

DOI: 10.7511/jslx20230903001

# 一种 Birkhoff 形式下结构动响应问题的保辛中点格式

邱志平<sup>\*1</sup>, 邱宇<sup>1,2</sup>

(1. 北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100191; 2. 北京航空航天大学 沈元学院, 北京 100191)

**摘要:** 结构动响应预测是结构设计的基础, 是结构振动控制、载荷识别的前提。本文在辛体系下针对结构动响应问题, 提出了一种 Birkhoff 形式下的保辛中点格式。首先引入状态变量, 并基于摄动方法将结构动响应方程转化为线性自治 Birkhoff 方程的形式, 进一步利用中心差分推导出线性自治 Birkhoff 方程的中点格式, 其证明是保辛的。该格式不要求 Birkhoff 方程系数矩阵非奇异, 因此适用于奇数维系统。两个不同数值算例的结果充分验证了本文方法的卓越性, 也凸显了相对于传统算法在计算精确度和稳定性方面的明显优势。

**关键词:** 结构动响应问题; Birkhoff 方程; 中点格式; 保辛算法; 摄动法

**中图分类号:** O342 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-4708(2024)01-0124-05

## 1 引言

结构动响应预测是工程中非常重要的问题, 同时是结构振动控制和载荷识别的基础<sup>[1]</sup>。结构动响应预测主要依靠的是动力学分析的相关方法, 而传统的结构动力学分析主要基于 Lagrange 体系, 以变分原理为基石<sup>[2]</sup>, 且基于此已经发展出了成熟且应用广泛的分析方法。Hamilton 对经典力学重新表述并基于此建立了 Hamilton 力学体系, 相较于 Lagrange 体系其具有明显的辛结构<sup>[3]</sup>但是不具有对应的变分原理。由 Birkhoff<sup>[4]</sup>提出的 Birkhoff 系统是 Hamilton 系统最自然的一般推广, 同时拥有辛结构和相应的变分原理<sup>[5]</sup>。其考虑耗散项, 相比 Hamilton 系统能够涵盖更多的实际力学系统。因此, 利用 Birkhoff 系统的相关方法和原理求解结构动响应问题具有重要的意义。

目前, Birkhoff 方程的求解方法大多从 Hamilton 算法<sup>[6-9]</sup>推广而来。张兴武等<sup>[10]</sup>将哈密顿辛差分格式推广至自治 Birkhoff 系统, 利用 Cayley 变换构造了自治 Birkhoff 系统的欧拉中点等辛差分格式。基于哈密顿系统的生成函数法, 苏红玲等<sup>[11]</sup>提出了构造 Birkhoff 系统辛算法的生成函数法。近年来, 文献<sup>[12-14]</sup>基于 Paff-Birkhoff 变分

原理, 通过离散方法直接获得了约束 Birkhoff 系统等的 Birkhoff 辛算法。

然而, 以上方法仍然存在局限性。自治 Birkhoff 系统的欧拉中点格式要求反对称系数矩阵非奇异, 因而无法适用于奇数维广义 Birkhoff 系统。生成函数法存在构造的困难, 实际应用存在障碍。离散的 Birkhoff 方法存在离散误差, 使得解存在波动性。

本文针对结构动响应问题, 提出一种 Birkhoff 形式下的保辛中点格式。首先将保守和非保守情形下的结构动响应方程化为线性自治的 Birkhoff 方程。之后对该线性自治方程进行中心差分, 经过推导得到其中点格式。该中点格式不需要对 Birkhoff 方程中的反对称矩阵求逆, 从而不要求该矩阵非奇异, 因此适用于奇数维广义 Birkhoff 系统。最后通过两个数值算例说明了本文方法的有效性。

## 2 Birkhoff 方程及其辛结构

Birkhoff 方程是哈密顿方程的自然推广, 其一般形式为<sup>[14]</sup>

$$\mathbf{K}(\mathbf{z}, t) \frac{d\mathbf{z}}{dt} - \left( \frac{\partial B(\mathbf{z}, t)}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{z}, t)}{\partial t} \right) = 0 \quad (1)$$

