

DOI: 10.7511/jslx20230909002

埃尔米特梁单元的分块对角与高阶质量矩阵

王东东*, 吴振宇, 侯松阳

(厦门大学 土木工程系 福建省滨海土木工程数字仿真重点实验室, 厦门 361005)

摘要: 埃尔米特梁单元常用的集中质量矩阵, 是由挠度自由度对应的一致质量矩阵元素通过行求和或节点积分构造。然而, 数值结果表明该集中质量矩阵在求解包含自由端的梁振动问题时, 会出现频率精度掉阶现象。本文首先从保障质量矩阵最优收敛性的数值积分精度出发, 分别针对三次和五次梁单元, 发展了质量矩阵的梯度增强节点积分方案。利用梯度增强节点积分方案, 可以得到具有分块对角形式的单元质量矩阵, 而其组装的整体质量矩阵除边界节点外仍然呈现对角形式。对于两种单元, 其分块对角质量矩阵分别具有4阶最优精度和6阶次优精度。再者, 将标准一致质量矩阵和具有同阶精度的梯度增强节点积分质量矩阵进行优化组合, 建立了具有超收敛特性的高阶质量矩阵。最后, 通过数值算例系统验证了三次和五次单元的分块对角与高阶质量矩阵的频率计算精度。

关键词: 埃尔米特梁单元; 振动频率; 集中质量矩阵; 分块对角质量矩阵; 高阶质量矩阵

中图分类号: O32; O242.21

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2024)01-0178-08

1 引言

工程中忽略剪切变形的细长梁结构常称作欧拉伯努利梁或欧拉梁^[1]。由于欧拉梁问题的控制方程为四阶微分方程, 其等效积分弱形式包含位移的二阶导数, 因此要求数值方法的形函数至少具有 C^1 连续性^[2-4]。在有限元法中, 应用最为广泛的欧拉梁单元是两节点三次埃尔米特梁单元^[3,4]。该单元两个节点均包含挠度和转角自由度, 在单元边界处满足 C^1 连续性要求, 而且挠度和转角自由度对应的形函数满足埃尔米特插值特性, 可以便捷施加挠度和转角边界条件。另一方面, 无网格法和等几何分析采用的形函数具有任意高阶连续的特性, 但这类形函数通常没有插值特性^[5-9]。对于一维等几何开放型B样条基函数, 其在两个端点满足插值特性, 但是由于不包含转角自由度, 不具有转角插值性。因此, 无网格法和等几何分析一般需要引入其他方法来处理边界条件^[6-9]。

在结构动力有限元分析中, 质量矩阵的构造对计算精度有明显的影响。常用的质量矩阵包括一致质量矩阵^[3]、集中质量矩阵^[10-15]和高阶质量矩阵^[3,16-18]。其中, 集中质量矩阵构造简单, 与显式

时间积分结合使用可以大幅提高结构动力计算效率。对于三次埃尔米特梁单元, 其集中质量矩阵通常不考虑转角惯性矩的影响, 而由挠度自由度对应的一致质量矩阵元素通过行求和或节点积分构造^[3]。对于两端简支或固定的梁问题, 该集中质量矩阵的频率解呈现最优的4阶精度^[3]。但对包含自由端的梁问题, 采用该集中质量矩阵计算得到的频率精度仅为2阶, 出现明显的精度掉阶问题。此外, 目前文献中讨论的埃尔米特梁单元主要是指两节点三次单元, 还缺乏高次单元的统一构造方式。最近, Wu等^[18]在埃尔米特再生核无网格法的理论框架内^[19-21], 从理论上证明当埃尔米特再生核无网格挠度和转角形函数的影响域与单元完全重合时, 其退化为埃尔米特有限元挠度和转角形函数, 从而为任意次埃尔米特单元的挠度和转角形函数构造提供了一种统一方法。根据该理论, 可以方便地构造三节点五次埃尔米特单元。对于五次埃尔米特单元, 当采用忽略旋转影响的行求和质量矩阵进行包含自由边界梁问题振动分析时, 频率精度同样只有2阶, 远低于理论收敛阶次 $2(p-1)$ ^[22], 其中 p 为单元的阶次。由此可见, 如何构造能有效规避边界条件影响的集中质量矩阵是埃尔米特梁单元的一个共性问题。

针对上述问题, 本文从质量矩阵的数值积分精度出发, 详细讨论了满足理论积分精度要求的梯度增强节点积分方案, 厘清了集中质量矩阵频率精度

收稿日期: 2023-09-09; 修改稿收到日期: 2023-10-20.

基金项目: 国家自然科学基金(12072302; 12372201); 福建省自然科学基金(2021J02003)资助项目.

作者简介: 王东东*(1974-), 男, 博士, 教授
(E-mail: ddwang@xmu.edu.cn).

