**Chinese Journal of Computational Mechanics** 

DOI: 10.7511/jslx20230826001

# 平面刚体系统的参数预调节保辛算法

吴志刚\*, 徐小明

(中山大学・深圳 航空航天学院,深圳 518107)

摘 要:保辛积分方法在约束哈密顿系统中有着重要的应用,是因为其在长时间仿真中表现出极好的稳定性。然而随着仿真时长增加,保辛格式通常具有较大的相位误差累积。本文提出了一种平面多刚体系统的参数预调节保辛积分方法。通过推导具有待定参数的改进的拉格朗日方程,并将其与已有保辛格式相结合并预先调节相关参数取值,可以大幅降低数值解的相位误差。理论分析与数值结果表明参数预调节保辛积分方法不仅保持了辛结构,而且具有很低的相位误差累积。因此,参数预调节保辛积分方法可应用于长时间仿真分析。

关键词:平面刚体系统;笛卡尔坐标;正交投影;保辛算法;高精度

中图分类号:O313.7

文献标志码:A

文章编号:1007-4708(2024)01-0101-07

### 1 引 言

多体系统的动力学模型通常采用两种坐标描述方法,即最小坐标与非最小坐标<sup>[1]</sup>。与最小坐标相比,非最小坐标具有数学表达方便、简洁以及方法通用性强等优势。但是,非最小坐标描述不可避免地引入了代数约束条件,导致其数学表达为微分代数方程组。与常微分方程相比,微分代数方程组的数值求解相对复杂,面临着约束违约和刚性方程问题等,其数值计算的精度与稳定性受到严峻考验<sup>[2]</sup>。因此,相关问题的数值计算方法研究一直是多体系统动力学研究的重要课题。

近几十年,在多体系统动力学的应用背景下,微分代数方程组的计算方法得到了快速发展<sup>[3]</sup>。对于约束哈密顿系统,保辛算法可以较好地处理约束违约与刚性方程问题,取得了良好的计算稳定性与精度<sup>[4,5]</sup>。然而,经典的数值计算格式存在累加的能量耗散和相位误差问题。虽然辛算法通过保证离散过程的辛对称性,进而在数值计算过程中保持了系统的守恒律,解决了能量耗散问题,但相位误差随时间快速积累导致算法精度仍受到极大的影响<sup>[6]</sup>。Reich<sup>[7]</sup>很早就通过误差估计分析了单步辛算法相位误差产生机制。邢誉峰等<sup>[8]</sup>较早地阐述了算法的累积相位误差,并针对单自由度线性系

收稿日期:2023-08-26;修改稿收到日期:2023-10-17.

基金项目:国家自然科学基金(12372053;12002396;91748203; 11872381)资助项目.

**作者简介:**吴志刚\*(1971-),男,博士,教授

(E-mail: wuzhigang@mail. sysu. edu. cn).

统提出了单步保辛算法相位误差的修正公式。随后,多位学者提出了保辛算法的相位误差补偿方法<sup>[9-14]</sup>。但这些方法没有推广应用于约束哈密顿系统。最近,Noh等<sup>[15-17]</sup>分析了算法相位误差随时间累积的问题,称这种现象为算法的弥散性(Dispersion),并指出能量的耗散性和相位的弥散性都可以通过设定隐式积分格式的待定参数来改变,恰当的参数取值可以使积分算法在仿真分析中给出更为精确结果。然而,该方法的待定参数与离散方式相关,改变其取值将破坏积分格式的原有结构(如辛结构),因此不能直接应用。

本文针对非最小坐标描述的平面刚体系统,展 开具有低相位误差积累特点的保辛积分构造方法 研究。首先,本文采用笛卡尔坐标描述刚体的平移 与旋转运动。这是一种非最小坐标描述,导致相关 动力学模型的质量矩阵表达形式的不唯一性[18]。 本文通过引入正交投影矩阵(Orthogonal Projection),将系统的质量矩阵描述为关于待定参数的 等价表达式,进而推导出了改进的拉格朗日方 程[19]。研究发现,离散过程中关于待定参数的项 将产生额外的数值误差。通过调整参数的大小和 正负,进而调整相关误差的大小和方向,可以达到 抵消系统其他项误差的效果,从而大幅降低数值方 法相位误差随时间累积的速度。由于该方法中的 待定参数是在推导动力学方程过程中得到的,与离 散过程无关,所以待定参数取值的改变并不会破坏 数值积分格式原有的离散性质。利用这一思想,本 文针对平面刚体系统,提出了预参数调节保辛积分 格式的构造方法。数值结果表明,该方法在保持保 辛积分格式无能量耗散、长时间积分稳定的情况下,同时大幅降低了离散系统的相位误差,极大程度上改善了数值方法的轨迹精度。由于非最小坐标描述中质量矩阵的不唯一性普遍存在,所以该方法不仅可以用于平面刚体系统,还可以推广到其他约束多体系统。

#### 2 改讲的拉格朗日方程

#### 2.1 Lagrange 方程描述

当采用非最小坐标描述平面刚体运动时,选取的广义坐标维度大于独立运动自由度数,其动力学方程可以表达为 Lagrange 方程形式

$$\dot{\mathbf{p}} = \partial \mathbf{T} / \partial \mathbf{q}^{\mathrm{T}} + \mathbf{F}^{ex} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda}$$
 (1)

$$\mathbf{\Phi}(q) = \mathbf{0} \tag{2}$$

式中  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  为 n 维广义坐标, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  为广义动量, T 为动能, $\mathbf{F}^{ex} \in \mathbb{R}^n$  为外力, $\mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^m$  为 m 个完整约 束, $\mathbf{A} = \partial \mathbf{\Phi}/\partial \mathbf{q}$  为约束的雅克比矩阵, $\mathbf{\lambda} \in \mathbb{R}^m$  为拉 格朗日乘子。假设动能的具体表达式为