式中  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_m)^T \in \mathbb{R}^m$ ,  $m$  可以是偶数, 也可以是奇数。当  $m$  为奇数时, 式(1)称为奇数维 Birkhoff 方程<sup>[16]</sup>。式(1)中  $B(\mathbf{z}, t)$  和  $\mathbf{F}(\mathbf{z}, t)$  统称为 Birkhoff 函数, 特别称  $B(\mathbf{z}, t)$  为 Birkhoff 量。K 为一个反对称矩阵, 其元素满足

$$K_{ij} = \frac{\partial F_j}{\partial z_i} - \frac{\partial F_i}{\partial z_j} \quad (2)$$

收稿日期: 2023-09-03; 修改稿收到日期: 2023-10-10.

基金项目: 国家自然科学基金(12132001; 52192632); 沈元学院卓越研究基金(230123202)资助项目.

作者简介: 邱志平<sup>\*</sup>(1962-), 男, 博士, 教授  
(E-mail: zpqi@buaa.edu.cn).

当 Birkhoff 函数  $B$  和  $\mathbf{F}$  都不显含时间变量  $t$  时,称 Birkhoff 方程(1)为自治的,其形式为

$$\mathbf{K}(\mathbf{z}) \frac{d\mathbf{z}}{dt} - \frac{\partial B(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} = 0 \quad (3)$$

当 Birkhoff 函数  $\mathbf{F}$  不显含时间  $t$ ,而  $B$  显含时间  $t$  时,称 Birkhoff 方程(1)为半自治的,其形式为

$$\mathbf{K}(\mathbf{z}) \frac{d\mathbf{z}}{dt} - \frac{\partial B(\mathbf{z}, t)}{\partial \mathbf{z}} = 0 \quad (4)$$

当 Birkhoff 函数  $B$  和  $\mathbf{F}$  都显含时间  $t$  时,此时称为非自治的,即为式(1)的形式。

对于自治 Birkhoff 方程(3),当系数矩阵  $\mathbf{K}$  为常数矩阵,且 Birkhoff 函数  $B$  为变量  $\mathbf{z}$  的二次型,即

$$B = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{G} \mathbf{z} \quad (5)$$

称方程(3)为线性自治 Birkhoff 方程,其中  $\mathbf{G}$  为对称的常数矩阵。线性自治 Birkhoff 方程的形式可以表示为

$$\mathbf{K} \frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{G} \mathbf{z} \quad (6)$$

由  $K_{ij}$  可以定义一个 2-形式,用局部坐标表示为

$$\Omega = \sum_{i,j=1}^m K_{ij}(\mathbf{z}) dz_i \wedge dz_j \quad (7)$$

闭 2-形式(7)包括了自治和半自治 Birkhoff 方程的几何结构<sup>[14]</sup>。

### 3 结构动响应问题的线性自治 Birkhoff 形式

结构动响应问题的控制方程可以表示为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{S}\mathbf{x} = \mathbf{F}(t) \quad (8)$$

式中  $\mathbf{M}$  为质量矩阵,  $\mathbf{D}$  为阻尼矩阵,  $\mathbf{S}$  为刚度矩阵,其都是对称矩阵。

首先考虑保守情况,即  $\mathbf{D} = 0$ , 且不存在外激励载荷  $\mathbf{F}(t)$ 。此时动响应方程的形式为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{S}\mathbf{x} = 0 \quad (9)$$

通过引入状态变量  $\mathbf{z} = (\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x})^T$ , 可将式(9)变换为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ -\mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \mathbf{z} \quad (10)$$

将其系数矩阵记为  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{C}$ , 那么方程(10)化为

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{C}\mathbf{z} \quad (11)$$

显然其是线性自治 Birkhoff 方程的形式。

本文考虑非保守情况,引入状态变量  $\mathbf{z} = (\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x})^T$ , 那么式(8)等价于