掉阶的原因:从节点积分角度而言,质量矩阵的数值积分精度不满足理论最低积分精度的要求。随后,根据不同单元质量矩阵的数值积分精度要求,发展了三次和五次单元梯度增强节点积分方案,并以此为基础构造了相应的分块对角形式的单元质量矩阵,其组装得到的整体质量矩阵除边界节点对应的元素外呈现对角形式。其中,三次单元的分块对角矩阵不但具有与一致质量矩阵相同的最优收敛特性,而且不依赖于边界条件;五次单元的分块对角矩阵的精度同样不依赖于边界条件,只是精度呈现次优收敛性。为了进一步提升频率计算精度,通过将一致质量矩阵和基于节点积分质量矩阵进行组合,建立了三次和五次单元的高阶质量矩阵,其精度比对应的一致质量矩阵高2阶,同时不受边界条件和波数等因素的影响。

2 三次和五次梁单元与集中质量矩阵

2.1 三次和五次埃尔米特梁单元

考虑空间区域 Ω 的欧拉梁问题,其自由振动问题的有限元离散方程为

$$[\mathbf{K} - (\omega^h)^2 \mathbf{M}] \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (1)$$

式中 ω^h 为频率数值解, \mathbf{d} 为相应的振动模式, \mathbf{M} 和 \mathbf{K} 分别为整体质量矩阵和整体刚度矩阵,可由相应的单元质量矩阵和单元刚度矩阵组装得到

$$\begin{cases} \mathbf{M} = \mathcal{A} \mathbf{M}^e, \mathbf{M}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \rho A \mathbf{N} d\Omega \\ \mathbf{K} = \mathcal{A} \mathbf{K}^e, \mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T_{,xx} E I \mathbf{N}_{,xx} d\Omega \end{cases} \quad (2)$$

式中 \mathcal{A} 为组装算子, n_{el} 为单元个数, Ω^e 为单元区域, ρ, A, E 和 I 分别为梁的密度、横截面积、弹性模量和惯性矩, \mathbf{N} 为单元的形函数向量,具体五次梁单元形函数推导细节参见文献[18]。

清晰起见,如图1和图2所示,本文列出三次和五次单元的形函数、质量和刚度矩阵。梁单元的物理空间为 $\Omega^e = [x_1^e, x_{n_{en}}^e]$, 参数空间为 $\Omega_\xi = [-1, 1]$, 单元长度 $h = x_{n_{en}}^e - x_1^e$, n_{en} 为单元节点个数,对

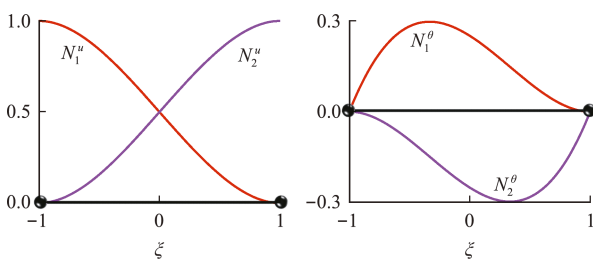


图1 三次梁单元的挠度及转角形函数
Fig. 1 Cubic beam element shape functions for deflection and rotation

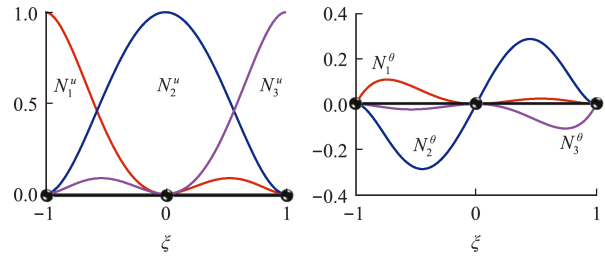


图2 五次梁单元的挠度及转角形函数
Fig. 2 Quintic beam element shape functions for deflection and rotation

于三次和五次单元分别为2和3。有限元形函数通常用参数坐标 ξ 表示, $N_i^u(\xi)$ 和 $N_i^\theta(\xi)$ 分别为第 i 个节点的挠度和转角形函数,其中 ξ 与整体坐标 x 的关系为

$$\xi = 2(x - x_1^e)/h - 1 \quad (3)$$

埃尔米特梁单元的形函数向量 \mathbf{N} 、一致质量矩阵 \mathbf{M}_C^e 、刚度矩阵 \mathbf{K}^e 和集中质量矩阵 \mathbf{M}_L^e 分别为

(1) 三次单元

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_1^u \\ N_1^\theta \\ N_2^u \\ N_2^\theta \end{Bmatrix}^T = \frac{1}{8} \begin{Bmatrix} 2(1-\xi)^2(2+\xi) \\ h(1+\xi)(1-\xi)^2 \\ 2(1+\xi)^2(2-\xi) \\ h(1+\xi)^2(\xi-1) \end{Bmatrix}^T \quad (4)$$

$$\mathbf{M}_C^e = \frac{\rho Ah}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22h & 54 & -13h \\ 22h & 4h^2 & 13h & -3h^2 \\ 54 & 13h & 156 & -22h \\ -13h & -3h^2 & -22h & 4h^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{K}^e = \frac{2EI}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & 3h & -6 & 3h \\ 3h & 2h^2 & -3h & h^2 \\ -6 & -3h & 6 & -3h \\ 3h & h^2 & -3h & 2h^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{M}_L^e = (\rho Ah/2) \times \text{diag}\{1, 0, 1, 0\} \quad (7)$$

