

DOI: 10.7511/jslx20231025004

基于辛 Runge-Kutta 方法的棋盘形褶皱 二维薄膜-基底结构动力学特性研究

张博涵¹, 曹善成^{*2}, 王博^{1,4}, 欧阳华江³, 徐方暖¹

(1. 西北工业大学 工程力学系, 西安 710072; 2. 西北工业大学 航天学院, 西安 710072;
3. 西南交通大学 机械工程学院, 成都 610031;
4. 大连理工大学 工业装备结构分析优化与 CAE 软件全国重点实验室, 大连 116024)

摘要: 基于力学屈曲原理的褶皱薄膜-基底结构已成功应用于制备可延展无机电子器件。然而, 该类电子器件在应用时需要服役于复杂动态环境中, 针对棋盘形褶皱薄膜结构的动力学问题鲜有研究, 此问题又是该类电子器件走向实际应用需要解决的关键问题之一。本文首先采用能量方法, 分别计算了二维薄膜的弯曲能、膜弹性能和柔性基底中的弹性能以及薄膜动能; 然后采用拉格朗日方程, 推导出了该结构的振动控制方程; 而该方程为非线性动力学方程, 无法给出其解析解; 因此, 本文采用辛 Runge-Kutta 方法对其进行数值求解; 数值结果表明, 辛数值方法具有长期稳定的特性和系统结构特性, 为高精度的可延展电子器件的动力学问题研究提供了优异的数值方法。

关键词: 可延展电子器件; 薄膜-基底结构; 辛算法; 保结构

中图分类号: O313; O302

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2024)01-0186-08

1 引言

基于力学屈曲原理^[1]的无机可延展电子器件, 既能保持无机功能电子器件优异的电学性能^[2,3], 还能使硬而脆的无机电子器件具备拉伸、压缩、弯曲和扭曲等延展性能; 因此, 该类电子器件受到了学术界和工程领域专家学者的广泛关注。基于力学屈曲原理的薄膜-基底结构, 是将刚性硬而脆的薄膜型功能电子器件层粘合在预拉伸的柔性基底上; 然后, 释放掉柔性基底上的预拉伸应变后, 薄膜中产生压缩的残余应变, 致使薄膜结构在柔性基底上表面处发生褶皱变形^[4]。

针对薄膜-基底结构的力学屈曲褶皱, 已有大量的理论研究、实验及有限元工作开展^[5-9]。其中, 实验研究结果表明, 当薄膜结构受到压缩应变时, 薄膜会在柔性基底表面形成一维波纹(1D wavy)、人字形波纹(herringbone wavy)和棋盘形波纹(checkerboard wavy)等三类别的褶皱^[10]。针对该类结构的失稳特性, 文献^[11,12]从静力学设计角度, 研究了该类薄膜-基底结构失稳机理特性。

然而, 这类电子器件在应用过程中, 不可避免会需要承受或者工作于复杂动态的环境中^[13-15]; 准确评估该类结构动态力学行为是其从理论设计走向实际应用需要解决的问题之一。

针对存在一维波纹薄膜结构的动态力学行为, 目前国内学者也开始关注。Ou 等^[16,17]研究了一维薄膜-基底结构的动力学行为, 并通过雅可比椭圆函数, 解析地给出了该结构的动态振幅表达式。Ma 等^[18]研究了基底为有限厚度时的非线性自由振动。Wang 等^[19]分析了表面效应和压电效应对弯曲薄膜结构动态行为的影响, 以避免复杂环境中的共振。Bi 等^[20,21]研究了具有中间层的薄膜-基底结构的动态行为, 得到了含中间层时的解析非线性频率, 并分析了中间层对结构动态行为的影响。然而, 针对薄膜结构的二维褶皱, 即当该薄膜-基底结构发生人字形或棋盘形褶皱模式时, 这类结构的动态力学行为鲜有研究。因此, 本文将研究棋盘形褶皱薄膜-基底结构的动力学行为特性。

2 硬薄膜-柔性基底能量计算

2.1 模型描述

如图 1(a)所示的薄膜-基底结构, 是将蓝色薄层粘附在灰色预拉伸的软基底上。其中, 预拉伸应变的值为 η_x 和 η_y , 预拉伸释放后基底复原, 但在薄膜中产生了值为 η_x 和 η_y 的残余压应变。薄膜

收稿日期: 2023-10-25; 修改稿收到日期: 2023-10-30.

基金项目: 国家自然科学基金(12172282; 12102346); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目.

作者简介: 曹善成^{*} (1989-), 男, 博士, 副教授

(E-mail: shancheng.cao@nwpu.edu.cn).