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ -\mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{F}(t) \end{bmatrix} \quad (12)$$

将其系数矩阵分别记为  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{N}$ , 方程(12)化为

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{B}\mathbf{z} + \mathbf{N} \quad (13)$$

注意其中  $\mathbf{A}$  为反对称矩阵。

利用摄动方法<sup>[17]</sup>, 可将方程(13)化为一系列线性自治 Birkhoff 方程<sup>[17]</sup>。引入小参数  $\epsilon$ , 将矩阵  $\mathbf{B}$  表示为

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \epsilon \mathbf{B}_1 \quad (14)$$

式中  $\mathbf{B}_0 = (\mathbf{B}^T + \mathbf{B})/2$ ,  $\mathbf{B}_1 = (\mathbf{B}^T - \mathbf{B})/2$ 。将自变量  $\mathbf{z}$  表示为摄动级数展开形式

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + \mathbf{z}_1 \epsilon + \mathbf{z}_2 \epsilon^2 + \dots \quad (15)$$

将式(14,15)代入式(13)可得一系列摄动方程

$$\begin{aligned} \epsilon^0: \mathbf{A}\dot{\mathbf{z}}_0 &= \mathbf{B}_0 \mathbf{z}_0 + \mathbf{N} \\ \epsilon^1: \mathbf{A}\dot{\mathbf{z}}_1 &= \mathbf{B}_0 \mathbf{z}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{z}_0 \\ \epsilon^2: \mathbf{A}\dot{\mathbf{z}}_2 &= \mathbf{B}_0 \mathbf{z}_2 + \mathbf{B}_1 \mathbf{z}_1 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (16)$$

对于 0 阶摄动方程,可以转化为一个线性自治 Birkhoff 方程

$$\mathbf{A}\dot{\tilde{\mathbf{z}}}_0 = \mathbf{B}_0 \tilde{\mathbf{z}}_0 \quad (17)$$

式中  $\mathbf{A}$  为一个反对称矩阵,  $\mathbf{B}_0$  为一个对称矩阵。其中  $\tilde{\mathbf{z}}_0$  和  $\mathbf{z}_0$  满足关系  $\tilde{\mathbf{z}}_0 = \mathbf{z}_0 - \mathbf{c}$ 。

同样地,可以将剩余的摄动方程通过变量变换的形式化为一组线性自治 Birkhoff 方程,即

$$\begin{aligned} \epsilon^0: \mathbf{A}\dot{\tilde{\mathbf{z}}}_0 &= \mathbf{B}_0 \tilde{\mathbf{z}}_0 \\ \epsilon^1: \mathbf{A}\dot{\tilde{\mathbf{z}}}_1 &= \mathbf{B}_0 \tilde{\mathbf{z}}_1 \\ \epsilon^2: \mathbf{A}\dot{\tilde{\mathbf{z}}}_2 &= \mathbf{B}_0 \tilde{\mathbf{z}}_2 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (18)$$

### 4 线性自治 Birkhoff 方程的中点格式

对于形如式(6)的线性自治 Birkhoff 方程,对其进行中心差分,可得

$$\mathbf{K}(\mathbf{z}^{k+1} - \mathbf{z}^k) / \tau = \mathbf{G}(\mathbf{z}^{k+1} + \mathbf{z}^k) \quad (19)$$

式中  $\tau$  为时间步长,  $\mathbf{z}^k$  和  $\mathbf{z}^{k+1}$  为第  $k$  和  $k+1$  个时间步  $\mathbf{z}$  的值。对式(19)整理可得

$$\mathbf{z}^{k+1} = \frac{2\mathbf{G}^{-1}\mathbf{K}/\tau + \mathbf{I}}{2\mathbf{G}^{-1}\mathbf{K}/\tau - \mathbf{I}} \mathbf{z}^k \quad (20)$$