(2) 五次单元

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_1^u \\ N_1^\theta \\ N_2^u \\ N_2^\theta \\ N_3^u \\ N_3^\theta \end{Bmatrix}^T = \frac{1}{8} \begin{Bmatrix} 2\xi^2(1-\xi)^2(4+3\xi) \\ h\xi^2(1-\xi)^2(\xi+1) \\ 8(\xi+1)^2(1-\xi)^2 \\ 4h\xi(\xi+1)^2(1-\xi)^2 \\ 2\xi^2(\xi+1)^2(4-3\xi) \\ h\xi^2(\xi+1)^2(\xi-1) \end{Bmatrix}^T \quad (8)$$

$$\mathbf{M}_C^e = \frac{\rho Ah}{13860} \times \begin{bmatrix} 2092 & 114h & 880 & -160h & 262 & -29h \\ 114h & 8h^2 & 88h & -12h^2 & 29h & -3h^2 \\ 880 & 88h & 5632 & 0 & 880 & -88h \\ -160h & -12h^2 & 0 & 128h^2 & 160h & -12h^2 \\ 262 & 29h & 880 & 160h & 2092 & -114h \\ -29h & -3h^2 & -88h & -12h^2 & -114h & 8h^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{K}^e = \frac{2EI}{35h^3} \times \begin{bmatrix} 2546 & 569h & -1792 & 960h & -754 & 121h \\ 569h & 166h^2 & -448h & 160h^2 & -121h & 19h^2 \\ -1792 & -448h & 3584 & 0 & -1792 & 448h \\ 960h & 160h^2 & 0 & 640h^2 & -960h & 160h^2 \\ -754 & -121h & -1792 & -960h & 2546 & -569h \\ 121h & 19h^2 & 448h & 160h^2 & -569h & 166h^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{M}_L^e = (\rho Ah/30) \times \text{diag} \{7, 0, 16, 0, 7, 0\} \quad (11)$$

2.2 集中质量矩阵的精度掉阶问题

为了研究式(7,11)表示的三次和五次单元集中质量矩阵的频率精度掉阶问题,本文分析了简支梁和两端自由梁的振动问题。由于采用频率相对误差,梁的几何与材料参数选取不影响计算结果,方便起见,选取梁长 $L=2$ m,截面积 $A=0.03$ m²,惯性矩 $I=10^{-4}$ m⁴,弹性模量 $E=30$ GPa,密度 $\rho=2300$ kg/m³。图3和图4选取了基频误差来说明集中和一致质量矩阵的收敛性,其中横坐标为总自由度数 n_{dof} 的对数刻度。使用的三次和五次单元的数目分别为4,8,16及2,4,8。

由图3和图4可以看出,采用一致质量矩阵计算的频率结果均能达到最优收敛率,即三次单元为4阶,五次单元为8阶。对于简支梁,三次单元集

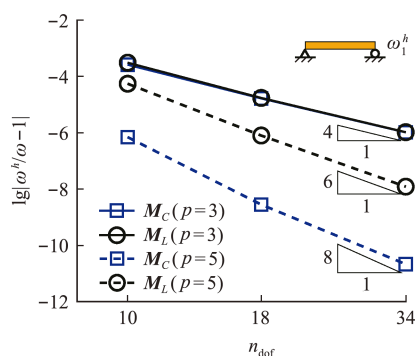


图3 简支梁的基频收敛结果对比

Fig. 3 Convergence comparison of the fundamental frequency for the simply supported beam problem

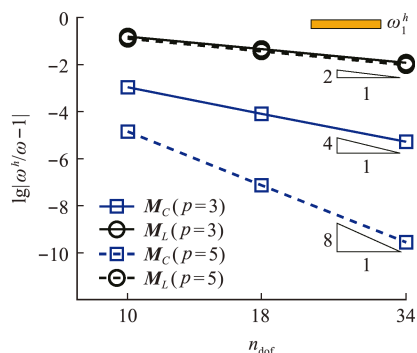


图4 两端自由梁的基频收敛结果对比

Fig. 4 Convergence comparison of the fundamental frequency for the free-free beam problem

中质量矩阵同样能够达到4阶最优收敛,而五次单元集中质量矩阵的频率则是6阶收敛,比最优收敛率低2阶。但对于两端自由梁,无论三次单元还是五次单元,集中质量矩阵的频率收敛率都骤降至2阶,远低于最优收敛率,呈现明显的频率精度掉阶问题。本文从质量矩阵的节点积分方案入手,揭示频率精度掉阶的内在机理。

3 三次梁单元分块对角与高阶质量矩阵

3.1 三次埃尔米特梁单元的分块对角质量矩阵

传统的节点积分方案将单元的节点作为积分点,相应质量矩阵 \mathbf{M}^e 的计算式为

$$\mathbf{M}^e = \sum_{i=1}^{n_{\text{en}}} (\mathbf{J}\mathbf{N}^T \rho \mathbf{A}\mathbf{N})_{\xi=\xi_i} \omega_i \quad (12)$$

式中 ξ_i 为节点 x_i^e 对应的参数坐标, J 为雅克比,根据式(3), $J=h/2$ 。 ω_i 为节点 ξ_i 对应的积分权重,可通过积分多项式(13)准确性条件确定^[3]

$$\sum_{i=1}^{n_{\text{en}}} \omega_i \xi_i^m = \int_{-1}^1 \xi^m d\xi \quad (13)$$