的杨氏模量、泊松比和厚度分别为 E_f, μ_f 和 h_f ; 柔性基底的杨氏模量和泊松比分别为 E_s 和 μ_s , 基底的厚度相比于薄膜足够大, 在模型中视为半无限空间^[20,21]。预应变释放后, 结构会形成如图 1(b) 所示的棋盘形褶皱模式。

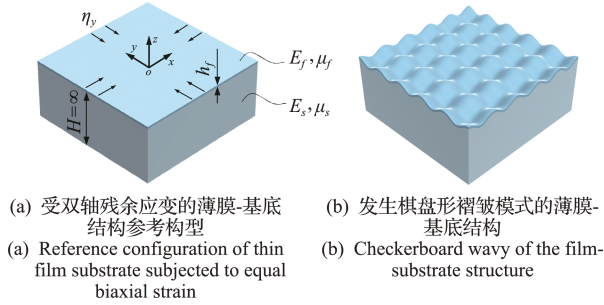


图1 薄膜-基底结构与棋盘形褶皱
Fig. 1 Thin film substrate structure with checkerboard pattern ripples

在理论分析中, 薄膜建模为冯·卡门理论描述的薄弹性板, 认为基底是半无限线弹性体。图 1(a) 所示的参考构型中定义了计算所用的坐标系, 坐标原点 O 位于薄膜的中性层; 平面内的 x 轴和 y 轴分别指向双轴载荷的主应变方向; z 方向代表薄膜的厚度方向。本文采用能量方法, 建立二维薄膜-基底结构的振动控制方程; 因此, 需要分别计算出二维薄膜-基底结构的动能和势能。

2.2 薄板结构势能

当释放掉施加在基底上的预拉伸应变时, 二维薄膜-基底结构上引入压缩的残余应变 $-\eta_x$ 和 $-\eta_y$ ^[11], 其中, 负号代表受到压缩应变。二维薄膜发生褶皱失稳模式, 该结构变形后沿着薄膜 x 方向、 y 方向和 z 方向的位移分别为 $u(x, y)$, $v(x, y)$ 和 $w(x, y)$ 。根据冯·卡门薄板理论可知, 薄膜的应变张量为

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = -\eta_x + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \\ \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \epsilon_{yy} = -\eta_y + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \end{cases} \quad (1)$$

线弹性二维薄膜的本构关系为

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \bar{E}_f (\epsilon_{xx} + \mu_f \epsilon_{yy}) \\ \sigma_{xy} = \bar{E}_f (1 - \mu_f) \epsilon_{xy} \\ \sigma_{yy} = \bar{E}_f (\epsilon_{yy} + \mu_f \epsilon_{xx}) \end{cases} \quad (2)$$

式中 $\bar{E}_f = E_f / (1 - \mu_f^2)$ 为薄膜的等效杨氏模量。

根据文献[9], 薄膜结构会受到的横向牵引力 T_3 及面内牵引力 T_1 和 T_2 分别为

$$T_1 = h_f \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) \quad (3)$$

$$T_2 = h_f \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} T_3 = & -\frac{h_f^3 \bar{E}_f}{12} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \\ & \frac{\partial}{\partial x} h_f \left(\sigma_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + \sigma_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ & \frac{\partial}{\partial y} h_f \left(\sigma_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

根据文献[20-21]可知, 二维薄膜结构的势能 U_f 包含两部分, 一个是薄膜结构的弹性势能 U_f , 其由于薄膜结构受到弯曲变形产生; 另外一个为膜能 U_{fs} , 其由于薄膜受到拉伸变形产生

$$U_f = U_{fb} + U_{fs} \quad (6)$$

式中 U_f 和 U_{fs} 的计算表达式为

$$U_{fs} = \frac{h}{2S} \iint \sigma_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} dx dy \quad (7)$$

$$\begin{aligned} U_{fb} = & \frac{\bar{E}_f h_f^3}{24S} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu_f \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ & \left. 2(1 - \mu_f) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \end{aligned} \quad (8)$$

式中 S 为积分区域的面积。

2.3 柔性基底弹性应变能

基底建模为薄膜以下的半无限空间, 假设基底失稳时表面出现了 $w(x, y)$ 的位移, 以 $w(x, y)$ 作为边界条件代入半无限大空间的弹性响应问题^[11] 中可求得基底的能量表达式。对于薄膜-基底结构的二维褶皱问题, 根据文献[12]可知, 该结构中的弹性应变能计算为

$$U_s = \frac{E_s^*}{S} \iint \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \hat{w}(k_x, k_y) \hat{w}(-k_x, -k_y) dk_x dk_y \quad (9)$$

式中 $E_s^* = E_s e(\mu_s)$ 为柔性基底的等效杨氏模量, $e(\mu_s) = (1 - \mu_s) / [(1 + \mu_s)(3 - 4\mu_s)]$ 。 $\hat{w}(k_x, k_y)$ 为褶皱位移 $w(x, y)$ 的傅里叶变换形式, 其变换表达式为

$$\hat{w}(k_x, k_y) = \iint w(x, y) \exp[-i(k_x x + k_y y)] dx dy \quad (10)$$

3 棋盘形褶皱结构振动控制方程

如图 1(b) 所示的棋盘形褶皱结构的面外位移 $w(x, y, t)$ 可以假设为^[12]

$$w(x, y, t) = A(t) \cos(k_1 x_1) \cos(k_2 x_2) \quad (11)$$

式中 待定参数 $A(t)$ 为随时间变化的褶皱幅值, k_1 和 k_2 为褶皱波纹沿 x 方向和 y 方向的特征波

数。在计算二维薄膜-基底结构的势能时,本文还需要计算二维薄膜的面内位移 u 和 v 。文献[9]指出可忽略薄膜/基底界面处的面内牵引力对褶皱波长和振幅的影响。在分析二维薄膜-基底结构屈曲失稳时,假设 $T_1 = T_2 = 0$, 这样,根据方程(1~4)可以求出面内位移 u 和 v 的表达式为

$$u = A(t)^2 \frac{[2k_1^2 \cos^2(k_2 x_2) - \mu_f k_2^2]}{16k_1} \sin(2k_1 x_1) \quad (12)$$

$$v = A(t)^2 \frac{[2k_2^2 \cos^2(k_1 x_1) - \mu_f k_1^2]}{16k_2} \sin(2k_2 x_2) \quad (13)$$

