t, \omega)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}(t, \omega) = \frac{1}{\omega^2} \sqrt{\lambda_j} \mathbf{W}(\omega) \mathbf{S}_{\ddot{\mathbf{u}}}(\omega) \boldsymbol{\varphi}_j e^{i\omega t} \quad (22)$$

结构动态相对位移响应 $\mathbf{y}_r(t)$ 和结构拟静位移响应 $\mathbf{y}_s(t)$ 的互相关函数为

$$E[\mathbf{y}_r(t_k) \mathbf{y}_s^T(t_l)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^r \alpha_j^*(t_k, \omega) \beta_j^T(t_l, \omega) \right) d\omega \quad (23)$$

结构拟静位移响应 $\mathbf{y}_s(t)$ 和结构动态相对位移响应 $\mathbf{y}_r(t)$ 的互相关函数为

$$E[\mathbf{y}_s(t_k) \mathbf{y}_r^T(t_l)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^r \beta_j^*(t_k, \omega) \alpha_j^T(t_l, \omega) \right) d\omega \quad (24)$$

利用式(20~23), 并令 $t_k = t_l = t$, 由式(15)可以获得考虑部分相干效应大跨度结构非平稳随机振动位移响应 $\mathbf{x}_s(t)$ 的方差函数

$$E[\mathbf{x}_s(t) \mathbf{x}_s^T(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^r (\alpha_j(t, \omega) + \beta_j(t, \omega))^* \times (\alpha_j(t, \omega) + \beta_j(t, \omega))^T \right) d\omega \quad (25)$$

由维纳-辛欣关系可知, 式(25)积函数正是结构位移响应 $\mathbf{x}_s(t)$ 的演变功率谱密度矩阵, 为

$$\mathbf{S}_{\mathbf{x}_s \mathbf{x}_s}(t, \omega) = \sum_{j=1}^r (\alpha_j(t, \omega) + \beta_j(t, \omega))^* \times (\alpha_j(t, \omega) + \beta_j(t, \omega))^T \quad (26)$$

进一步可以按式(27)计算结构位移响应 $\mathbf{x}_s(t)$ 的时变方差

$$\sigma^2(t) = 2 \int_0^\infty \mathbf{S}_{\mathbf{x}_s \mathbf{x}_s}(t, \omega) d\omega \quad (27)$$

3.3 演变功率谱分析的频域方法

可以看出, 通过傅里叶分析, 式(19)中虚拟响应 $\alpha_j(\omega, t)$ 可以借助于系统的频响函数 $\mathbf{H}(\bar{\omega})$ 在频域上实现计算。

考虑虚拟激励载荷向量式(20)关于时间 t 的傅里叶积分变换, 此时 ω 为常值, 有

$$\tilde{\mathbf{F}}_j(\bar{\omega}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{f}}_j(t - \tau, \omega) e^{-i\bar{\omega}t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (\sqrt{\lambda_j} \mathbf{G}(t) \mathbf{W}(\omega) \mathbf{S}_{\ddot{\mathbf{u}}}(\omega) \boldsymbol{\varphi}_j e^{i\omega t}) e^{-i\bar{\omega}t} dt = \sqrt{\lambda_j} \bar{\mathbf{G}}(\bar{\omega} - \omega) \mathbf{W}(\omega) \mathbf{S}_{\ddot{\mathbf{u}}}(\omega) \boldsymbol{\varphi}_j \quad (28)$$

$$\text{式中 } \bar{\mathbf{G}}(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}(t) e^{-i\bar{\omega}t} dt \quad (29)$$

为调制函数矩阵 $\mathbf{G}(t)$ 的傅里叶变换矩阵。

与式(28)相应的逆傅里叶变换为

$$\tilde{\mathbf{f}}_j(t - \tau, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{F}}_j(\bar{\omega}, \omega) e^{i\bar{\omega}t} d\bar{\omega} = \frac{\sqrt{\lambda_j}}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\mathbf{G}}(\bar{\omega} - \omega) e^{i\bar{\omega}t} d\bar{\omega} \right) \mathbf{W}(\omega) \mathbf{S}_{\ddot{\mathbf{u}}}(\omega) \boldsymbol{\varphi}_j \quad (30)$$