式中 $m=0, 1, \dots, n_{\text{en}}-1$ 。

此外,注意到埃尔米特形函数及其导数满足如下的插值性质^[18]

$$N_i^u(\xi_j) = \delta_{ij}, N_i^u(\xi_j) = 0 \quad (14)$$

$$N_{i,\xi}^u(\xi_j) = 0, N_{i,\xi}^u(\xi_j) = \delta_{ij} \quad (15)$$

式中 δ_{ij} 为克罗内克符号。传统的节点积分法一般仅利用式(14)的挠度形函数插值特性。根据式(12,13),三次单元节点积分方案为常见的矩形法则

$$\{\xi_i\} = \{-1, 1\}, \{\omega_i\} = \{1, 1\} \quad (16)$$

根据式(16)得到的 \mathbf{M}^e 即为式(7)的三次单元集中质量矩阵。值得指出的是,集中质量矩阵若要达到与一致质量矩阵相同的最优收敛特性,计算集中质量矩阵所用节点积分方案应至少具有 $2(p-2)$ 阶精度^[3,22]。由于式(16)的三次单元节点积分方案仅有1阶精度,低于2阶理论精度,故相应的集中质量矩阵给出的频率达不到最优收敛率。

为了提高节点积分方案的精度,可利用埃尔米特形函数 C^1 连续的优点,构造如下的梯度增强节点积分方案

$$\mathbf{M}^e = \sum_{i=1}^{n_{\text{en}}} [(\mathbf{J}\mathbf{N}^T \rho \mathbf{A}\mathbf{N})_{\xi=\xi_i} \omega_i^{[0]} + \left. \frac{d}{d\xi} (\mathbf{J}\mathbf{N}^T \rho \mathbf{A}\mathbf{N}) \right|_{\xi=\xi_i} \omega_i^{[1]}] \quad (17)$$

式中 $\omega_i^{[0]}$ 和 $\omega_i^{[1]}$ 分别为挠度及转角自由度对应的节点积分权重。与式(13)类似,这些积分权重通

过满足相应的积分准确性条件确定,即

$$\sum_{i=1}^{n_{en}} \left(\omega_i^{[0]} \xi_i^m + \omega_i^{[1]} \frac{d(\xi_i^m)}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_i} \right) = \int_{-1}^1 \xi^m d\xi \quad (18)$$

式中 $m=0,1,\dots,2n_{en}-1$ 。

根据式(17,18),可得具有3阶精度的两节点三次单元梯度增强节点积分方案,即

$$\begin{cases} \{\xi_1, \xi_2\} = \{-1, 1\} \\ \{\omega_1^{[0]}, \omega_2^{[0]}\} = \{1, 1\} \\ \{\omega_1^{[1]}, \omega_2^{[1]}\} = \{1/3, -1/3\} \end{cases} \quad (19)$$

将式(19)代入式(17),有

$$\mathbf{M}_B^e = \frac{\rho A h}{12} \begin{bmatrix} 6 & h & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -h \\ 0 & 0 & -h & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

如前所述,该质量矩阵满足数值积分精度要求,因此对应的频率解具有4阶最优收敛率。值得注意的是,如式(14,15)所示,埃尔米特挠度形函数和转角的导数在单元节点上均具有插值性,因此采用梯度增强节点积分法,根据式(17,18)计算得到的单元质量矩阵具有分块对角形式,本文称之为分块对角质量矩阵。

需要指出的是,当单元均布时,在对式(20)表示的分块对角矩阵 \mathbf{M}_B^e 进行组装后,整体质量矩阵内部节点对应的元素仍然呈现对角形式,与式(7)单元集中质量矩阵 \mathbf{M}_L^e 组装构造的整体质量矩阵内部节点元素完全相同,仅在左右边界处不同。正是由于两者组装后整体质量矩阵边界处的差异,解决了采用 \mathbf{M}_L^e 分析含有自由边界梁振动时的频率精度掉阶问题。反之,对于不含自由端的梁问题,由于施加边界条件时去掉了边界元素,两种方法的整体质量矩阵相同,均能达到最优收敛率。注意到式(19,20)的积分方案和质量矩阵在文献[11]中已有相关讨论,本文的重点在于探讨埃尔米特梁单元集中质量矩阵的边界条件敏感性产生机理,为发展高阶质量矩阵提供与一致质量矩阵精度阶次相同的质量矩阵构造方法,并可推广至高次梁单元。

3.2 三次埃尔米特梁单元的高阶质量矩阵

为了进一步提高频率计算精度,将 \mathbf{M}_B^e 和 \mathbf{M}_C^e 进行线性组合,构造含待定参数 β 的广义质量矩阵 $\mathbf{M}^e(\beta)$

$$\mathbf{M}^e(\beta) = (1-\beta)\mathbf{M}_B^e + \beta\mathbf{M}_C^e \quad (21)$$

显然,当 $\beta=1$ 时, $\mathbf{M}^e(\beta)$ 为一致质量矩阵 \mathbf{M}_C^e ; 当 $\beta=0$ 时, $\mathbf{M}^e(\beta)$ 退化为分块对角质量矩阵 \mathbf{M}_B^e 。

为了衡量频率计算精度,引入如下相对误差

$$e = \omega^h / \omega - 1, \quad \omega^h = (1+e)\omega \quad (22)$$

式中 $\omega = k^2 c$, k 为波数,波速 $c = \sqrt{EI/\rho A}$ 。

考虑如图5所示的典型三次单元均匀有限元网格,引入如下的节点位移简谐波假定

$$\mathbf{d}_i = \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{\theta} \end{Bmatrix} \exp[\iota(kx_i + \omega^h t)], \quad \iota = \sqrt{-1} \quad (23)$$

式中 \hat{u} 和 $\hat{\theta}$ 分别为典型节点 x_i 对应的挠度振幅和转角振幅。将式(23)代入式(1)

