

辛体系下含对称破缺因素动力学系统的 近似守恒律

胡伟鹏^{*1}, 林志华², 邓子辰³

(1. 西安理工大学 土木建筑工程学院, 西安 710048; 2. 香港城市大学 建筑学及土木工程学系, 香港 999077;

3. 西北工业大学 力学与土木建筑学院, 西安 710072)

摘要:自冯康先生创立 Hamilton 系统辛几何算法以来, 诸如辛结构和能量守恒等守恒律逐渐成为动力学系统数值分析方法有效性的检验标准之一。然而, 诸如阻尼耗散、外部激励与控制及变参数等对称破缺因素是实际力学系统本质特征, 影响着系统的对称性与守恒量。因此, 本文在辛体系下讨论含有对称破缺因素的动力学系统的近似守恒律。针对有限维随机激励 Hamilton 系统, 讨论其辛结构; 针对无限维非保守动力学系统、无限维变参数动力学系统、Hamilton 函数时空依赖的无限维动力学系统和无限维随机激励动力学系统, 重点讨论了对称破缺因素对系统局部动量耗散的影响。上述结果为含有对称破缺因素的动力学系统的辛分析方法奠定数学基础。

关键词:近似守恒律; 非保守; 对称破缺; 辛

中图分类号:O302

文献标志码:A

文章编号:1007-4708(2024)01-0118-06

1 引言

冯康先生^[1]在 1984 年双微国际会议上针对有限维 Hamilton 系统提出的辛算法, 打破了提高数值精度作为数值分析方法研究的唯一目标这一局限性, 开启了计算数学的另一扇大门, 冯康先生也因此荣获 1997 年国家自然科学一等奖, 并被菲尔兹奖得主丘成桐先生誉为“中国数学的三驾马车”之一。此后, 各种构造 Hamilton 系统辛离散格式的途径相继报道^[2], 极大地促进了辛几何算法在计算数学领域的应用。

将辛体系引入弹性力学分析^[3,4], 并发展经典力学的辛求解体系^[5,6], 是钟万勰先生团队在计算力学领域开创性的研究工作之一。为了更好地表述连续变形系统(无限维系统)的辛结构, 以及在动力学演化过程中的局部能量/动量随时间的演化和在空间的流动规律, 文献^[7,8]分别从变分原理和 Legendre 变换出发, 发现了无限维 Hamilton 系统的时空联合辛结构, 即多辛结构, 并在多辛几何框架下, 给出了无限维 Hamilton 系统局部能量和局部动量守恒律的显式数学表述, 这些守恒律在无限

维 Hamilton 系统数值分析中的重要性^[9,10]已经逐渐得到学术界认可。

辛/多辛结构源自于理想数学物理模型的对称性^[11], 在其数值解的几何结构分析中扮演着重要角色。然而, 完美的辛/多辛结构在实际的力学系统中不存在, 因为工程师设计的力学系统是需要与外界交换能量的, 即需要对外做功或者接受外界对其做功, 无论系统中的非保守广义力是确定性的还是随机的。同时, 力学系统本身也存在各种各样的不对称性, 如结构不对称和载荷不对称等。随着现代力学的发展, 力学系统参数可能不再是恒定的, 具体体现在结构构型可变及材料参数时变等方面。上述动力学对称破缺的出现, 破坏了理想数学物理模型的对称性, 也破坏了系统大量的守恒律。针对无限维弱耗散 Hamilton 动力学系统, Hu 等^[12-15]基于多辛几何理论, 发展了广义多辛分析方法, 并在此基础上建立了动力学对称破缺因素与系统局部能量耗散之间的映射关系^[16,17]。

本文在上述研究成果基础上, 在辛体系下讨论含对称破缺的动力学系统的近似守恒律, 为辛方法应用于非保守动力学系统的数值分析奠定数学基础。

2 有限维随机激励 Hamilton 系统的 近似守恒律

一切忽略耗散效应的有限维动力学系统, 均可以表述为下述 Hamilton 正则形式

收稿日期: 2023-08-31; 修改稿收到日期: 2023-11-01.

基金项目: 国家自然科学基金(12172281; 11872303; 11972284);

陕西省杰出青年科学基金(2019JC-29)资助项目.