利用式(19, 28, 30), 由式(19)可进一步推导出计算虚拟响应 $\alpha_j(t, \omega)$ 的频域表达形式, 即

$$\alpha_j(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \mathbf{H}(\bar{\omega}) \mathbf{M}_s \mathbf{P} \bar{\mathbf{G}}(\bar{\omega} - \omega) \mathbf{W}(\omega) \mathbf{S}_{\ddot{\mathbf{u}}}(\omega) \times \boldsymbol{\varphi}_j \sqrt{\lambda_j} e^{i\bar{\omega}t} d\bar{\omega} = \boldsymbol{\eta}_r(t, \omega) \ddot{\mathbf{u}}_j(t, \omega) \quad (31)$$

式中

$$\boldsymbol{\eta}_r(t, \omega) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}(\bar{\omega} + \omega) \mathbf{M}_s \mathbf{P} \bar{\mathbf{G}}(\bar{\omega}) e^{i\bar{\omega}t} d\bar{\omega} \right) \quad (32)$$

式(21)中令 $t_k = t_l = t$, 利用式(19,32)可得系统随机振动响应 $\mathbf{y}(t)$ 随时间演变的自相关矩阵为

$$\mathbf{R}_{y_r y_r}(t, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\eta}_r(t, \omega) \left(\sum_{j=1}^r \ddot{\mathbf{u}}_j^*(\omega, t) \ddot{\mathbf{u}}_j^T(\omega, t) \right) \times \boldsymbol{\eta}_r^T(t, \omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\eta}_r(t, \omega) \mathbf{S}_{\ddot{\mathbf{u}}\ddot{\mathbf{u}}}(i\omega) \boldsymbol{\eta}_r^T(t, \omega) d\omega \quad (33)$$

式(33)的被积函数正是结构动态相对位移响应 $\mathbf{y}_r(t)$ 的演变功率谱密度矩阵, 为

$$\mathbf{S}_{y_r y_r}(t, \omega) = \boldsymbol{\eta}_r(t, \omega) \mathbf{S}_{\ddot{\mathbf{u}}\ddot{\mathbf{u}}}(i\omega) \boldsymbol{\eta}_r^T(t, \omega) \quad (34)$$

与式(34)推导类似, 可以得到结构动态相对位移响应 $\mathbf{y}_s(t)$ 的演变功率谱密度矩阵

$$\mathbf{S}_{y_s y_s}(t, \omega) = \frac{1}{\omega^4} \boldsymbol{\eta}_s(t) \mathbf{S}_{\ddot{\mathbf{u}}\ddot{\mathbf{u}}}(i\omega) \boldsymbol{\eta}_s^T(t) \quad (35)$$

由式(34~36)可以得到大跨度结构非平稳随机振动位移响应演变功率谱密度矩阵表达式为

$$\mathbf{S}_{y_s y_s}(t, \omega) = \boldsymbol{\beta}(t, \omega) \mathbf{S}_{\ddot{\mathbf{u}}\ddot{\mathbf{u}}}(i\omega) \boldsymbol{\beta}^T(t, \omega) \quad (36)$$

$$\boldsymbol{\beta}(t, \omega) = \boldsymbol{\eta}_r(t, \omega) + \frac{1}{\omega^2} \boldsymbol{\eta}_s(t)$$

4 数值算例

如图1某大跨度斜拉桥, 全长为866 m, 结构采用全漂浮双索面斜拉体系。桥梁有限元模型具有429个节点, 其中包含6个地面节点, 划分301个单元, 1156个自由度。主甲板和桥塔采用三维梁单元模拟, 斜拉索采用一维索单元模拟。在分析中, 采用前200阶模态进行模态分解, 模态振型阻尼比取为0.05。采用本文提出的频域方法与文献[3]的时频分析方法进行非平稳非一致地震作用下结构随机振动分析。有效频率区间取为 $\omega \in [0.0, 100]$ rad/s, 频域步长为 $\Delta\omega = 0.2$ rad/s。

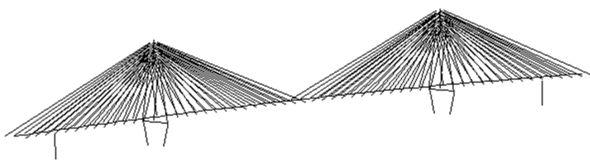


图1 斜拉桥有限元模型
Fig.1 Finite element model of cable-stayed bridge

4.1 方法验证

采用均匀调制演变非平稳随机过程模型描述地面运动, 考虑如下三段调制函数, 即

$$a(t) = \begin{cases} I_0 (t/t_1)^2 & (0 \leq t \leq t_1) \\ I_0 & (t_1 \leq t \leq t_2) \\ I_0 \exp[-c_0(t-t_2)] & (t \geq t_2) \end{cases} \quad (37)$$