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

式中

$$A_{11} = [-54(\omega^h)^2 h^4 \beta - 5040c^2] \cos(kh) + 54(\omega^h)^2 h^4 (\beta - 35/9) + 5040c^2 \quad (25)$$

$$A_{12} = -A_{21} = \iota h [13(\omega^h)^2 h^4 \beta + 2520c^2] \sin(kh) \quad (26)$$

$$A_{22} = 3h [(\omega^h)^2 h^4 \beta + 280c^2] \cos(kh) - 4h [(\omega^h)^2 h^4 \beta - 420c^2] \quad (27)$$

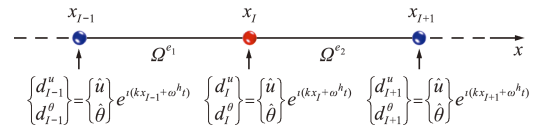


图5 三次埃尔米特单元节点位移的简谐波表示
Fig. 5 Harmonic wave representations for cubic Hermite elements

由式(24)的非零解条件,可知 $\det[A_{ij}] = 0$, 同时利用式(22),并忽略误差 e 高阶项,有

$$e \approx -a_0/a_1 \quad (28)$$

式中

$$a_0 = \frac{c^4}{6300h^4} \{ [-604800 + 54\beta(\beta - 5/3)k^8 h^8 - 1440(\beta + 35/2)k^4 h^4] \cos(kh) + 302400 + (\beta^2 k^8 h^8 + 720\beta k^4 h^4 + 302400) \cos(kh)^2 - 55\beta(\beta - 24/11)k^8 h^8 + 720(\beta - 70)k^4 h^4 \} \quad (29)$$

$$a_1 = \frac{c^4 k^4}{1575} \{ [\cos(kh)^2 + 54\cos(kh)] \beta^2 k^4 h^4 - [90\cos(kh) + 55\beta + 120] \beta k^4 h^4 + 360\cos(kh) [\beta \cos(kh) - 2\beta - 35] + 360(\beta - 70) \} \quad (30)$$

进一步对式(28)的余弦项关于 h 进行泰勒展开,可得 $\mathbf{M}^e(\beta)$ 频率误差表达式为

$$e(\beta) = \frac{2\beta-1}{1440} k^4 h^4 + \frac{28\beta^2-50\beta+25}{151200} k^6 h^6 + O(h^8) \quad (31)$$

显然,当 $\beta=1/2$ 时可获得6阶超收敛结果。此时的高阶质量矩阵以及对应的频率精度分别为

$$\mathbf{M}_H^e = \frac{1}{2}(\mathbf{M}_B^e + \mathbf{M}_C^e) = \frac{\rho Ah}{840} \times \begin{bmatrix} 366 & 57h & 54 & -13h \\ 57h & 4h^2 & 13h & -3h^2 \\ 54 & 13h & 366 & -57h \\ -13h & -3h^2 & -57h & 4h^2 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$e_H = -\frac{1}{21600}k^6h^6 + O(h^8) \quad (33)$$

将 $\beta=0$ 和 $\beta=1$ 代入式(31),即可得到 \mathbf{M}_B^e , \mathbf{M}_L^e 和 \mathbf{M}_C^e 的频率误差表达式,即

$$e_L = e_B = -\frac{1}{1440}k^4h^4 + O(h^6) \quad (34)$$

$$e_C = \frac{1}{1440}k^4h^4 + O(h^6) \quad (35)$$

其中,式(34)的误差结果从理论上验证了分块对角质量矩阵得到的频率具有4阶最优收敛性的结论。

值得指出的是,将一致质量矩阵 \mathbf{M}_C^e 和刚度矩阵 \mathbf{K}^e 组合,同样可得到高阶质量矩阵^[3],但该构造方法在推广到高次单元时伴随有波数依赖性问题^[18],而本文提出的高阶质量矩阵在推广到高次单元时则有效避免了该问题。

4 五次梁单元分块对角与高阶质量矩阵

4.1 五次埃尔米特梁单元的分块对角质量矩阵

根据式(18),经计算可得三节点五次单元的梯度增强节点积分方案,即

$$\begin{cases} \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} = \{-1, 0, 1\} \\ \{\omega_1^{[0]}, \omega_2^{[0]}, \omega_3^{[0]}\} = \{7/15, 16/15, 7/15\} \\ \{\omega_1^{[1]}, \omega_2^{[1]}, \omega_3^{[1]}\} = \{1/15, 0, -1/15\} \end{cases} \quad (36)$$

该积分方案具有5阶精度,对应的质量矩阵为

$$\mathbf{M}_B^e = \frac{\rho Ah}{60} \begin{bmatrix} 14 & h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & -h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -h & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

但是,经过与三次单元频率精度类似的分析可知,式(37)的 \mathbf{M}_B^e 及式(11)的 \mathbf{M}_L^e 对应的频率误差为

$$e_B = e_L = -\frac{1}{302400}k^6h^6 + O(h^8) \quad (38)$$

根据式(38),由式(36)得到的梯度增强节点积分方案无法满足理论要求的 $2(p-2)$ 阶,对于5次单元,需要6阶积分精度,因此 \mathbf{M}_B^e 的频率精度只能达到6阶的次优收敛。为了构造具有超收敛特