作者简介: 胡伟鹏^{*}(1977-), 男, 博士, 教授

(E-mail: wphu@nwpu.edu.cn).

$$\dot{q} = \partial H(q, p) / \partial p, \dot{p} = -(\partial H(q, p) / \partial q) \quad (1)$$

式中 $q \in \mathbf{R}^n$ 为描述质点运动的广义坐标列向量, $p \in \mathbf{R}^n$ 为对应的对偶向量, $H(q, p)$ 为系统总能量, 即 Hamilton 函数。若令 $z = (q, p)^T$ 为系统的状态向量, 则 Hamilton 正则形式(1)可进一步写成紧凑形式为

$$\dot{z} = J^{-1} H_z \quad (2)$$

式中 $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$ (I_n 为 n 阶单位阵), $H_z = [\partial H(q, p) / \partial p, \partial H(q, p) / \partial q]^T$ 。

在经典相空间 $\mathbf{R}^{2n} = \mathbf{R}_p^n \times \mathbf{R}_q^n$ 上, 每一个 $2n$ 维流形均同胚于 $\mathbf{R}^{2n}$ 的原点的邻域, 这样就构成了一个标准的辛结构, 即微分 2-形式

$$\omega_J = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i \quad (3)$$

此外, Hamilton 函数的全微分为

$$dH(q, p)/dt = \partial H / \partial p \cdot \dot{p} + \partial H / \partial q \cdot \dot{q} = \dot{q} \cdot \dot{p} - \dot{p} \cdot \dot{q} = 0 \quad (4)$$

式(4)表明, 有限维 Hamilton 系统的总能量不随时间演化, 为一个严格的守恒量。

对于 n 维非线性随机动力学系统的柯西问题^[18]

$$\begin{aligned} dP &= f(t, P, Q)dt + \sum_{r=1}^m \sigma_r(t, P, Q) \circ d\omega_r(t) \\ P(t_0) &= p \\ dQ &= g(t, P, Q)dt + \sum_{r=1}^m \gamma_r(t, P, Q) \circ d\omega_r(t) \\ Q(t_0) &= q \end{aligned} \quad (5)$$

若采用随机平均法, 固然可以得到随机动力学系统(5)的一些特殊的近似解析解, 但是并不能得到其诸如辛结构和修正的能量守恒律等本质属性。其中, $\omega_r(t)$ 为相互独立的维纳过程, $\circ$ 为 Stratonovich 积。

基于辛几何理论, 系统(5)的辛结构可表述为

$$dP \wedge dQ = dp \wedge dq \quad (6)$$

也就是说, 对于随机激励有限维 Hamilton 系统, 辛结构依然存在。

3 含对称破缺因素的无限维动力学系统的近似守恒律

在 Bridges^[7] 建立的多辛几何框架体系下, 对于依赖于时间、空间 n 维的保守 Hamilton 连续系统, 可以写成多辛对称形式为

$$M \partial_t z + \sum_{i=1}^n K_i \partial_{x_i} z = \nabla_z S(z) \quad (z \in \mathbf{R}^d) \quad (7)$$

式中 $M, K_i \in \mathbf{R}^{d \times d}$ ($i=1, 2, \dots, n$) 为反对称常数矩阵, $S: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ 为光滑的 Hamilton 函数, $z = z(t,$

$x_1, x_2, \dots, x_n$) 为状态向量。

并且已经证明, 多辛对称形式(7)必然精确满足如下三种守恒律。

(1) 多辛守恒律

$$\partial_t(\omega) + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}(\kappa_i) = 0 \quad (8)$$

式中 $\omega = dz \wedge M dz$, $\kappa_i = dz \wedge K_i dz$ ($i=1, 2, \dots, n$)。

(2) 局部能量守恒律

$$\partial_t e + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f_i = 0 \quad (9)$$

式中 能量密度为 $e = S(z) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n z^T K_i \partial_{x_i} z$, 能量通量为 $f_i = \frac{1}{2} z^T K_i \partial_t z$ ($i=1, 2, \dots, n$)。

(3) x_m ($m=1, 2, \dots, n$) 方向的局部动量守恒律

$$\partial_t(h_m) + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} g_{mi} = 0 \quad (10)$$

式中 $h_m = \frac{1}{2} z^T M \partial_{x_m} z$, $g_{mm} = S(z) - \frac{1}{2} (z^T M \partial_t z - \sum_{i=1}^{m-1} z^T K_i \partial_{x_i} z - \sum_{i=m+1}^n z^T K_i \partial_{x_i} z)$ 以及 $g_{mi} = \frac{1}{2} z^T K_i \partial_{x_m} z$ ($i=1, \dots, m-1, m+1, \dots, n$)。

如前所述, 实际工程中并不存在保守的 Hamilton 系统, 即动力学对称破缺因素必定存在于力学系统中, 如阻尼耗散、外部激励、结构/材料参数可变和系统参数随机或激励随机等。因此, 本文分别讨论几种含对称破缺因素的无限维动力学系统的(近似)守恒律。