式中 各参数取值分别为 $I_0 = 1$, $t_1 = 1.5$, $t_2 = 15$,

$c_0 = 0.2$ 。

基于中国规范选取地面加速度反应谱, 特性参数为7°区域设防, 2类场地类别, 1类地震分类。本文采用Kaul^[11]提出的方法进行该场地反应谱与等效功率谱转换, 并作为下述分析采用的地面加速度功率谱。

采用Loh-Yeh^[12]建议的相干函数模型进行各地面支座节点相干关系模拟

$$|\rho_{kl}(i\omega)| = \exp\left[-k_x \frac{\omega d_{kl}}{2\pi v_{app}}\right] \quad (38)$$

式中 k_x 为地震波传播的波数, 根据SMART-1地震台网的第40次的加速度记录, 取 $k_x = 0.125$ 。

假定桥梁受沿着桥主轴方向传播的SV波作用, 地震视波速 $v_{app} = 700$ m/s。计算分析中, 时频分析方法采用时间步长为0.02 s; 采用本文的频域分析方法时, 采样频率为10 Hz。为方便进行两种方法的对比验证, 选择斜拉桥主甲板的2个观测点A和点B(位置分别为 $x_1 = 262.2$ m, $x_2 = 412.2$ m), 分别采用时频方法和本文建立的频域方法计算两个观测点竖向剪力的随机振动响应。

为进行两种方法的对比验证, 图2~图4给出了主甲板不同观测位置竖向剪力时变标准差计算结果。图2和图3为主甲板点A和点B的竖向剪力标准差。图4为地震作用时刻为 $t = 30$ s时, 主甲板竖向剪力标准差。可以看出, 两种方法计算非常一致, 最大误差不超过0.2%。从图2和图3可以看出, 对于时变方差响应, 大致经过上升、平稳和下降3个阶段, 表明了响应的非平稳随机振动特性。对于图4, 剪力沿着主甲板的分布具有一定的对称性, 这是由于悬索桥的结构大致对称, 并承受对称载荷作用的结果。在上述计算中, 时频分析方法计算时间为2347.98 s, 本文建立的频域分析方法计算时间为1030.32 s。

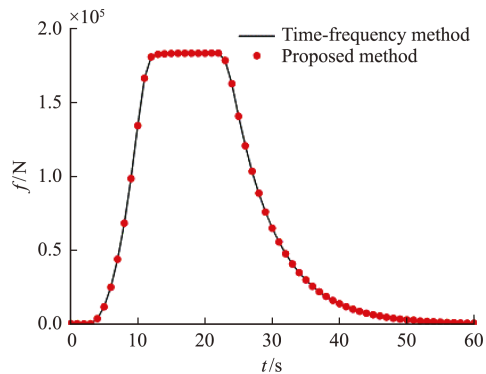


图2 主甲板点A竖向剪力时变标准差
Fig.2 Time varying standard deviation of vertical shear at point A of main deck

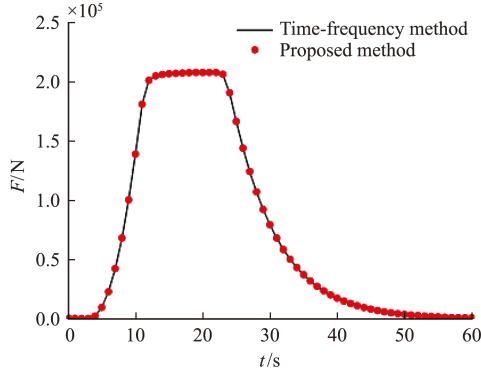
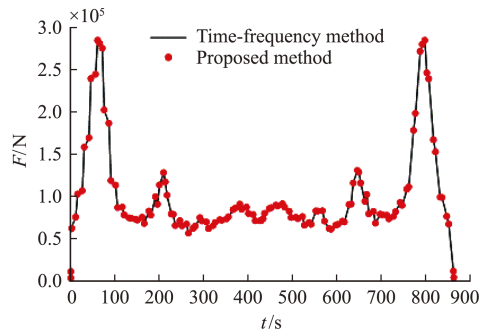


图 3 主甲板点 B 竖向剪力时变标准差

Fig. 3 Time varying standard deviation of vertical shear at point B of main deck

图 4 $t=30$ s 时主甲板不同位置竖向剪力标准差Fig. 4 Standard deviation of vertical shear at different positions of main deck when $t=30$ s