那么步进映射  $\mathbf{z}^k \mapsto \mathbf{z}^{k+1}$  的 Jacobi 矩阵为

$$\frac{\partial \mathbf{z}^{k+1}}{\partial \mathbf{z}^k} = \Phi_\tau = \frac{2\mathbf{G}^{-1}\mathbf{K}/\tau + \mathbf{I}}{2\mathbf{G}^{-1}\mathbf{K}/\tau - \mathbf{I}} \quad (21)$$

对于矩阵  $\mathbf{P} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{K}$ , 显然有

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\mathbf{P} + \mathbf{P}^T\mathbf{K} &= \mathbf{K}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{K} + \mathbf{K}^T\mathbf{G}^{-T}\mathbf{K} = \\ &= \mathbf{K}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{K} - \mathbf{K}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{K} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

因此  $\mathbf{P}$  为无穷小辛矩阵,同理乘上常数系数后  $2\mathbf{G}^{-1}\mathbf{K}/\tau$  仍为无穷小辛矩阵,而  $\Phi_\tau$  为无穷小辛矩阵  $2\mathbf{G}^{-1}\mathbf{K}/\tau$  的 Cayley 变换<sup>[10]</sup>。于是有

$$\Phi_\tau^T \mathbf{K} \Phi_\tau = \mathbf{K} \quad (23)$$

线性自治 Birkhoff 方程的辛结构为式(7)的形式,其矩阵形式为

$$\Omega = \frac{1}{2} d\mathbf{z}^T \wedge \mathbf{K} d\mathbf{z} \quad (24)$$

对于离散的线性自治 Birkhoff 方程,第  $k$  和  $k+$

1 两个时间步的辛结构之差为

$$\begin{aligned} \Omega^{k+1} - \Omega^k &= \frac{1}{2} (\mathbf{dz}^{k+1})^T \wedge \mathbf{K} \mathbf{dz}^{k+1} - \frac{1}{2} (\mathbf{dz}^k)^T \wedge \mathbf{K} \mathbf{dz}^k = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{z}^{k+1}}{\partial \mathbf{z}^k} \mathbf{dz}^k \right)^T \wedge \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{z}^{k+1}}{\partial \mathbf{z}^k} \mathbf{dz}^k - \frac{1}{2} (\mathbf{dz}^k)^T \wedge \mathbf{K} \mathbf{dz}^k \end{aligned} \quad (25)$$

将式(21)代入式(25),并利用关系式(23),可得

$$\begin{aligned} \Omega^{k+1} - \Omega^k &= \frac{1}{2} (\mathbf{dz}^k)^T \Phi_\tau^T \wedge \mathbf{K} \Phi_\tau \mathbf{dz}^k - \frac{1}{2} (\mathbf{dz}^k)^T \wedge \mathbf{K} \mathbf{dz}^k = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{dz}^k)^T [\Phi_\tau^T \wedge \mathbf{K} \Phi_\tau - \mathbf{K}] \mathbf{dz}^k = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

因此,本文提出的中点格式(20)是保辛的。

## 5 数值算例

### 5.1 三自由度弹簧质点系统

首先将本文方法应用于一个三自由度的弹簧质点系统,其是一个保守系统,如图1所示。

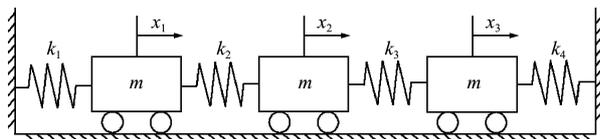


图1 三自由度弹簧质点系统

Fig. 1 Three-degree-of-freedom spring-mass system

每个质量块的质量均为  $m = 1 \text{ kg}$ ,而弹簧的刚度系数具有较大的分散性,用以验证算法的稳定性,其分别为  $k_1 = 1000 \text{ N/m}$ ,  $k_2 = 100 \text{ N/m}$ ,  $k_3 = 10 \text{ N/m}$ ,  $k_4 = 1 \text{ N/m}$ 。该系统运动方程的矩阵形式为