3.1 无限维耗散动力学系统的近似守恒律

对于含有阻尼耗散的无限维动力学系统, 亦可通过多辛降阶方法将其写成近似对称形式为

$$M^* \partial_t z + \sum_{i=1}^n K_i^* \partial_{x_i} z = \nabla_z S(z) \quad (z \in \mathbf{R}^d) \quad (11)$$

式中 $M^*, K_i^* \in \mathbf{R}^{d \times d}$ ($i=1, 2, \dots, n$) 为实方阵。为了确保形式(11)的适定性, 假定由系数矩阵 M^*, K_i^* 和 Hamilton 函数 $S(z)$ 定义的特征多项式 $\det[\lambda_m M^* + \sum_{m=1}^n \hat{i} K_m^* - S''(z)] = 0$ 对所有的 K_i^* 均有有限个实部为正的 eigenvalue λ_m , 其中, $S''(z)$ 为哈密顿函数 $S(z)$ 的 Hessian 矩阵, $\hat{i} = \sqrt{-1}$ 。

与标准多辛对称形式(7)相比, 近似对称形式(11)中, 系数矩阵 $M^*, K_i^* \in \mathbf{R}^{d \times d}$ ($i=1, 2, \dots, n$) 仅为实方阵, 并不具有(反)对称性。将方阵 M^*, K_i^* 作如下分解:

$$\begin{aligned} M^* &= \frac{1}{2} [M^* - (M^*)^T] + \frac{1}{2} [M^* + (M^*)^T] \\ K_i^* &= \frac{1}{2} [K_i^* - (K_i^*)^T] + \frac{1}{2} [K_i^* + (K_i^*)^T] \end{aligned} \quad (12)$$

定义反对称矩阵 M 和 K_i

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2}[\mathbf{M}^* - (\mathbf{M}^*)^T], \mathbf{K}_i = \frac{1}{2}[\mathbf{K}_i^* - (\mathbf{K}_i^*)^T] \quad (13)$$

以及对称矩阵 $\widehat{\mathbf{M}}$ 和 $\widehat{\mathbf{K}}_i$

$$\widehat{\mathbf{M}} = \frac{1}{2}[\mathbf{M}^* + (\mathbf{M}^*)^T], \widehat{\mathbf{K}}_i = \frac{1}{2}[\mathbf{K}_i^* + (\mathbf{K}_i^*)^T] \quad (14)$$

则近似对称形式(11)可以改写为

$$(\mathbf{M} + \widehat{\mathbf{M}})\partial_t \mathbf{z} + \sum_{i=1}^n (\mathbf{K}_i + \widehat{\mathbf{K}}_i)\partial_{x_i} \mathbf{z} = \nabla_z S(\mathbf{z}) \quad (\mathbf{z} \in \mathbf{R}^d) \quad (15)$$

注意,如果对称矩阵 $\widehat{\mathbf{M}} = \widehat{\mathbf{K}}_i = 0$, 则系统(15)退化为严格的多辛对称形式(7),该系统精确保持多辛守恒律、局部能量守恒律和局部动量守恒率,也就是说,使得形式(11)不满足局部守恒律的因素从数学形式上是来自于对称矩阵 $\widehat{\mathbf{M}}$ 和 $\widehat{\mathbf{K}}_i$, 可以证明,对称矩阵 $\widehat{\mathbf{M}}$ 和 $\widehat{\mathbf{K}}_i$ 的非零元素与系统耗散因素一一对应^[12]。

当对称矩阵 $\widehat{\mathbf{M}}$ 和 $\widehat{\mathbf{K}}_i$ 范数比较小时,前述提及的三种局部守恒律也能得到近似满足,因此,依据多辛理论中关于多辛守恒律的推导过程,容易得到近似对称形式(15)的近似多辛守恒律为

$$\partial_t(\omega) + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}(\kappa_i) = -\partial_t(\widehat{\omega}) - \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}(\widehat{\kappa}_i) \quad (16)$$

式中 外积形式定义为 $\omega = d\mathbf{z} \wedge \mathbf{M} d\mathbf{z}$, $\kappa_i = d\mathbf{z} \wedge \mathbf{K}_i d\mathbf{z}$, $\widehat{\omega} = d\mathbf{z} \wedge \widehat{\mathbf{M}} d\mathbf{z}$, $\widehat{\kappa}_i = d\mathbf{z} \wedge \widehat{\mathbf{K}}_i d\mathbf{z}$ ($i = 1, 2, \dots, n$)。

依照 Bridges^[7] 建立的多辛积分理论,定义修正的能量密度为

$$\hat{e} = S(\mathbf{z}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathbf{z}^T (\mathbf{K}_i + \widehat{\mathbf{K}}_i) \partial_{x_i} \mathbf{z} \quad (17)$$