将方程(12~14)代入方程(7,8)可以得到薄膜结构的弯曲能和膜能分别为

$$U_{fb} = \frac{\bar{E}_f h_f^3}{96} (k_1^2 + k_2^2)^2 A^2 \quad (14)$$

$$U_{fs} = \frac{\bar{E}_f h_f}{256} \left[A(t)^4 (3 - \mu_f^2) (k_1^4 + k_2^4) + A(t)^4 4 \mu_f k_1^2 k_2^2 - 32 A(t)^2 (k_1^2 + \mu_f k_2^2) \eta_x - 32 A(t)^2 (k_2^2 + \mu_f k_1^2) \eta_y + 128 \eta_x^2 + 128 \eta_y^2 + 256 \mu_f \eta_x \eta_y \right] \quad (15)$$

把面外位移式(11)代入式(9),可以得到存储在柔性基底中的弹性势能为

$$U_s = \frac{1}{4} A(t)^2 E_s^* \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \quad (16)$$

二维薄膜的动能计算表达式为

$$T = \frac{1}{2} \rho h_f \frac{k_1 k_2}{4\pi^2} \int_0^{2\pi/k_1} \int_0^{2\pi/k_2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy = \frac{\rho h_f}{8} \dot{A}^2(t) \quad (17)$$

式中 $\dot{A} = dA/dt$ 。

根据 Lagrange 方程,可以得到棋盘形褶皱薄膜-基底结构的振动控制方程, Lagrange 方程表达式为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{A}} - \frac{\partial L}{\partial A} = 0 \quad (18)$$

式中 Lagrange 函数 L 的表达式为

$$L(A, \dot{A}) = T - U_{fb} - U_{fs} - U_s \quad (19)$$

将 $L(A, \dot{A})$ 代入方程(18)可以得到该结构的振动控制方程为

$$\frac{\rho h_f}{4} \ddot{A}(t) + \alpha_1 A(t) + \alpha_2 A^3(t) = 0 \quad (20)$$

式中 系数 α_1 和 α_2 为

$$\alpha_1 = \frac{\bar{E}_f h_f^3}{48} (k_1^2 + k_2^2)^2 + \frac{1}{2} E_s^* \sqrt{k_1^2 + k_2^2} - \frac{\bar{E}_f h_f}{4} [(k_1^2 + \mu_f k_2^2) \eta_x + (k_2^2 + \mu_f k_1^2) \eta_y]$$

$$\alpha_2 = \frac{\bar{E}_f h_f}{64} [(3 - \mu_f^2) (k_1^4 + k_2^4) + 4 \mu_f k_1^2 k_2^2] \quad (21)$$

为了分析计算方便起见,引入无量纲参数

$$\bar{A} = A/h_f, \quad \tau = t\sqrt{4\alpha_2 h/\rho} \quad (22)$$

将式(22)的无量纲式代入方程(20),可以得到无量纲的振动控制方程为

$$\ddot{\bar{A}} + \alpha_1 \bar{A}/\alpha_2 h_f^2 + \bar{A}^3 = 0 \quad (23)$$

当不考虑方程(23)涉及的动能项时,可以解得棋盘形屈曲波纹的静态屈曲幅值 \bar{A}_{static} 。式(11)的另一组待定参数为波纹的屈曲特征波数 k_1 和 k_2 , 通过类似上述求解振幅的方法,将 k_1 和 k_2 作为另一组广义坐标代入方程(18)并求解。得到棋盘形褶皱的振幅 \bar{A}_{static} , 波数 k_1 和 k_2 表达式为^[12]

$$\bar{A}_{static} = \sqrt{-\frac{\alpha_1}{\alpha_2 h_f^2}}, \quad k_1 = k_2 = \frac{1}{\sqrt{2} h_f} \left(\frac{12 \bar{E}_s}{\bar{E}_f} \right)^{1/3} \quad (24)$$

4 数值方法

辛数值方法在求解保守系统问题时,展现出优异的保辛特性(如动量守恒和相体积守恒)^[22,23]。针对非线性振动控制方程(23),其解析解很难得到,因此本文采用数值计算精度高和稳定性好的辛 Runge-Kutta 法对其进行数值求解。

在进行数值求解前,本文需要将二阶动力学方程进行降阶处理,即需要引入新的变量

$$\mathbf{Y} = [y_1 \quad y_2]^T, \quad y_1 = \bar{A}, \quad y_2 = \dot{\bar{A}} \quad (25)$$

然后,利用方程(25),方程(23)可以改写为如下一阶微分方程组

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{f}(\tau, \mathbf{Y}) \quad (26)$$

式中 $\mathbf{f}(\tau, \mathbf{Y})$ 为 $[y_2, -\alpha_1 y_1/\alpha_2 h_f^2 - y_2^3]^T$ 。