性的高阶质量矩阵,需要设计与一致质量矩阵频率精度相同,即具有8阶频率精度的质量矩阵^[16]。鉴于埃尔米特形函数在单元内部具有无限光滑的特点,在单元节点上再增加一个二阶梯度增强项,即

$$\mathbf{M}_I^e = \sum_{i=1}^3 \left[(JN^T \rho AN)_{\xi=\xi_i} \omega_i^{[0]} + \frac{d}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_i} (JN^T \rho AN) \omega_i^{[1]} \right] + \frac{d^2}{d\xi^2} \Big|_{\xi=0} (JN^T \rho AN) \omega_2^{[2]} \quad (39)$$

$$\sum_{i=1}^3 \left(\omega_i^{[0]} \xi_i^m + \omega_i^{[1]} \frac{d(\xi^m)}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_i} \right) + \omega_2^{[2]} \frac{d^2(\xi^m)}{d\xi^2} \Big|_{\xi=0} = \int_{-1}^1 \xi^m d\xi \quad (40)$$

式中 $\omega_2^{[2]}$ 为单元节点 ξ_2 处的二阶梯度项积分权重。根据式(39)和相应的积分精度条件式(40),建立如下具有7阶积分精度的二阶梯度增强的节点积分方案

$$\begin{cases} \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} = \{-1, 0, 1\} \\ \{\omega_1^{[0]}, \omega_2^{[0]}, \omega_3^{[0]}\} = \{11/35, 48/35, 11/35\} \\ \{\omega_1^{[1]}, \omega_2^{[1]}, \omega_3^{[1]}\} = \{1/35, 0, -1/35\} \\ \omega_2^{[2]} = 8/105 \end{cases} \quad (41)$$

将式(41)代入式(39),有

$$\mathbf{M}_I^e = \frac{\rho Ah}{420} \begin{bmatrix} 66 & 3h & 32 & 0 & 0 & 0 \\ 3h & 0 & 4h & 0 & 0 & 0 \\ 32 & 4h & 160 & 0 & 32 & -4h \\ 0 & 0 & 0 & 8h^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 32 & 0 & 66 & -3h \\ 0 & 0 & -4h & 0 & -3h & 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

显然,由于形函数的二阶梯度不具有插值性, \mathbf{M}_I^e 不再是分块对角矩阵,只作为构造高阶质量矩阵的过渡矩阵。 \mathbf{M}_I^e 满足数值积分精度要求,所以频率数值解具有8阶最优收敛率。

4.2 五次埃尔米特梁单元的高阶质量矩阵

对于五次单元,将式(42)的过渡质量矩阵 \mathbf{M}_I^e 和式(9)的一致质量矩阵 \mathbf{M}_C^e 进行组合,构造含待定参数 γ 的广义质量矩阵 $\mathbf{M}^e(\gamma)$

$$\mathbf{M}^e(\gamma) = (1-\gamma)\mathbf{M}_I^e + \gamma\mathbf{M}_C^e \quad (43)$$

对其进行频率精度分析,可得

$$e(\gamma) = \frac{21\gamma-13}{406425600}k^8h^8 + \frac{385\gamma^2-387\gamma+162}{402361344000} \times k^{10}h^{10} + O(h^{12}) \quad (44)$$

显然,当 $\gamma=13/21$ 时,频率精度为10阶,具有超收敛特性,相应的高阶质量矩阵以及频率误差为

$$\mathbf{M}_H^e = \frac{1}{21}(8\mathbf{M}_I^e + 13\mathbf{M}_C^e) = \frac{\rho Ah}{291060} \times \begin{bmatrix} 44620 & 2274h & 19888 & -2080h & 3406 & -377h \\ 2274h & 104h^2 & 2200h & -156h^2 & 377h & -39h^2 \\ 19888 & 2200h & 115456 & 0 & 19888 & -2200h \\ -2080h & -156h^2 & 0 & 3776h^2 & 2080h & -156h^2 \\ 3406 & 377h & 19888 & 2080h & 44620 & -2274h \\ -377h & -39h^2 & -2200h & -156h^2 & -2274h & 104h^2 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$e_H = -\frac{551}{3168595584000}k^{10}h^{10} + O(h^{12}) \quad (46)$$

对比起见,由式(44)同时给出一致质量矩阵 \mathbf{M}_C^e 和过渡质量矩阵 \mathbf{M}_I^e 的频率误差:

$$e_I = -\frac{13}{406425600}k^8h^8 + O(h^{10}) \quad (47)$$

$$e_C = \frac{1}{50803200}k^8h^8 + O(h^{10}) \quad (48)$$

5 数值验证

为了全面验证本文分块对角质量矩阵的鲁棒性与高阶质量矩阵的超收敛特性,采用 18,26 和

38 个三次单元和 9,13 和 19 个五次单元来计算图 6 所示的四种不同边界条件下梁的振动问题,即两端固支梁、简支梁、悬臂梁和两端自由梁,梁的几何和材料参数已在 2.2 节给出。由于基频的计算精度接近机器精度,为了更清楚地说明所提方法的收敛率和精度,图 6 给出了采用不同质量矩阵计算得到的第七阶频率的收敛结果对比。结果表明,传统的集中质量矩阵在含有自由端边界条件下会出现严重的频率精度掉阶问题。与此同时,基于梯度增强节点积分法的对角分块质量矩阵具有良好的鲁棒性,相应三次和五次单元的频率计算结果分别达到 4 阶最优收敛和 6 阶次优收敛。此外,由一致质量矩阵和基于梯度增强节点积分方案构建的质量矩阵进行最优线性组合得到的高阶质量矩阵同样不受边界条件的影响,对于三次和五次单元,频率结果呈现出 6 阶和 10 阶的超收敛特性,分别比相应的一致质量矩阵频率精度高出 2 阶。