和修正的能量通量为

$$\hat{f}_i = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T (\mathbf{K}_i + \widehat{\mathbf{K}}_i) \partial_t \mathbf{z} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (18)$$

则有

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{e} + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \hat{f}_i &= \partial_t [S(\mathbf{z}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathbf{z}^T (\mathbf{K}_i + \widehat{\mathbf{K}}_i) \partial_{x_i} \mathbf{z}] + \\ &\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \mathbf{z}^T (\mathbf{K}_i + \widehat{\mathbf{K}}_i) \partial_t \mathbf{z} = \partial_t [S(\mathbf{z}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathbf{z}^T \mathbf{K}_i \partial_{x_i} \mathbf{z}] + \\ &\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \mathbf{z}^T \mathbf{K}_i \partial_t \mathbf{z} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \mathbf{z}^T \widehat{\mathbf{K}}_i \partial_t \mathbf{z} - \frac{1}{2} \partial_t \sum_{i=1}^n \mathbf{z}^T \widehat{\mathbf{K}}_i \partial_{x_i} \mathbf{z} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} \hat{f}_i &= \frac{1}{2} \langle [\partial_{x_i} \mathbf{K}_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)] \partial_t \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{K}_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \partial_{tx_i} \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{K}_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \partial_t \mathbf{z}, \partial_{x_i} \mathbf{z} \rangle = \\ &\partial_t [\frac{1}{2} \langle \mathbf{K}_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \partial_{x_i} \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle] + \frac{1}{2} \langle \partial_{x_i} [\mathbf{K}_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)] \partial_t \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{K}_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \partial_t \mathbf{z}, \partial_{x_i} \mathbf{z} \rangle - \\ &\frac{1}{2} \langle \partial_t [\mathbf{K}_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)] \partial_{x_i} \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle - \frac{1}{2} \langle \mathbf{K}_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \partial_{x_i} \mathbf{z}, \partial_t \mathbf{z} \rangle = \partial_t [\frac{1}{2} \langle \mathbf{K}_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \partial_{x_i} \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle] + \\ &\frac{1}{2} \langle \partial_{x_i} [\mathbf{K}_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)] \partial_t \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle - \frac{1}{2} \langle \partial_t [\mathbf{K}_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)] \partial_{x_i} \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle - \langle [\nabla_z S(\mathbf{z}) - \mathbf{M}(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \partial_t \mathbf{z}], \\ &\partial_t \mathbf{z} \rangle = \partial_t [\frac{1}{2} \langle \mathbf{K}_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \partial_{x_i} \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle] + \frac{1}{2} \langle \partial_{x_i} [\mathbf{K}_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)] \partial_t \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle - \\ &\frac{1}{2} \langle \partial_t [\mathbf{K}_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)] \partial_{x_i} \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle - dS(\mathbf{z})/dt \end{aligned} \quad (24)$$

即得到近似对称形式(15)的修正局部能量守恒律

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{e} + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \hat{f}_i &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \mathbf{z}^T \widehat{\mathbf{K}}_i \partial_t \mathbf{z} - \\ &\frac{1}{2} \partial_t \sum_{i=1}^n \mathbf{z}^T \widehat{\mathbf{K}}_i \partial_{x_i} \mathbf{z} \end{aligned} \quad (20)$$

即近似对称形式(15)的局部能量误差为

$$\Delta_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \mathbf{z}^T \widehat{\mathbf{K}}_i \partial_t \mathbf{z} - \frac{1}{2} \partial_t \sum_{i=1}^n \mathbf{z}^T \widehat{\mathbf{K}}_i \partial_{x_i} \mathbf{z}$$

同理,定义

$$\hat{g}_i = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T (\mathbf{M} + \widehat{\mathbf{M}}) \partial_{x_i} \mathbf{z} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (21)$$

$$\hat{h} = S(\mathbf{z}) - \frac{1}{2} \mathbf{z}^T (\mathbf{M} + \widehat{\mathbf{M}}) \partial_t \mathbf{z} \quad (22)$$

同样得到近似对称形式(15)的修正局部动量守恒律

$$\begin{aligned} \partial_t \sum_{i=1}^n \hat{h}_i + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \hat{g}_i &= \frac{1}{2} \partial_t \sum_{i=1}^n \mathbf{z}^T \widehat{\mathbf{M}} \partial_{x_i} \mathbf{z} - \\ &\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \mathbf{z}^T \widehat{\mathbf{M}} \partial_t \mathbf{z} \end{aligned} \quad (23)$$

即近似对称形式(15)的局部动量误差为

$$\Delta_p = \frac{1}{2} \partial_t \sum_{i=1}^n \mathbf{z}^T \widehat{\mathbf{M}} \partial_{x_i} \mathbf{z} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \mathbf{z}^T \widehat{\mathbf{M}} \partial_t \mathbf{z}$$