本文采用二级四阶的辛 Runge-Kutta 方法,其迭代格式为^[24]

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + \Delta\tau \sum_{i=1}^2 b_i \mathbf{K}_i$$

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{f}\left(\tau_n + d_i \Delta\tau, \mathbf{Y}_n + \sum_{j=1}^2 a_{ij} \mathbf{K}_j\right) \quad (i=1, 2, n) \quad (27)$$

$$\text{式中 } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d_1 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix} \quad (28)$$

5 结果与讨论

5.1 数值算例

为了验证辛 Runge-Kutta 法的有效性及讨论二维薄膜-基底的动态力学行为,本节通过数值试验方法进行验证。数值仿真中选取的薄膜和基底结构的材料参数和几何参数^[12]列入表 1,施加的预

应变为 $\eta_x = \eta_y = 1\%$ 。

表 1 薄膜和基底结构的材料和几何参数^[12]

Tab.1 Geometrical parameters and material parameters of the film and substrate^[12]

	薄膜	基底
杨氏模量/MPa	130×10^3	2.6
泊松比	0.27	0.48
厚度/m	10^{-7}	—

薄膜-基底结构的 Hamilton 能量可以写为

$$H = \dot{\bar{A}}^2/2 + \alpha_1 \bar{A}^2/2\alpha_2 h_f^2 + \bar{A}^4/4 \quad (29)$$

为了验证辛数值方法的有效性和优越性,图 2 对比了采用二级四阶辛 Runge-Kutta 法和经典四级四阶 Runge-Kutta 法计算的 Hamilton 能量相对于(29)的误差。步长均为 $\Delta\tau = 0.01$, $\bar{A}(0) = 0.1$, $\dot{\bar{A}}(0) = 0$ 为初始条件。可以看出,辛 Runge-Kutta 法得到的能量误差(带空心圆点的线)一直在 0 附

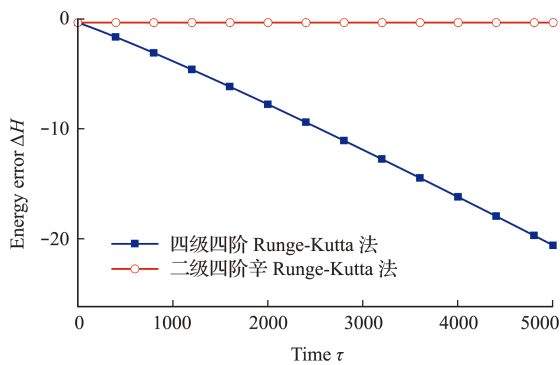


图 2 Hamilton 能量误差

Fig. 2 Comparisons of the absolute errors of the Hamilton energy

近,且在长时间仿真中能量误差不会发生数值耗散现象;而采用经典 Runge-Kutta 法(带实心方点的线)得到的能量误差随计算时间增加,这表明 Hamilton 能量发生了数值耗散现象。从方程的结构上看,方程(29)为保守系统的 Hamilton 能量,理应守恒。

为了进一步展示辛数值方法的数值稳定性,图 3 和图 4 分别对比了两种不同步长下的薄膜-基底结构的时间位移曲线。

图 3 中 $\Delta\tau = 0.04$, $\bar{A}(0) = 0.1$, $\dot{\bar{A}}(0) = 0$ 。仿真结果表明,四级四阶 Runge-Kutta 法由于计算过程中的能量耗散,系统的波纹幅值震荡迅速衰减,波纹的振动速度同样逐渐衰减,并最终在约 $\tau = 3000$ 时停止振动,波纹幅值稳定在静态屈曲幅值处。该仿真结果与保守系统的前提相矛盾。而辛 Runge-Kutta 法的仿真结果中波纹的幅值和速度都没有随时间增加而出现明显的变化,这展示出辛方法对该问题仿真结果的准确性。

图 4 中 $\Delta\tau = 0.01$, 初始条件为 $\bar{A}(0) = 0.1$, $\dot{\bar{A}}(0) = 0$ 。对比图 3 和图 4 可以看出,减小步长使得四级四阶 Runge-Kutta 法仿真结果的准确性有了明显的提高。然而由于能量误差随时间增长而不断积累,仿真结果中波纹幅值的震荡范围难以避免地出现衰减。这表明即使选取较小的步长,经典 Runge-Kutta 方法依然无法在长时间的仿真中保持仿真结果的准确性。