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{S} \mathbf{x} = 0 \quad (27)$$

式中  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ , 质量矩阵  $\mathbf{M}$  和刚度矩阵  $\mathbf{S}$  分别为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1100 & -100 & 0 \\ -100 & 110 & -10 \\ 0 & -10 & 11 \end{bmatrix} \quad (28)$$

将初始条件设置为

$$\mathbf{x} = (0, 1, 0), \quad \dot{\mathbf{x}} = (0, 0, 0) \quad (29)$$

对于式(27)的保守系统,可以直接引入新变量化为线性子自治 Birkhoff 方程。令

$$\mathbf{z} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, x_1, x_2, x_3)^T \quad (30)$$

那么方程形式为

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{B} \mathbf{z} \quad (31)$$

式中  $\mathbf{A}$  为反对称矩阵,其形式为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$\mathbf{B}$  为对称矩阵,其具体形式为

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1100 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -100 & 110 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 11 \end{bmatrix} \quad (33)$$

首先检验算法在大步长下的表现,取步长为  $0.1 \text{ s}$ ,仿真时间为  $2 \text{ s}$ ,对比不同算法在  $x_1$  位移求解的表现。 $x_1$  位移解析解表达式为

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -0.0990 \cos(\omega_1 t) + 0.0979 \cos(\omega_2 t) + \\ &= 0.0011 \cos(\omega_3 t) \end{aligned} \quad (34)$$

式中  $\omega_1 = \sqrt{1110.0009}$ ,  $\omega_2 = \sqrt{101.0989}$

$$\omega_3 = \sqrt{9.9002} \quad (35)$$

在此步长下,四阶龙格库塔方法很快就发散了,如图2所示。而本文所提保辛中点格式与解析解吻合良好,如图3所示。这说明了本文的保辛中点格式具有良好的稳定性,即便在大步长下求解大刚度差异系统响应,仍能保持高精度。

进一步检验算法在长时间计算下的表现,仍取步长为  $0.1 \text{ s}$ ,取仿真时间为  $20 \text{ s}$ 。本文的保辛中点格式的结果与解析解的对比如图4所示。可以看出,在长时间计算下,本文的保辛中点格式仍与解析解保持一致,这说明了算法的高精度。

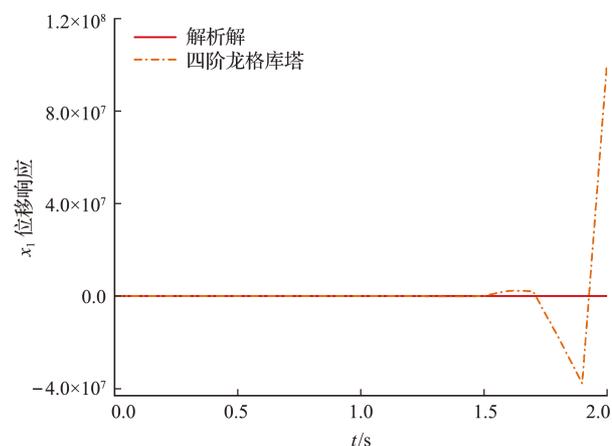


图2 四阶龙格库塔方法与解析解对比

Fig. 2 Comparison of the results of the fourth-order Runge-kutta method with the analytic solution

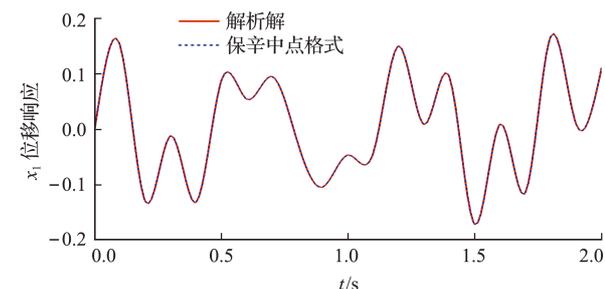


图3 本文的保辛中点格式与解析解对比

Fig. 3 Comparison of the results of the symplectic midpoint method proposed with the analytic solution