4.2 不同相干模型

对于考虑地震传播的时空结构,根据强震观测及统计分析已经发展了多种相干函数模型,除了本文采用的 Loh 模型,下面给出另外两种模型。

冯启民-胡聿贤相干函数模型^[13]

$$|\gamma_{kl}(\omega)| = \exp[-(\rho_1 \omega + \rho_2) d_{kl}] \quad (39)$$

式中 ρ_1 和 ρ_2 为相干性参数,对海城的参数为 $\rho_1 = 2 \times 10^{-5}$ s/m, $\rho_2 = 88 \times 10^{-4}$ m。

Harichandran-Vanmarcke 相干函数模型^[14]

$$|\gamma_{kl}(\omega)| = A e^{-\frac{2d}{\alpha\theta(\omega)}(1-A+\alpha A)} + (1-A) e^{-\frac{2d}{\alpha\theta(\omega)}(1-A+\alpha A)} \quad (40)$$

$$\theta(\omega) = K[1 + (\omega/\omega_0)^b]^{-1/2} \quad (41)$$

根据 SMART-1 地震台网的加速度记录,模型的参数为 $A=0.736$, $\alpha=0.147$, $K=5210$, $\omega_0=6.85$ rad/s, $b=2.78$ 。

假定 SV 波作用,视波速 $v_{app}=750$ m/s,分别考虑 Loh, Harichandran 和 Haicheng 相干模型,其余分析参数同 4.1 节。选择的主甲板的观测点 B,计算的竖向剪力 F 和横向弯矩 M 时变方差分别如图 5 和图 6 所示。同样给出了地震作用时间为 $t=30$ s 时刻,主甲板剪力和弯矩图标准差的计算结果,如图 7 和图 8 所示。从上述结果可以看出,不

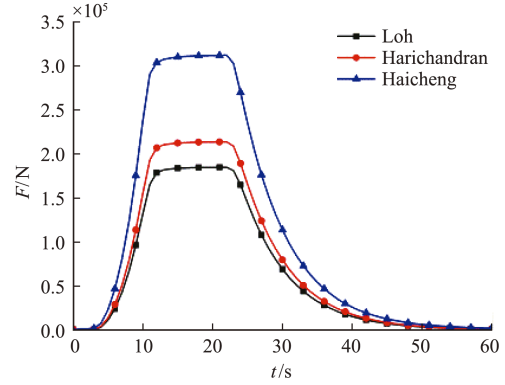


图 5 不同相干模型竖向剪力标准差

Fig. 5 Standard deviation of vertical shear of different coherent models

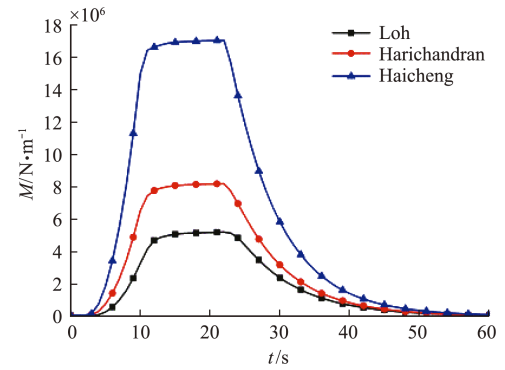


图 6 不同相干模型观横向弯矩标准差

Fig. 6 Standard deviation of lateral bending moment viewed by different coherence models

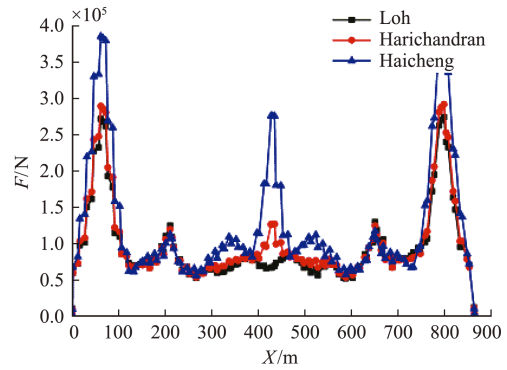


图 7 不同相干模型下主甲板剪力标准差

Fig. 7 Standard deviation of main deck shear under different coherence models

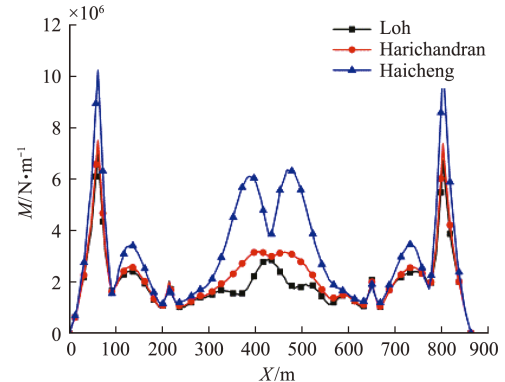


图 8 不同相干模型下主甲板弯矩标准差

Fig. 8 Standard deviation of main deck bending moment under different coherence models