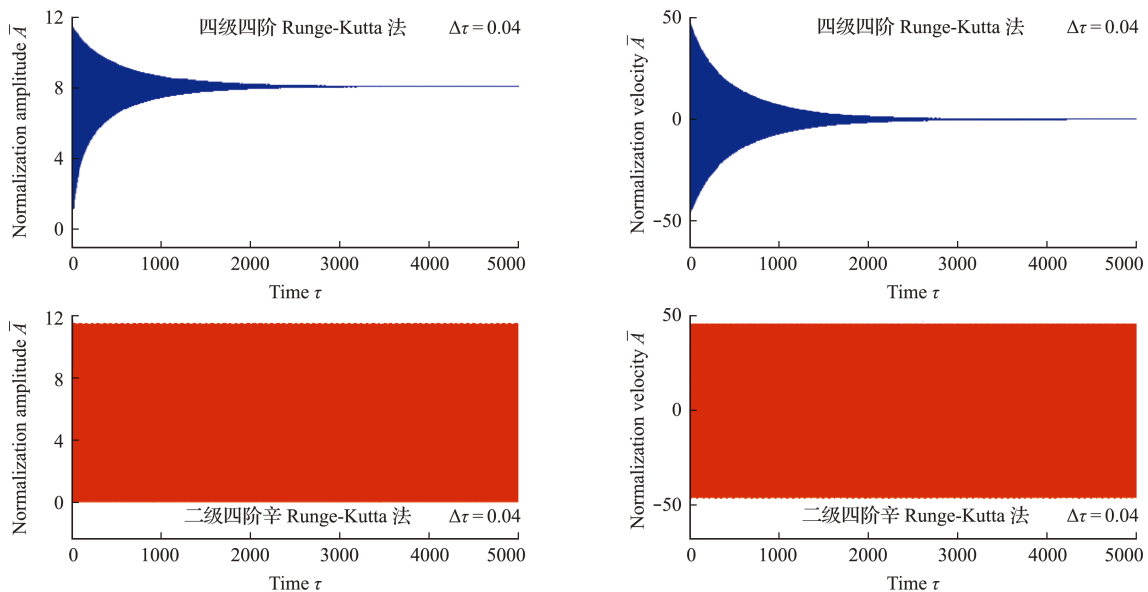


图 3 二级四阶辛 Runge-Kutta 法和经典四级四阶 Runge-Kutta 法在步长 $\Delta\tau = 0.04$ 时的仿真结果

Fig. 3 Simulation results of two-stage four-order symplectic Runge-Kutta method and classical four-stage four-order Runge-Kutta method at step size $\Delta\tau = 0.04$

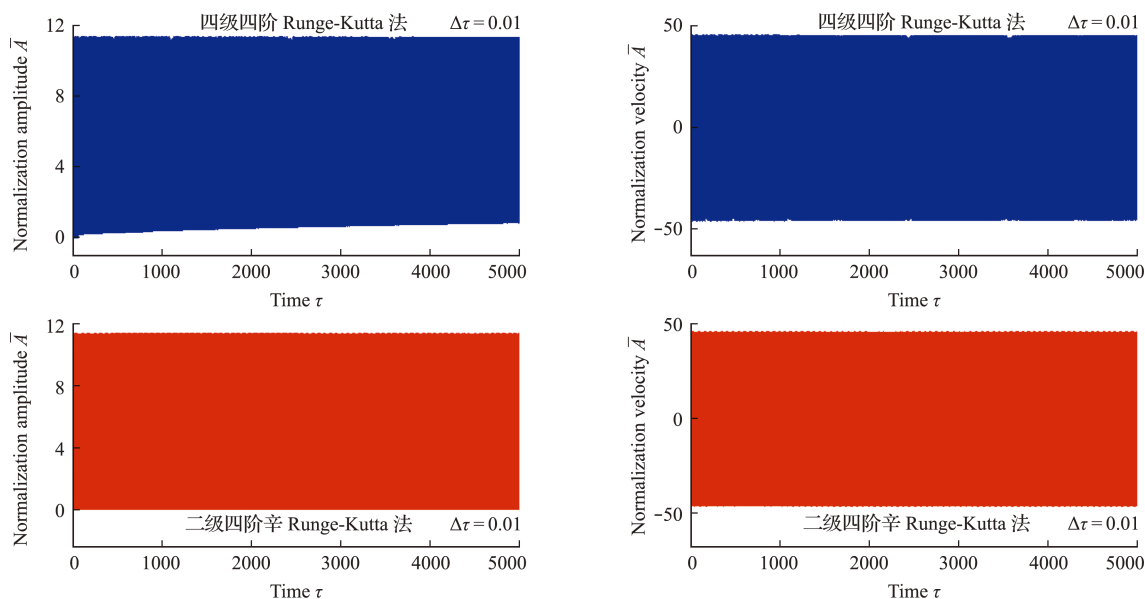


图4 二级四阶辛 Runge-Kutta法和经典四级四阶 Runge-Kutta法在步长 $\Delta\tau = 0.01$ 时的仿真结果
Fig. 4 Simulation results of two-stage four-order symplectic Runge-Kutta method and classical four-stage four-order Runge-Kutta method at step size $\Delta\tau = 0.01$

对方程(26)描述的保守系统,其另一个性质是相空间中的轨线围成的面积不随时间演化而变化。图5绘制了薄膜-基底结构的相位。可以看出,在不同时刻下,采用辛数值方法得到的相位曲线始终为一条曲线;不会发生数值耗散现象。即验证了辛数值方法在保守系统下的保结构特性^[15]。