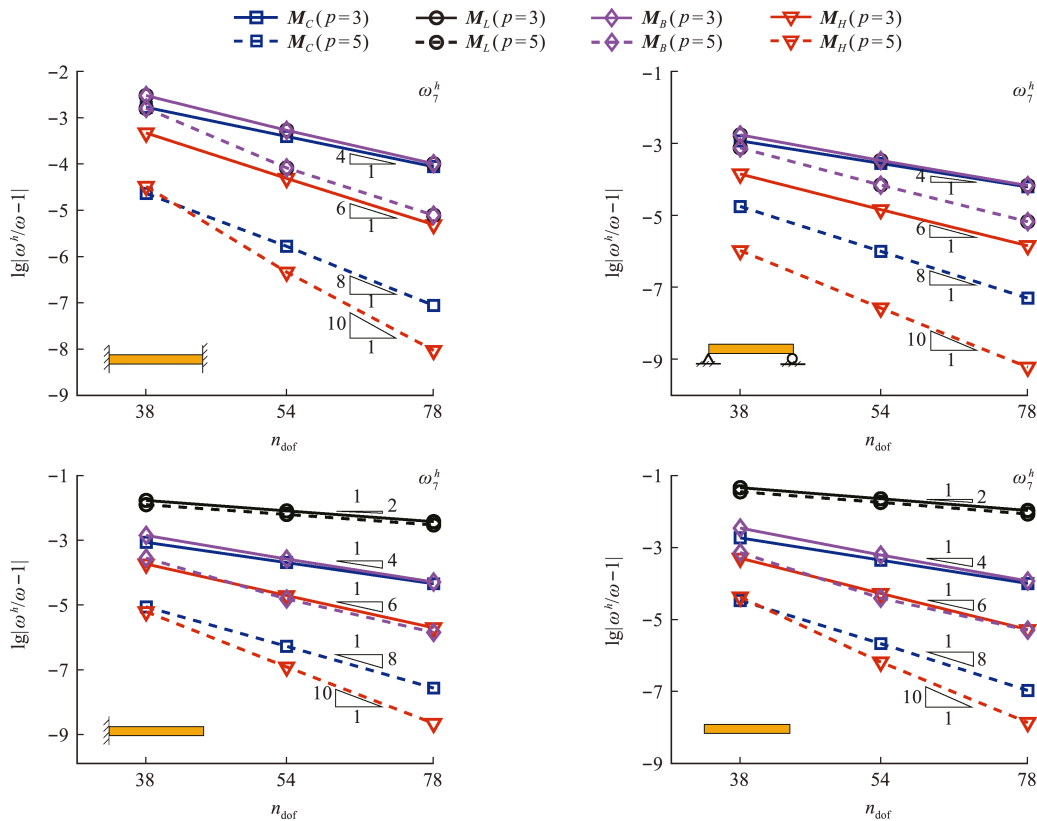


图 6 不同边界条件梁问题第七阶频率收敛结果对比
Fig. 6 Convergence comparison of the seventh frequency for the beam problems with different boundary conditions

6 结论

本文针对埃尔米特梁单元集中质量矩阵受边界条件影响的频率精度掉阶问题,从质量矩阵构造过程中的数值积分精度进行分析,阐明了精度掉阶

的原因在于单元集中质量矩阵的构造积分方法不满足最优收敛性对应的积分精度要求。在此基础上,利用埃尔米特梁单元挠度形函数和转角形函数导数均具有节点插值特性,发展了考虑梯度项的梯度增强节点积分方案,进而建立了具有分块对角形

式的单元质量矩阵。具体而言,三次和五次单元的分块对角质量矩阵的频率解分别具有稳定的4阶最优收敛和6阶次优收敛性质。需要指出的是,对于均布单元,由单元分块质量矩阵组装得到的整体质量矩阵除边界节点相关元素外仍然保持对角形式。为了进一步提高频率计算精度,通过将一致质量矩阵和与其具有同阶精度的梯度增强节点积分质量矩阵进行优化组合,建立了不受边界条件、波数等因素影响的高阶质量矩阵,相应频率精度比一致质量矩阵提升了2阶,具有超收敛特性。不同边界条件下梁的振动分析结果显示,埃尔米特梁单元的分块对角质量矩阵和高阶质量矩阵的数值频率均能达到理论精度,并具有良好的鲁棒性。

参考文献(References):