对于下述几种对称破缺情况,本文只讨论其局部能量误差(即局部能量耗散)。

3.2 无限维变参数动力学系统的局部能量耗散

如果在多辛对称形式(7)中,矩阵方程的系数矩阵显式依赖于空间坐标和(或)时间坐标,

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{M}(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = -[\mathbf{M}(x_1, x_2, \dots, x_n, t)]^T \\ \mathbf{K}_i &= \mathbf{K}_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = -[\mathbf{K}_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)]^T \end{aligned}$$

则修正的能量密度为

$$\hat{e} = S(\mathbf{z}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{K}_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \partial_{x_i} \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle$$

修正的能量通量为

$$\hat{f}_i = \frac{1}{2} \langle \mathbf{K}_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \partial_t \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

能量通量的偏微分计算如下

则无限维变参数动力学系统的局部能量耗散表述为

$$\Delta_e = \partial_t e + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \hat{f}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \langle \partial_{x_i} [\mathbf{K}_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)] \partial_t \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle - \langle \partial_t [\mathbf{K}_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)] \partial_{x_i} \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle \right\} \quad (25)$$

3.3 Hamilton 函数显式时空依赖的无限维动力学系统的局部能量耗散

无论是施加于力学系统的外界激励还是控制,大都显式依赖于空间坐标和时间坐标,在这种情形下,无限维动力学系统(7)的 Hamilton 函数将显式依赖于时间坐标和空间坐标,即 $S = S(\mathbf{z}, x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ 。

假定外界激励和控制均是光滑的(虽然力学系统设计过程中,冲击激励、开关控制等非光滑激励和控制是允许的,但是实际操作过程中,理想的冲击激励和开关控制并不存在),则修正的能量密度为 $\hat{e} = S(\mathbf{z}, x_1, x_2, \dots, x_n, t) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{K}_i \partial_{x_i} \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle$, 将其代入局部能量守恒律(9),得到 Hamilton 函数显式时空依赖的无限维动力学系统的局部能量耗散可表述为

$$\Delta_e = \partial_t S(\mathbf{z}, x_1, x_2, \dots, x_n, t) / \partial t + \sum_{i=1}^n \partial_t S(\mathbf{z}, x_1, x_2, \dots, x_n, t) / \partial x_i \, dx_i / dt \quad (26)$$

3.4 无限维随机激励动力学系统的局部能量耗散

与已有针对白噪声激励下的无限维动力学系统不同,本节考虑受一般随机激励的无限维动力学系统,其一般矩阵形式可以表述为

$$\mathbf{M} \partial_t \mathbf{z} + \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_i \partial_{x_i} \mathbf{z} = \nabla_{\mathbf{z}} [S(\mathbf{z}) + \tilde{S}(\mathbf{F}, \mathbf{z}, \partial_t \mathbf{z}, \partial_{tt} \mathbf{z})] \quad (\mathbf{z} \in \mathbf{R}^d) \quad (27)$$

式中 $\tilde{S}(\mathbf{F}, \mathbf{z}, \partial_t \mathbf{z}, \partial_{tt} \mathbf{z})$ 为与随机激励相关的 Hamilton 函数, $\mathbf{F}$ 为广义力向量。

不局限于随机白噪声, $\tilde{S}(\mathbf{F}, \mathbf{z}, \partial_t \mathbf{z}, \partial_{tt} \mathbf{z})$ 依赖于广义力向量和随机广义位移的零阶/一阶/二阶偏微分,这意味着考虑的随机激励包含作用于结构上的随机激励和作用于结构边界上的随机激励。假定 $\tilde{S}(\mathbf{F}, \mathbf{z}, \partial_t \mathbf{z}, \partial_{tt} \mathbf{z})$ 不显式依赖于时间坐标和空间坐标,则

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_{x_i^0}^{x_i^1} \omega(t_1, x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i + \\ & \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \kappa_i(t, x_1, \dots, x_i^1, \dots, x_n) dt = \\ & \sum_{i=1}^n \int_{x_i^0}^{x_i^1} \omega(t_0, x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i + \\ & \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \kappa_i(t, x_1, \dots, x_i^0, \dots, x_n) dt \end{aligned} \quad (28)$$

对于作用于结构上的随机激励, $(t_0, t_1) \times (x_1^0, x_1^1) \times (x_2^0, x_2^1) \times \dots \times (x_n^0, x_n^1)$ 域上的局部能量守恒律(9)不受随机激励影响当且仅当

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x^0}^{x^1} E(\mathbf{F}) d\mathbf{x} dt = 0 \quad (29)$$