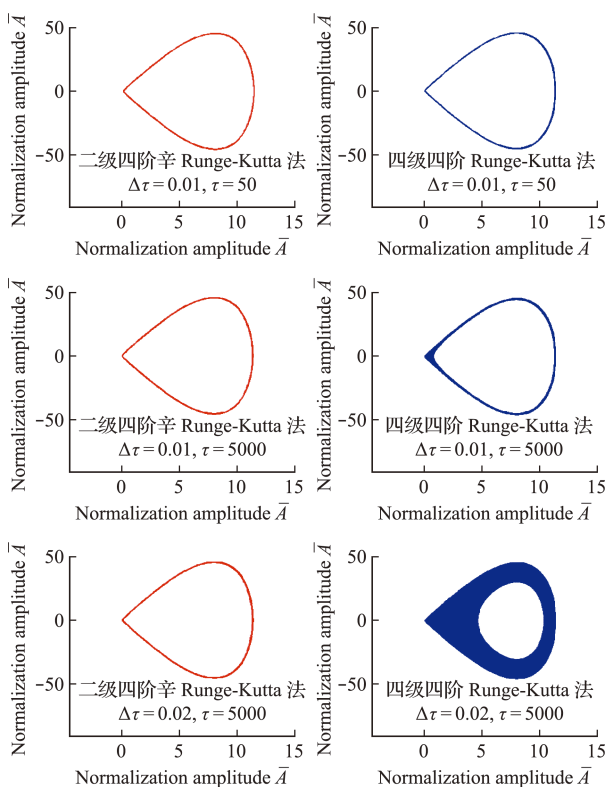


图5 步长精度 $\Delta\tau = 0.01, \Delta\tau = 0.02$ 时随时间演化的相位
Fig. 5 Phase diagram of time evolution over long periods at step size $\Delta\tau = 0.01, \Delta\tau = 0.02$

5.2 静态分岔

通过调控施加在柔性基底上的预拉伸应变 η_x 和 η_y 来调控棋盘形褶皱结构的失稳振幅。根据文献[11]可知,二维薄膜-基底结构在受到等双轴载荷时会发生棋盘形褶皱失稳,因此在下文中默认 η_x 和 η_y 相等,仅考察预应变 η_x 对失稳的调控作用。

在方程(26)中,令 $f(\tau, \mathbf{Y})$ 为零,可以解析得到薄膜-基底结构静态振幅表达式和临界预应变的表达式为

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= 0, \bar{A}_2 = 0 \\ \bar{A}_3 &= \sqrt{-\frac{\alpha_1}{\alpha_2 h^2}}, \bar{A}_4 = -\sqrt{-\frac{\alpha_1}{\alpha_2 h^2}} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\eta_c = \frac{1}{4(1 + \mu_f)} \left(\frac{12 E_s^*}{E_f} \right)^{2/3} \quad (31)$$

图6为二维薄膜-基底结构的静分叉,可以看出,二维薄膜结构在临界应变 η_c 处会发生褶皱失稳。在预应变 η_x 小于 η_c 时,结构不失稳,蓝色实线对应的解 \bar{A}_1 为0是唯一的稳定平衡解,即没有褶皱是结构的稳定状态。在预应变 η_x 大于 η_c 时,结构以棋盘形褶皱状失稳,棋盘形褶皱的幅值为 $\bar{A}_3 = \sqrt{-\alpha_1/\alpha_2 h^2}$ 或 $\bar{A}_4 = -\sqrt{-\alpha_1/\alpha_2 h^2}$, 即带有空心或实心圆点的红色线。

薄膜-基底结构的势能 \bar{U} 是评估该系统动态性能有效方式之一,该结构的势能 \bar{U} 表达式为

$$\bar{U} = - \int_0^{\bar{A}} \left[-\alpha_1 \bar{A} / (\alpha_2 h_f^2) - \bar{A}^3 \right] d\bar{A} \quad (32)$$

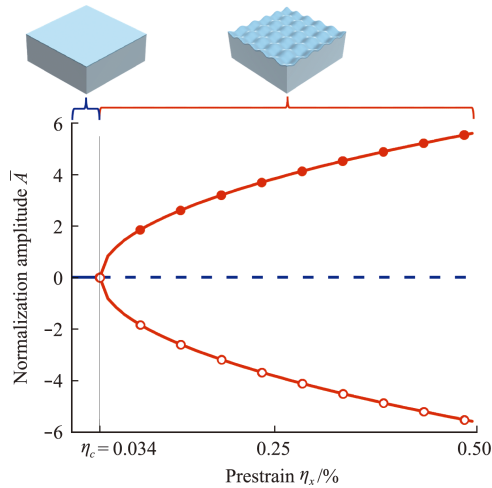
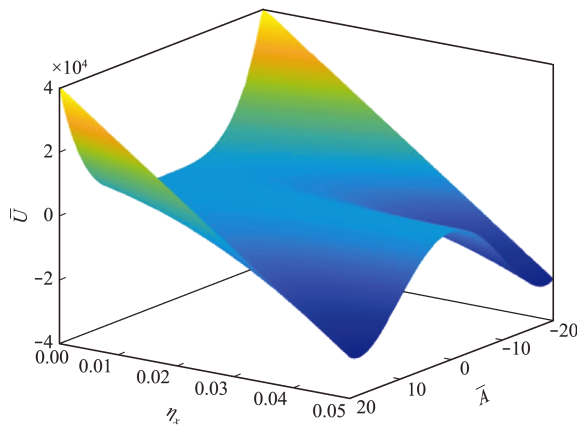
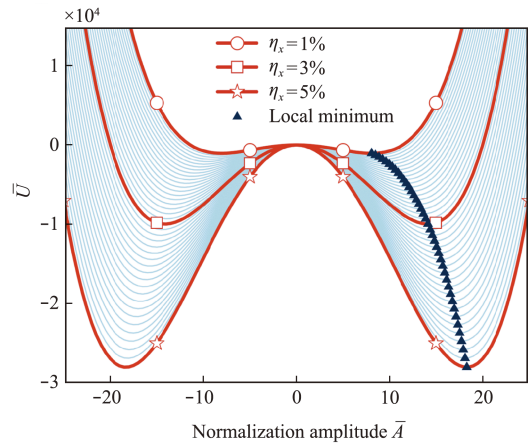