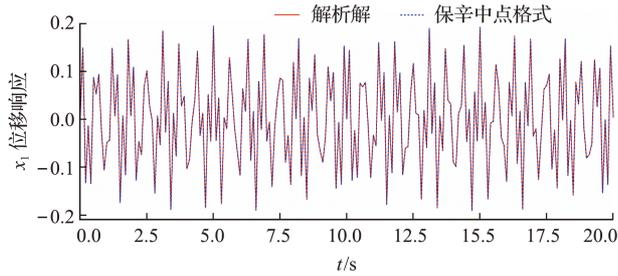


图4 长时间计算下本文的保辛中点格式与解析解对比

Fig. 4 Comparison of the results of the symplectic midpoint method proposed with the analytic solution under long-time calculation

5.2 两室建筑振动问题

一些大型建筑,如机场航站楼和大型仓库等,在研究这些建筑的内部压力时,可以将其简化为具有开口的两室建筑。下面考虑这样一个两室建筑,如图5所示,其是一个非保守系统。

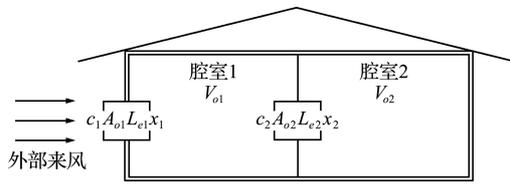


图5 两室建筑

Fig. 5 Two-compartment building

该系统运动方程的矩阵形式为

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Sx = F(t) \quad (36)$$

式中

$$M = I, C = \begin{bmatrix} c_{j1}/(\rho_a c_1 A_{o1} L_{e1}) & 0 \\ 0 & c_{j2}/(\rho_a c_2 A_{o2} L_{e2}) \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \omega_{11}^2 & -\frac{L_{e2}}{L_{e1}} \omega_{12}^2 \\ -\frac{L_{e1}}{L_{e2}} \omega_{11}^2 & \omega_{22}^2 + \omega_{12}^2 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} q C_{PW} \\ \rho_a L_{e1} \end{bmatrix}^T \quad (37)$$

$$\omega_{11} = \sqrt{\frac{\gamma P_a c_1 A_{o1}}{\rho_a L_{e1} V_{o1}}}, \omega_{22} = \sqrt{\frac{\gamma P_a c_2 A_{o2}}{\rho_a L_{e2} V_{o2}}}, \omega_{12} = \sqrt{\frac{\gamma P_a c_2 A_{o2}}{\rho_a L_{e2} V_{o1}}} \quad (38)$$

各个参数的取值列入表1<sup>[19]</sup>。

采用本文保辛中点格式求解,并与四阶龙格库塔方法比较,取时间步长为0.2s,仿真时间为2s。取四阶龙格库塔方法在 $2 \times 10^{-4}$ s步长下的结果作为参考解,对比算法的精度,如图6所示。可以

表1 两室建筑参数取值

Tab. 1 Parameter values of the two-compartment building

参数	取值	参数	取值
$\rho_a$	1.22	$c_{j1}$	0.3
$c_1$	0.6	$c_{j2}$	0.3
$c_2$	0.6	$C_{PW}$	1
$V_{o1}$	300	$A_{o1}$	2
$V_{o2}$	200	$A_{o2}$	2
$\gamma$	1.4	$L_{e1}$	1.03
$q$	125.7	$L_{e2}$	1.03
$P_a$	$1.013 \times 10^5$		