式中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$, $\mathbf{x}^1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)^T$ 。

事实上,如果随机激励是随机白噪声,则 $E(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$, 式(29)恒成立。一般情形下, $(t_0, t_1) \times (x_1^0, x_1^1) \times (x_2^0, x_2^1) \times \dots \times (x_n^0, x_n^1)$ 域上的局部能量耗散可表述为

$$\Delta_e = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x^0}^{x^1} E(\mathbf{F}) d\mathbf{x} dt \quad (30)$$

对于随机位移作用于结构边界的情形,系统局部能量耗散取决于结构边界性质。当边界条件不允许沿着随机位移方向的位移时,随机位移不会引起局部能量耗散。否则,随机位移就会引起局部能量耗散。限于随机位移的一般性,在此无法给出统一的局部能量耗散表达式。

4 算例

为了说明上述结果在动力学系统分析中的应用,本节以柔性阻尼梁振动问题为例,说明阻尼耗散这一对称破缺因素对柔性梁振动系统的多辛结构残差和局部动量耗散的影响。

考虑长度为 l , 线密度为 ρ , 截面惯性矩为 I , 材料弹性模量为 E , 阻尼系数为 c 的柔性阻尼梁,其振动方程为

$$\rho \partial_{tt} u + c \partial_t u + EI \partial_{xxxx} u = 0 \quad (31)$$

引入正交动量 $\partial_t u = \varphi$, $\partial_x u = w$, $\partial_x w = \Psi$, $\partial_x \Psi = q$, 方程(31)可降阶为一阶形式,即

$$\begin{bmatrix} -c & -\rho & 0 & 0 & 0 \\ \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \partial_t \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -EI \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EI & 0 \\ 0 & 0 & -EI & 0 & 0 \\ EI & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \partial_x \mathbf{z} = \nabla_{\mathbf{z}} S(\mathbf{z}) \quad (32)$$

式中 $\mathbf{z} = (u, \varphi, w, \Psi, q)^T$, Hamilton 函数为 $S(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \rho \varphi^2 - \frac{1}{2} EI \Psi^2 + EI w q$ 。

式(32)的广义多辛守恒律为

$$\partial_t (\rho du \wedge d\varphi) + EI \partial_x (du \wedge dq + d\Psi \wedge dw) - cd(\partial_t u) \wedge du \quad (33)$$

定义式(33)的右端项为多辛结构残差,即 $\Delta = -cd(\partial_t u) \wedge du$ 。

式(32)的局部动量耗散为

$$\Delta_p = \frac{1}{2} c \partial_x u \partial_t u - \frac{1}{2} c \partial_t (u \partial_x u) \quad (34)$$

采用 Preissmann 离散方法离散一阶近似对称形式(32)并消去中间变量,同时离散多辛结构残差和局部动量耗散,得到与 Preissmann 离散格式等价的广义多辛格式,以及每一时间步的最大绝对多辛结构残差和最大绝对局部动量耗散值

$$\begin{aligned} & \frac{\rho}{4\Delta t^2}(\delta_t^2 u_{i+2}^j + 4\delta_t^2 u_{i+1}^j + 6\delta_t^2 u_i^j + 4\delta_t^2 u_{i-1}^j + \delta_t^2 u_{i-2}^j) + \\ & \frac{c}{4\Delta t}(\delta_t u_{i+3}^j + 5\delta_t u_{i+2}^j + 10\delta_t u_{i+1}^j + 10\delta_t u_i^j + 5\delta_t u_{i-1}^j + \\ & \delta_t u_{i-2}^j) + \frac{EI}{\Delta x^4}(\delta_x^4 u_{i+1}^{j+1} + 2\delta_x^4 u_i^{j+1} + \delta_x^4 u_{i-1}^{j+1}) = 0 \quad (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & d\left(\frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i+1}^j}{\Delta t}\right) \wedge du_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i+1}^j}{\Delta x} dx + \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2}}^j}{\Delta t} dt - \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta x} dx - \frac{u_{i-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}^j}{\Delta t} dt \right] \wedge \\ & \left[\frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} - u_{i+\frac{1}{2}}^j}{\Delta x} dx + \frac{u_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - u_{i+1}^j}{\Delta t} dt \right] = \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{\delta_t^2 u_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta t} dt + \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1} - u_{i+1}^j + u_i^j}{\Delta x} dx \right] \wedge \left[\frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} - u_{i+\frac{1}{2}}^j}{\Delta x} dx + \right. \\ & \left. \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2}}^j}{\Delta t} dt \right] = \frac{\delta_t^2 u_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} (u_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} - u_{i+\frac{1}{2}}^j)}{\Delta t^2 \Delta x} dt \wedge dx + \frac{(u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1} - u_{i+1}^j + u_i^j)(u_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2}}^j)}{\Delta t^2 \Delta x} dx \wedge dt = \\ & \left[\delta_x^2 u_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} (u_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} - u_{i+\frac{1}{2}}^j) - (u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1} - u_{i+1}^j + u_i^j)(u_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2}}^j) \right] / (\Delta t^2 \Delta x) dt \wedge dx \end{aligned}$$