同的相干模型对于内力响应具有显著的影响。对于本文讨论的参数情况,采用 Haicheng 相干模型时计算的内力响应最大,Loh 相干模型获得的结果最小。从图 7 和图 8 可以看出,计算的结果仍然具有一定的对称性,三种相干模型计算内力响应沿着桥梁主轴方向的变换趋势大致相同,对于主甲板对称轴位置的内力响应存在一定差别,对于主甲板中间位置,Haicheng 和 Harichandran 相干模型的计算结果存在一个波谷,但 Loh 相干模型的计算结果则存在一个波峰。

5 结 论

由于地震波传播过程中的行波效应、场地相干效应以及局部场地效应,对于大跨度结构的抗震分析需要考虑地面运动的非一致性。本文基于虚拟激励法建立了多点输入非平稳随机振动分析的闭合解,与传统的时频分析方法不同,建立的方法完全基于频域执行。该方法比较显著的特点是实现了结构非平稳响应确定性调制过程与非平稳过程的有效分离。在具体计算分析中仅需要考虑确定性调制部分的分析,由于输入调制函数具有慢变函数的特性,在应用离散傅里叶分析技术时不需要较高的采样频率,即可获得良好精度的计算结果。

参考文献(References):

- [1] 林家浩,张亚辉.随机振动的虚拟激励法[M].北京:科学出版社,2004.(LIN Jia-hao, ZHANG Ya-hui. *Virtual Excitation Method of Random Vibration* [M]. Beijing: Science Press, 2004. (in Chinese))
- [2] 林家浩,张亚辉,赵 岩.虚拟激励法在国内外工程界的应用回顾与展望[J].应用数学和力学,2017,38(1): 1-31.(LIN Jia-hao, ZHANG Ya-hui, ZHAO Yan. The pseudo-excitation method and its industrial applications in China and abroad[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, 38(1): 1-31. (in Chinese))
- [3] Lin J H, Zhao Y, Zhang Y H. Accurate and highly efficient algorithms for structural stationary/non-stationary random responses[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, 191(1-2): 103-111.
- [4] Gao Q, Lin J H, Zhong W X, et al. Propagation of partially coherent non-stationary random waves in a viscoelastic layered half-space[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2008, 28(4): 305-320.
- [5] 吕 峰,林家浩,张亚辉.车辆-轨道系统垂向随机振动的辛方法分析[J].力学学报,2008,40(3): 381-387.(LÜ Feng, LIN Jia-hao, ZHANG Ya-hui. Random vibration analysis of vehicle-track coupling systems using symplectic method[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2008, 40(3): 381-387. (in Chinese))
- [6] Zhang Y H, Li Q S, Lin J H, et al. Random vibration analysis of long-span structures subjected to spatially varying ground motions [J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2009, 29(4): 620-629.
- [7] Priestley M B. Power spectral analysis of non-stationary random processes[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1967, 6(1): 86-97.
- [8] Perotti F. Structural response to non-stationary multiple-support random excitation [J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 1990, 19(4): 513-527.
- [9] Alderucci T, Muscolino G. Fully nonstationary analysis of linear structural systems subjected to multicorrelated stochastic excitations[J]. *ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part A: Civil Engineering*, 2016, 2(2): C4015007. DOI:10.1061/AJRUA6.0000842.
- [10] Lin J H, Zhang Y H, Zhao Y. *Seismic Random Response Analysis* [M]. Bridge Engineering Handbook (Second Edition): CRC Press, 2014.
- [11] Kaul M K. Stochastic characterization of earthquakes through their response spectrum[J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 1978, 6(5): 497-509.
- [12] Loh C H. Spatial variability of seismic waves and its engineering application[J]. *Structural Safety*, 1991, 10(1-3): 95-111.
- [13] 冯启民,胡聿贤.空间相关地面运动的数学模型[J].地震工程与工程振动,1981,1(2): 1-8.(FENG Qi-min, HU Yu-xian. Mathematical model of spatially dependent ground motion [J]. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 1981, 1(2): 1-8. (in Chinese))
- [14] Vanmarcke E H, Fenton G A. Conditioned simulation of local fields of earthquake ground motion[J]. *Structural Safety*, 1991, 10(1-3): 247-264.