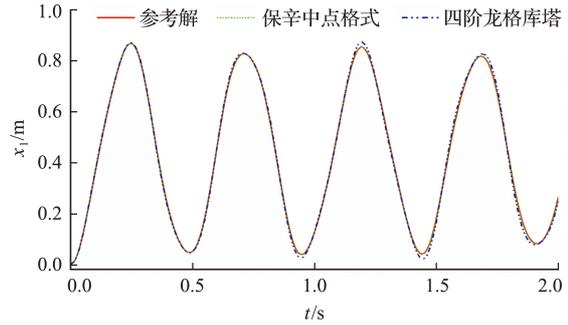


图6 本文的保辛中点格式与四阶龙格库塔和参考解的比较

Fig. 2 Comparison of the results of the symplectic midpoint method proposed with the fourth-order Runge-kutta method and the analytic solution

看出,对于非保守系统,本文的保辛中点格式仍具有高精度。

6 结论

针对结构动响应问题,本文提出了一种 Birkhoff 形式下的保辛中点格式。这种方法相较于传统方法,具有精度高和稳定性强的特点。相较于其他隐式的保辛离散方法,本文的显式方法需要更少的迭代步骤和计算资源,因此在实际应用中具有更高的求解效率。此外,由于算法中无需对反对称系数矩阵求逆,因此也适用于奇数维 Birkhoff 方程。两个数值算例表明了算法的有效性,相比于四阶龙格库塔更具有优势。

需要注意的是,本文方法是在线性 Birkhoff 系统的框架内提出的。对于非线性系统,由于其非线性系数矩阵的存在,本文方法无法直接应用。然而借助一些变换方法(如摄动法等),存在将本文方法应用于非线性 Birkhoff 系统的可能性。

参考文献(References):

- [1] Humar J L. *Dynamics of Structures*[M]. CRC press, 2012.
- [2] Du C F, Zhang D G, Li L, et al. A node-based smoothed point interpolation method for dynamic analysis of rotating flexible beams[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2018, **34**(2): 409-420.
- [3] 钟万勰. 对一般 Hamilton 体系近似解保辛条件的讨论[J]. *计算力学学报*, 2005, **22**(5): 511. (ZHONG Wan-xie. Discussion on the paper "Is the WKBJ approximation symplectic conservative?"[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2005, **22**(5): 511. (in Chinese))
- [4] Birkhoff G D. *Dynamical Systems*[M]. New York: American Mathematical Society, 1927.
- [5] 梅凤翔. 广义 Birkhoff 系统动力学[M]. 北京: 科学出版社, 2013. (MEI Feng-xiang. *Generalized Birkhoff System Dynamics* [M]. Beijing: Science Press, 2013. (in Chinese))
- [6] Kang F, Wu H, Qin M, et al. Construction of canoni-