假定梁参数为 $\rho=0.5 \text{ kg/m}$, $E=6.9 \times 10^{11} \text{ Pa}$, $I=1 \times 10^{-4} \text{ m}^4$, $l=10 \text{ m}$, $c=0.1$ 。假定初始条件和边界条件为

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sin\left(\frac{2}{5}\pi x\right), \quad \partial_t u(x, 0) = 0 \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

采用差分格式(35)模拟柔性梁的振动过程,记录梁振动过程中每一时间步最大绝对多辛结构残差和最大绝对局部动量耗散值如图1所示。

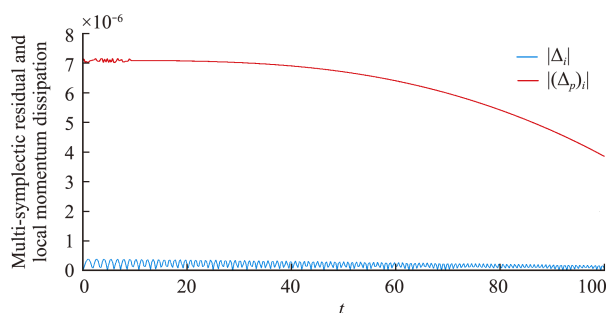


图1 最大绝对多辛结构残差与局部动量耗散

Fig.1 Maximal absolute multi-symplectic structure residual and local momentum dissipation

上述算例仅用以说明在实际问题中,如何采用保结构数值算法再现第3节给出的动力学对称破缺因素与系统近似守恒律之间的映射关系。因此,柔性梁振动过程的数值结果不再在本部分给出。

5 结 论

物理力学系统的对称性与守恒律存在一一映射关系,受这一结论启发,本文在辛体系下讨论含

$$|\Delta_i| = \max_j \left\{ \left| -cd \left(\frac{u_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - u_{i+1}^j}{\Delta t} \right) \wedge du_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \right| \right\} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} |(\Delta_p)_i| &= \max_j \left\{ \left| \frac{c}{2} \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} - u_{i+\frac{1}{2}}^j}{\Delta x} \frac{u_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - u_{i+1}^j}{\Delta t} - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{c}{2\Delta t} \left(u_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+\frac{3}{2}}^{j+1} - u_{i+\frac{3}{2}}^j}{\Delta x} - u_{i+\frac{1}{2}}^j \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} - u_{i+\frac{1}{2}}^j}{\Delta x} \right) \right| \right\} \end{aligned} \quad (37)$$

式中 Δt 和 Δx 分别为时间步长和空间步长,式(36)的外积 $\wedge$ 运算展开为

有动力学对称破缺因素动力学系统的近似守恒律。针对随机激励下的有限维 Hamilton 系统,得到了其辛结构;分别针对无限维耗散动力学系统、无限维变参数动力学系统、Hamilton 函数显式时空依赖的无限维动力学系统和无限维随机激励动力学系统,详细讨论了对称破缺因素引起的局部动量耗散问题,为含有对称破缺因素的动力学系统的保辛算法设计提供理论依据。

参考文献(References):

- [1] Feng K. On difference schemes and symplectic geometry [A]. Proceeding of the 1984 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations[C]. Beijing, 1984.
- [2] 冯 康, 秦孟兆. 哈密尔顿系统的辛几何算法[M]. 杭州: 浙江科学技术出版社, 2003. (FENG Kang, QIN Meng-zhao. Symplectic Geometric Algorithms for Hamiltonian Systems[M]. Hangzhou: Zhejiang Science & Technology Press, 2003. (in Chinese))
- [3] 姚伟岸, 钟万勰. 辛弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002. (YAO Wei-an, ZHONG Wan-xie, Symplectic Elasticity[M]. Beijing: Higher Education Press, 2002. (in Chinese))
- [4] Lim C W, Xu X S. Symplectic elasticity: Theory and applications [J]. Applied Mechanics Reviews, 2010, 63(5): 1.
- [5] 钟万勰, 高 强, 彭海军. 经典力学辛讲[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2013. (ZHONG Wan-xie, GAO Qiang, PENG Hai-jun, Classical Mechanics-Its Symplectic Description[M]. Dalian: Dalian University of