- [1] 徐卫敏,何剡江,吴 熙. 变截面欧拉梁自由振动分析的重采样微分求积法[J]. 计算力学学报, 2023, **40**(1): 73-78. (XU Wei-min, HE Shan-jiang, WU Xi. Resampling differential quadrature method for free vibration analysis of Euler beams with variable cross section[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2023, **40**(1): 73-78. (in Chinese))
- [2] Chen W L, Striz A G, Bert C W. A new approach to the differential quadrature method for fourth-order equations[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997, **40**(11): 1941-1956.
- [3] Hughes T J R. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*[M]. New York: Dover Publications, 2000.
- [4] Zienkiewicz O C, Taylor R L, Zhu J Z. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*[M]. Oxford: Elsevier, 2005.
- [5] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin methods[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, **37**(2): 229-256.
- [6] Hughes T J R, Cottrell J A, Bazilevs Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, **194**(39-41): 4135-4195.
- [7] Chen J S, Wang H P. New boundary condition treatments in meshfree computation of contact problems[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, **187**(3-4): 441-468.
- [8] Wang D D, Xuan J C. An improved NURBS-based isogeometric analysis with enhanced treatment of essential boundary conditions[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, **199**(37-40): 2425-2436.
- [9] 王东东, 轩军厂, 张灿辉. 几何精确 NURBS 有限元中边界条件施加方式对精度影响的三维计算分析[J]. 计算力学学报, 2012, **29**(1): 31-37. (WANG Dong-dong, XUAN Jun-chang, ZHANG Can-hui. Three-dimensional calculation and analysis of the influence of boundary conditions on accuracy in geometrically accurate NURBS finite element[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2012, **29**(1): 31-37. (in Chinese))
- [10] Belytschko T, Mindle W L. Flexural wave propagation behavior of lumped mass approximations[J]. *Computers & Structures*, 1980, **12**(6): 805-812.
- [11] Li Y N, Liang R Y, Wang D J. On convergence rate of finite element eigenvalue analysis with mass lumping by nodal quadrature[J]. *Computational Mechanics*, 1991, **8**(4): 249-256.
- [12] Archer G C, Whalen T M. Development of rotationally consistent diagonal mass matrices for plate and beam elements[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, **194**(6-8): 675-689.
- [13] Jund S, Salmon S. Arbitrary high-order finite element schemes and high-order mass lumping[J]. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 2007, **17**(3): 375-393.
- [14] Yang Y T, Zheng H, Sivaselvan M V. A rigorous and unified mass lumping scheme for higher-order elements[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017, **319**: 491-514.
- [15] Li X W, Wang D D, Xu X L, et al. A nodal spacing study on the frequency convergence characteristics of structural free vibration analysis by lumped mass Lagrangian finite elements[J]. *Engineering with Computers*, 2022, **38**(6): 5519-5540.
- [16] Wang D D, Liu W, Zhang H J. Superconvergent isogeometric free vibration analysis of Euler-Bernoulli beams and Kirchhoff plates with new higher order mass matrices[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2015, **286**: 230-267.
- [17] Wu J C, Wang D D, Lin Z. A meshfree higher order mass matrix formulation for structural vibration analysis[J]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2018, **18**(10): 1850121.
- [18] Wu Z Y, Wang D D, Hou S Y. A unified meshfree path to arbitrary order Hermite finite elements for Euler-Bernoulli beams[J]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2023, **23**: 2340029.
- [19] Wang D D, Chen J S. A Hermite reproducing kernel approximation for thin plate analysis with sub-domain

- stabilized conforming integration [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2008, **74**(3):368-390.
- [20] Chen S M, Wu C P, Wang Y M. A Hermite DRK interpolation-based collocation method for the analyses of Bernoulli-Euler beams and Kirchhoff-Love plates [J]. *Computational Mechanics*, 2011, **47**(4):425-453.
- [21] Wang L H, Liu Y, Liao Z, et al. Gradient reproducing kernel based Hermite collocation method (GHCM) for eigenvalue analysis of functionally graded thin plates with in-plane material [J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2023, **148**:73-89.
- [22] Strang W G, Fix G J. *An Analysis of The Finite Element Method* [M]. London: Wellesley-Cambridge, 1973.

Block diagonal and higher order mass matrices for Hermite beam elements

WANG Dong-dong*, WU Zhen-yu, HOU Song-yang

(Fujian Key Laboratory of Digital Simulations for Coastal Civil Engineering,
Department of Civil Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: The lumped mass matrices of Hermite finite elements for Euler-Bernoulli beams are often constructed by the row sum technique via neglecting the rotational entries, or by the nodal quadrature. However, such lumped mass matrices of Hermite beam elements exhibit a sudden drop of accuracy in frequency calculation in case of free boundary conditions. In this study, based upon the numerical integration accuracy requirement, the gradient-enhanced nodal quadrature rules are developed for both cubic and quintic elements. These nodal quadrature rules lead to a block diagonal form of element mass matrices, while the assembled global mass matrix still preserves a desirable diagonal pattern except a few entries associated with the boundary nodes. The block diagonal mass matrices of cubic and quintic elements have an optimal convergence rate of 4 and a sub-optimal convergence rate of 6, respectively. Subsequently, through rationally mixing the consistent mass matrices and the mass matrices generated by the gradient-enhanced nodal quadrature rules with equal accuracy orders, superconvergent higher-order mass matrices are attained for cubic and quintic Hermite beam elements. The accuracy and robustness of the proposed block diagonal and higher-order mass matrices are systematically demonstrated by numerical results.

Key words: Hermite beam element; vibration frequency; lumped mass matrix; block diagonal mass matrix; higher order mass matrix

引用本文/Cite this paper:

王东东, 吴振宇, 侯松阳. 埃尔米特梁单元的分块对角与高阶质量矩阵 [J]. 计算力学学报, 2024, **41**(1):178-185.

WANG Dong-dong, WU Zhen-yu, HOU Song-yang. Block diagonal and higher order mass matrices for Hermite beam elements [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2024, **41**(1):178-185.