Closed solution for non-stationary random vibration analysis of long-span bridge based on pseudo excitation method

ZHAO Yan^{*1,2}, ZHANG Ya-hui¹, LIN Jia-hao¹

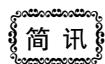
(1. State Key Laboratory of Structural Analysis Optimization and CAE Software for Industrial Equipment,

Dalian University of Technology, Dalian 116023, China;

2. Ningbo Research Institute of Dalian University of Technology, Ningbo 315016, China)

Abstract: In order to solve the problem of non-uniform seismic response analysis considering the motion of ground space for calculating long-span structures, combined with the pseudo-excitation method, a frequency domain method for calculating the evolution of power spectrum of non-stationary random vibration response of structures is established by using Fourier analysis. The proposed method is based entirely on frequency domain execution, and a closed form solution expression for the response evolution power spectrum is given. Due to the effective separation of the deterministic modulation process and the stochastic process, the discrete Fourier transform is used to obtain numerical results with good accuracy without high sampling and analysis frequency. Numerical examples are given to study the non-stationary random seismic response of a cable-stayed bridge considering the spatial effect of ground motion, and the correctness and effectiveness of the established frequency domain method are verified by comparison with the conventional time-frequency analysis method.

Key words: multipoint input; non-stationary; random vibration; pseudo-excitation method; closed solution



2019—2023 年《计算力学学报》高影响力论文

发表时间	题 名	作 者	工作单位
201902	加筋薄壳结构分析与优化设计研究进展	王 博, 郝 鹏, 田 阔	大连理工大学
201902	地震作用下高层建筑结构的分散神经网络振动控制研究	汪 权, 韩强强, 王肖东, 袁加伟	合肥工业大学
201904	基于不完备模态信息的结构损伤识别方法	杨 坚, 董 聪	清华大学
201912	不同载荷频率下有砟铁路道床累积沉降特性的离散元分析	李勇俊, 严 颖, 季顺迎	大连理工大学
201912	基于 PFC3D 的砂土直剪模拟及宏观分析	杨 升, 李晓庆	新疆农业大学
202002	基于 L1 正则化的随机梁式结构静力损伤识别方法	黄 斌, 鲁 溢	武汉理工大学
202008	基于径向基函数的频响函数模型修正	殷 红, 崔 攀, 彭珍瑞	兰州交通大学
202012	波形钢腹板组合箱梁约束扭转分析	孙成成, 张元海	兰州交通大学
202106	分子模拟在非常规油气开发中的应用	洪祥宇, 徐亨宇, 崔风路, 余 昊, 吴一宁	中国科学技术大学
202108	人工智能在结构拓扑优化领域的现状与未来趋势	阎 军, 许 琦, 张 起, 范志瑞, 杜洪泽	大连理工大学
202110	PFC2D 平节理模型细观参数标定方法	张宝玉, 张昌锁, 王晨龙, 郝保钦	太原理工大学
202204	基于 MTMD 的大跨度人行悬索桥人致振动控制	沈文爱, 曾东璠, 朱宏平	华中科技大学
202206	基于建模-非连续单元法的三维脆性颗粒冲击破碎特性分析	刘新明, 冯 春, 林钦栋	中国科学院力学所
202206	单轴压缩下页岩类脆性材料细观损伤演化的离散元分析	钟寄震, 王 蕉, 李翔宇, 楚锡华	西南交通大学
202304	基于响应面法的复合材料气瓶含缺陷内胆屈曲可靠性分析	张 国, 刘宇琛, 张笑闻, 薛姝楠, 任明法, 李 刚	大连理工大学

(本刊编辑部)

引用本文/Cite this paper:

赵 岩, 张亚辉, 林家浩. 基于虚拟激励法的大跨度桥梁非平稳随机振动分析闭合解[J]. 计算力学学报, 2024, 41(1): 202-208.

ZHAO Yan, ZHANG Ya-hui, LIN Jia-hao. Closed solution for non-stationary random vibration analysis of long-span bridge based on pseudo excitation method[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2024, 41(1): 202-208.