- Technology Press, 2013. (in Chinese))
- [6] 姜宇,王博,张博涵,等. 三维波纹型可延展结构振动特性的辛分析[J/OL]. 计算力学学报(2023-03-10)[2023-11-01]. <http://kns.cnki.net>, 2023-03-10/202309-28. (JIANG Yu, WANG Bo, ZHANG Bo-han, et al. Symplectic analysis of vibration characteristics of three dimensional corrugated stretchable structures [J/OL]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*(2023-03-10)[2023-11-01]. <http://kns.cnki.net>, 2023-03-10/202309-28. (in Chinese))
- [7] Bridges T J. Multi-symplectic structures and wave propagation [J]. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1997, **121**(1): 147-190.
- [8] Marsden J E, Patrick G W, Shkoller S. Multisymplectic geometry, variational integrators, and nonlinear PDEs [J]. *Communications in Mathematical Physics*, 1998, **199**(2): 351-395.
- [9] Bridges T J, Reich S. Multi-symplectic integrators: Numerical schemes for Hamiltonian PDEs that conserve symplecticity [J]. *Physics Letters A*, 2001, **284**(4-5): 184-193.
- [10] Hu W, Han Z, Bridges T J, et al. Multi-symplectic simulations of W/M-shape-peaks solitons and cuspons for FORQ equation [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2023, **145**: 108772.
- [11] Marsden J E, Ratiu T S. *Introduction to Mechanics and Symmetry* [M]. New York: Springer, 1994.
- [12] Hu W P, Deng Z C, Han S M, et al. Generalized multi-symplectic integrators for a class of Hamiltonian nonlinear wave PDEs [J]. *Journal of Computational Physics*, 2013, **235**: 394-406.
- [13] Hu W P, Xiao C, Deng Z C. *Geometric Mechanics and Its Applications* [M]. Singapore: Springer Nature Singapore, 2023.
- [14] Hu W P, Li Q J, Jiang X H, et al. Coupling dynamic behaviors of spatial flexible beam with weak damping [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2017, **111**(7): 660-675.
- [15] Hu W P, Song M Z, Deng Z C. Energy dissipation/transfer and stable attitude of spatial on-orbit tethered system [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2018, **412**: 58-73.
- [16] Hu W P, Wang Z, Zhao Y P, et al. Symmetry breaking of infinite-dimensional dynamic system [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2020, **103**: 106207.
- [17] Hu W P, Liu T, Han Z Q. Dynamical symmetry breaking of infinite-dimensional stochastic system [J]. *Symmetry*, 2022, **14**(8): 1627.
- [18] 朱位秋. 非线性随机动力学与控制-Hamilton理论体系框架 [M]. 北京: 科学出版社, 2003. (ZHU Wei-qiu. *Nonlinear Stochastic Dynamics and Control: Framework of Hamilton Theory System* [M]. Beijing: Science Press, 2003. (in Chinese))

Approximate conservation laws for dynamic systems with symmetry breaking in symplectic framework

HU Wei-peng^{*1}, LIM C W², DENG Zi-chen³

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China;

2. Department of Architecture and Civil Engineering, City University of Hong Kong, Hong Kong 999077, China;

3. School of Mechanics, Civil Engineering and Architecture, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Since the establishment of the symplectic geometric method for Hamiltonian systems by K. Feng, a globally recognized, prominent mathematician and scientist, the conservation laws including symplectic structures and energy conservation have become one of the effective verification criteria for numerical approaches of dynamic systems. However, some intrinsic system characteristics including damping dissipation, external excitation and control, variable coefficients, etc., that cause symmetry breaking in practical dynamic systems affect the system symmetry and conservation laws. In this paper, the approximate conservation laws of dynamic systems considering various symmetry breaking factors are analyzed in detail. Based on the geometric symmetry theory, the symplectic structure for finite-dimensional stochastic dynamic systems is obtained. Further, for infinite-dimensional non-conservative dynamic systems with various coefficients, time-space dependent Hamilton functions, and stochastic dynamic systems, the effects of symmetry breaking factors on local energy dissipation are investigated. The result established here may form the mathematical basis for symplectic analysis of dynamic systems with broken symmetry.

Key words: approximate conservation law; non-conservative; symmetry breaking; symplectic

引用本文/Cite this paper:

胡伟鹏,林志华,邓子辰. 辛体系下含对称破缺因素动力学系统的近似守恒律[J]. 计算力学学报, 2024, **41**(1): 118-123.

HU Wei-peng, LIM C W, DENG Zi-chen. Approximate conservation laws for dynamic systems with symmetry breaking in symplectic framework[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2024, **41**(1): 118-123.