- cal difference schemes for Hamiltonian formalism via generating functions[J]. *Journal of Computational Mathematics*, 1989. DOI: 10. 1016/0377-0427 (89) 90081-2.
- [7] Sanz-Serna J M. Runge-Kutta schemes for Hamiltonian systems[J]. *BIT Numerical Mathematics*, 1988, **28**(4):877-883.
- [8] 姜宇, 王博, 张博涵, 等. 三维波纹型可延展结构振动特性的辛分析[J/OL]. *计算力学学报* (2023-03-10) [2023-10-10]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/21-1373.O3.20230309.0959.010.html>. (JIANG Yu, WANG Bo, ZHANG Bo-han, et al. Symplectic analysis of vibration characteristics of three dimensional corrugated stretchable structures [J/OL]. *Chinese Journal of Computational Mechanics* (2023-03-10) [2023-10-10]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/21-1373.O3.20230309.0959.010.html>. (in Chinese))
- [9] Sun Z J, Wu Z M. Meshless conservative scheme for multi-variate nonlinear Hamiltonian PDEs[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2018, **76**(2):1168-1187.
- [10] 张兴武, 武际可, 朱海平, 等. 自治 Birkhoff 系统的广义正则变换和辛算法研究[J]. *应用数学和力学*, 2002, **23**(9):915-920. (ZHANG Xing-wu, Wu Ji-ke, Zhu Hai-ping, et al. Generalized canonical transformation and symplectic algorithm of the autonomous Birkhoffian systems [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, **23**(9):915-920. (in Chinese))
- [11] Su H L, Qin M Z. Symplectic schemes for Birkhoffian system[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2004, **41**(3):329-334.
- [12] He L, Wu H B, Mei F X. Variational integrators for fractional Birkhoffian systems [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, **87**(4):2325-2334.
- [13] 孔新雷. Birkhoff 系统的保结构算法及离散最优控制 [D]. 北京理工大学, 2014. (KONG Xin-lei. Structure Preserving Algorithms and Discrete Optimal Control for Birkhoffian Systems [D]. Beijing Institute of Technology, 2014. (in Chinese))
- [14] Kong X L, Wu H B, Mei F X. Structure-preserving algorithms for Birkhoffian systems[J]. *Journal of Geometry and Physics*, 2012, **62**(5):1157-1166.
- [15] 苏红玲, 秦孟兆. 微分方程的广义辛算法 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2015. (SU Hong-ling, QIN Meng-zhao. *Generalized Symplectic Algorithms for Differential Equations* [M]. Beijing: Peking University Press, 2015. (in Chinese))
- [16] 崔金超. Birkhoff 动力学函数的构造方法与广义 Birkhoff 方程的积分理论 [D]. 北京理工大学, 2014. (CUI Jin-chao. Construction Methods of Birkhoffian Functions and Integral Theories of Generalized Birkhoff's Equations [D]. Beijing Institute of Technology, 2014. (in Chinese))
- [17] Qiu Z P, Elishakoff I. Antioptimization of structures with large uncertain-but-non-random parameters via interval analysis[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998, **152**(3-4):361-372.
- [18] Qiu Z P, Qiu Y. Symplectic central difference scheme for quasi-linear autonomous Birkhoffian systems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2023, **440**:127661.
- [19] Yu X, Quan Y, Gu M. Responses of wind-induced internal pressure in a two-compartment building with a dominant opening and background porosity—Part 1: Theoretical formulation and experimental verification [J]. *Journal of Central South University*, 2012, **19**(10):2940-2948.

## A symplectic midpoint scheme for structural dynamic response problems in Birkhoffian form

QIU Zhi-ping<sup>\*1</sup>, QIU Yu<sup>1,2</sup>

(1. School of Aeronautic Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China;  
2. Shenyuan Honors College, Beihang University, Beijing 100191, China)

**Abstract:** Structural dynamic response prediction is the foundation of structural design and serves as a prerequisite for structural vibration control and load identification. In this paper, we address structural dynamic response problems within the symplectic framework and propose a symplectic midpoint scheme in Birkhoffian form. The state variables are first introduced and the structural dynamic response equations are transformed into the form of linear autonomous Birkhoffian equations based on the perturbation method. The central difference is further used to derive the midpoint scheme of the linear autonomous Birkhoffian equation, which is proved to be symplectic. This scheme does not require the coefficient matrix of the Birkhoffian equation to be non-singular and is therefore suitable for odd-dimensional systems. The results from two distinct numerical test cases provide ample validation of the excellence of the method presented in this paper, highlighting the significant advantages it possesses over traditional algorithms in terms of computational accuracy and stability.

**Key words:** structural dynamic response problem; Birkhoffian equation; midpoint scheme; symplectic algorithm; perturbation method

引用本文/Cite this paper:

邱志平, 邱宇. 一种 Birkhoff 形式下结构动响应问题的保辛中点格式 [J]. *计算力学学报*, 2024, **41**(1):124-128.

QIU Zhi-ping, QIU Yu. A symplectic midpoint scheme for structural dynamic response problems in Birkhoffian form [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2024, **41**(1):124-128.