图6 薄膜-基底结构失稳的分岔
Fig. 6 Bifurcation diagram of structural instability of thin film substrate



(a) 不同载荷条件下的势能曲面
(a) Potential energy surface under different load conditions



(b) 不同载荷条件下的势能曲线
(b) Potential energy curve under different load conditions

图7 棋盘形波纹的势能 \bar{U} 与预应变载荷 η_x 和波纹幅值的关系 \bar{A}
Fig. 7 Relationship between potential energy \bar{U} of checkerboard wavy and prestrain load η_x and wavy amplitude \bar{A}

6 结论

本文研究了二维棋盘形褶皱薄膜-基底结构动力学行为。首先将二维薄膜结构等效为薄板结构,将柔性基底等效为半无限大基底结构,计算了薄膜-基底结构系统总能量;通过拉格朗日运动方程得到了该棋盘形褶皱的振动控制方程。然后,应用二级四阶辛Runge-Kutta法求解该方程,通过数值试验,验证了辛数值算法的有效性和优越性。主要结论如下。

(1) 数值试验验证了辛算法具有保结构、保能量的特点。辛Runge-Kutta算法能够很好地保持棋盘形褶皱薄膜-基底结构原有的能量守恒特点,能够保证该结构在振动过程中长时间数值稳定。

(2) 棋盘形褶皱薄膜结构的振动会围绕在其

通过式(32)绘制出了失稳后棋盘形褶皱结构的势能曲面,预应变 η_x 从 0%~5%变化时对势能 \bar{U} 的影响如图 7(a)所示。图 7(b)分别对比了三种预应变下 $\eta_x=1\%$, $\eta_x=3\%$, $\eta_x=5\%$ 的势能曲线。从图 7(b)可以看出,屈曲后棋盘形褶皱结构的势能曲线(图中红色实线)存在两个极小值,而这两个最小值分别代表褶皱结构在平衡时的静态振幅。用黑色的三角形标注了不同预应变下的极小值点。对比三条曲线可以看出,随着预压缩应变的增加,极小值点逐渐远离初始位置。这表明,棋盘形褶皱的静态屈曲幅值变大,也就是基于该结构的电子器件具备了更优异的延展性能。

静态幅值附近。通过调控预应变可调控棋盘褶皱的静态幅值,随着预应变的增加,静态幅值递增。

参考文献(References):

[1] 常若菲,张一慧,宋吉舟.可延展结构的设计及力学研究新进展[J]. 固体力学学报,2016,37(2):95-106. (CHANG Ruo-fei, ZHANG Yi-Hui, SONG Ji-zhou. Recent advances in mechanics of stretchable designs [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2016, 37(2):95-106. (in Chinese))

[2] 冯雪,陆炳卫,吴坚,等.可延展柔性无机微纳电子器件原理与研究进展[J]. 物理学报,2014,63(1):9-26. (FENG Xue, LU Bing-wei, WU Jian, et al. The review on stretchable and flexible inorganic electronics [J]. Acta Physica Sinica, 2014, 63(1):9-26. (in Chinese))

- [3] Bo R H, Xu S W, Yang Y Z, et al. Mechanically-guided 3D assembly for architected flexible electronics [J]. *Chemical Reviews*, 2023, **123**(18):11137-11189.
- [4] Hu X Y, Dou Y Y, Li J J, et al. Buckled structures: Fabrication and applications in wearable electronics [J]. *Small*, 2019, **15**(32):1804805.
- [5] Yoo P J, Suh K Y, Park S Y, et al. Physical self-assembly of microstructures by anisotropic buckling [J]. *Advanced Materials*, 2002, **14**(19):1383-1387.
- [6] Choi W M, Song J Z, Khang D Y, et al. Biaxially stretchable “wavy” silicon nanomembranes [J]. *Nano Letters*, 2007, **7**(6):1655-1663.
- [7] Chen X, Hutchinson J W. Herringbone buckling patterns of compressed thin films on compliant substrates [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2004, **71**(5):597-603.
- [8] Huang Z Y, Hong W, Suo Z. Evolution of wrinkles in hard films on soft substrates [J]. *Physical Review E*, 2004, **70**(3):030601.
- [9] Huang Z Y, Hong W, Suo Z. Nonlinear analyses of wrinkles in a film bonded to a compliant substrate [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2005, **53**(9):2101-2118.
- [10] Mahadevan L, Rica S. Self-organized origami [J]. *Science*, 2005, **307**(5716):1740.
- [11] Audoly B, Boudaoud A. Buckling of a stiff film bound to a compliant substrate—Part I: Formulation, linear stability of cylindrical patterns, secondary bifurcations [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2008, **56**(7):2401-2421.
- [12] Song J, Jiang H, Choi W M, et al. An analytical study of two-dimensional buckling of thin films on compliant substrates [J]. *Journal of Applied Physics*, 2008, **103**(1):014303.
- [13] Yuan W J, Yang J, Yin F, et al. Flexible and stretchable mxene/polyurethane fabrics with delicate wrinkle structure design for effective electromagnetic interference shielding at a dynamic stretching process [J]. *Composites Communications*, 2020, **19**:90-98.
- [14] Wang Y X, Yu Z, Mao G Y, et al. Printable liquid-metal@pdms stretchable heater with high stretchability and dynamic stability for wearable thermotherapy [J]. *Advanced Materials Technologies*, 2019, **4**(2):1800435.
- [15] 鲁康, 王博, 毕皓皓, 等. 基于几何积分方法的压电岛-桥结构动力行为分析 [J]. *动力学与控制学报*, 2022, **20**(3):15-24. (LU Kang, WANG Bo, BI Hao-hao, et al. Dynamic behavior analysis of piezoelectric island-bridge structure based on geometric integral method [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2022, **20**(3):15-24. (in Chinese))
- [16] Ou Z C, Yao X, Zhang X, et al. Dynamic stability of flexible electronic structures under step loads [J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2016, **58**:247-255.
- [17] Zhang X Q, Ou Z C. Analysis on nonlinear dynamic buckling of flexible electronic components [J]. *Explosion and Shock Waves*, 2012, **32**(4):362-367.
- [18] Ma J J, Liu F J, Nie M Q, et al. Nonlinear free vibration of a beam on winkler foundation with consideration of soil mass motion of finite depth [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2018, **92**(2):429-441.
- [19] Wang Y, Feng X, Lu B W, et al. Surface effects on the mechanical behavior of buckled thin film [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2013, **80**(2):021002.
- [20] Wang B, Bi H, Ouyang H, et al. Nonlinear dynamic analysis for a corrugated thin film on a pre-strained finite-thickness bi-layer substrate [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2021, **98**:652-664.
- [21] Bi H H, Wang B, Huang Y, et al. Nonlinear dynamic performance of buckled piezoelectric ribbon-substrate energy harvester [J]. *Composite Structures*, 2021, **261**:113570.
- [22] 杨蓉, 邢誉峰. 动力学平衡方程的辛两步求解算法 [J]. *计算力学学报*, 2008, **25**(6):882-886. (YANG Rong, XING Yu-feng. Symplectic two-step algorithms of FE dynamic equations [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2008, **25**(6):882-886. (in Chinese))
- [23] 高 强, 彭海军, 张洪武, 等. 基于哈密顿动力系统新变分原理的保辛算法之一: 变分原理和算法构造 [J]. *计算力学学报*, 2013, **30**(4):461-467. (GAO Qiang, PENG Hai-jun, ZHANG Hong-wu, et al. The symplectic algorithms for Hamiltonian dynamical systems based on a new variational principle—Part I: The variational principle and the algorithms [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2013, **30**(4):461-467. (in Chinese))
- [24] 李少锋, 都琳, 邓子辰. Hamilton 体系下介电弹性体圆形薄膜的动力学建模与辛求解 [J]. *计算力学学报*, 2019, **36**(3):304-309. (LI Shao-feng, DU Lin, DENG Zi-chen. Dynamic modeling and symplectic solution of a circular membrane of dielectric elastomer under Hamilton system [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2019, **36**(3):304-309. (in Chinese))

Dynamic behaviour of 2D film-substrate structure with checkerboard regime via Symplectic Runge-Kutta method

ZHANG Bo-han¹, CAO Shan-cheng^{*2}, WANG Bo^{1,4}, OUYANG Hua-jiang³, XU Fang-nuan¹

(1. Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;

2. School of Astronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;

3. School of Mechanical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China;

4. State Key Laboratory of Structural Analysis, Optimization and CAE Software for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: Stretchable inorganic electronics, based on buckling mechanisms, have been fabricated. However, these electronics need to work in a dynamic environment and the dynamic behaviour of these structures is also one of important considerations for their applications in industry. In this paper, the potential energies due to bending and in-plane membrane deformation of the 2D film, and the kinetic energy and the potential energy of the compressed substrate of a film-substrate structure are formulated; then, by using the Lagrange equation, the governing equation of this buckled structure is derived. Since the analytical solutions of this equation cannot be obtained, it is solved by the Symplectic Runge-Kutta method. Through the numerical examples, it is found that the Symplectic algorithm can preserve the characteristics of the film-substrate structure in long-time, and also maintain the buckling characteristics, and thus provides an excellent numerical analysis method for determining dynamic behaviour of stretchable inorganic, buckled film-substrate-based electronics.

Key words: Stretchable electronics; film-substrate structure; Symplectic algorithm; Structure preserving

引用本文/Cite this paper:

张博涵,曹善成,王博,等.基于辛 Runge-Kutta方法的棋盘形褶皱二维薄膜-基底结构动力学特性研究[J].计算力学学报,2024,41(1):186-193.

ZHANG Bo-han, CAO Shan-cheng, WANG Bo, et al. Dynamic behaviour of 2D film-substrate structure with checkerboard regime via Symplectic Runge-Kutta method[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2024, 41(1):186-193.