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}} \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$
 (3)

式中  $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  为 n 维质量矩阵。对于约束系统,质量矩阵一般为半正定矩阵。由解的存在唯一性条件,其矩阵的秩满足[18]

$$\operatorname{rank}(\mathbf{M}) \geqslant n - m \tag{4}$$

根据动能表达式(3),系统的广义动量可以表达为

$$\mathbf{p} = \partial \mathbf{T} / \partial \dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}} = \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \tag{5}$$

实际上,上述动能表达式与唯一性条件表明,质量矩阵中只有投影到 n-m维约束零空间中的分量对动能产生正的作用,而投影到 m维约束空间中的分量只能产生零动能。在物理上,任何可能的运动(即满足约束方程的运动)都不可能与零动能相关联。这暗示了约束系统质量矩阵的不唯一性。

#### 2.2 基于正交投影的等价表达式

为将质量矩阵表达为关于待定参数的等价形式,定义约束的零空间矩阵

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{0} \}$$
 (6)

则可以定义  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  为  $\mathcal{N}(A)$  上的正交投影矩阵,满足  $\mathcal{R}(S) = \mathcal{N}(A)$ , $S^2 = S$ ,以及  $S^2 = S$ ,其中  $\mathcal{R}(S)$  为矩阵的值域(Range of the matrix)。根据正交矩阵定义,可以推导得到其正交补矩阵为 I - S,对任意  $\dot{q} \in \mathcal{N}(A)$  满足  $(I - S)\dot{q} = 0$ ,其中 I 为单位矩阵。这样就可以定义质量矩阵的等价表达式

$$\mathbf{M}_{\gamma}(\mathbf{q}) = \mathbf{M}(\mathbf{q}) + \gamma(\mathbf{I} - \mathbf{S}) \tag{7}$$

式中 γ为任意参数。将式(7)代入式(3)替换质量 矩阵 **M**, 可得具有待定参数的等价动能表达式

$$T_{\gamma} = \frac{1}{2} \, \dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}} \mathbf{M}_{\gamma}(\mathbf{q}) \, \dot{\mathbf{q}} \tag{8}$$

与式(3)的质量矩阵相比,式(8)增加了与参数 γ相 关的项,其只能产生零动能,不会对系统的真实运 动状态产生影响。将式(8)代入式(1),可以得到 Lagrange 方程的等价表达式

$$\dot{\mathbf{p}} = \partial \mathbf{T}_{\gamma} / \partial \mathbf{q}^{\mathrm{T}} + \mathbf{F}^{ex} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda}$$
 (9)

式中 广义动量 p已经重新定义为

$$\mathbf{p} = \partial \mathbf{T}_{\gamma} / \partial \dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}} = \mathbf{M}_{\gamma} \dot{\mathbf{q}}$$
 (10)

式(9)称为改进的拉格朗日方程 MLEs(Modified Lagrange's equations)。

### 3 参数预调节保辛算法思路

文献[19]阐述了改进的拉格朗日方程中与参数 γ相关的广义约束力项的离散误差产生机制。误差分析与数值结果表明,当满足一定的离散条件,参数 γ相关项将产生额外的数值误差。通过预先调整参数 γ的取值,可以抵消数值积分产生的误差。受此启发,本文提出利用改进的拉格朗日方程构造具有低相位误差累积的保辛积分方法,具体思路如下。

- (1) 在 Lagrange 框架或 Hamilton 框架下推 导系统的动力学方程,得到原始的质量矩阵,如式  $(1\sim5)$ 所示。
- (2) 根据约束方程的具体形式,推导约束零空间上的正交投影矩阵 S,得到其正交补映射 I-S,进而构造具有待定参数的质量矩阵与动能表达式,如式(7,8)所示。
- (3) 在上述公式基础上,推导改进的拉格朗日方程,如式(9,10)所示。
- (4) 联合改进的拉格朗日方程与约束方程,构造保辛算法。
- (5) 通过先验误差估计或后验误差估计,得到 使得相位误差显著降低的待定参数取值。

在进行参数预调节算法构造时,需要注意以下几点,离散格式可以采用针对指标-3 微分代数方程组的任意一种保辛格式,如辛龙格库塔法或变分的算法等;待定参数是在仿真前选取的,仿真中不再改变。当采用后验误差估计方法确定待定参数  $\gamma$ 取值时,本文首先假设轨迹误差  $\delta$ W 是参数  $\gamma$ 的线性函数,计算两个参考点  $(\gamma_1, \delta W_1)$  与  $(\gamma_2, \delta W_2)$  的值,然后令  $\delta$ W = 0,通过线性插值就可以得到  $\gamma$ 的估计值

 $\gamma_{\text{opt}} = (\gamma_1 \delta W_2 - \gamma_2 \delta W_1)/(\delta W_2 - \delta W_1)$  (11) 即为使得轨迹误差为零的最优参数。在选取参考

点时, $\gamma_1$  一般可选为零, $\gamma_2$  可选为平面刚体系统转动惯量或质量矩阵相关的常值,然后通过短时间仿真计算得到相应的后验误差值  $\delta W_1$  与  $\delta W_2$ ,然后再将参考点的值代人式(11),求取最优参数值  $\gamma_{opt}$ 。文献[20]更为详细地介绍了确定待定参数  $\gamma$ 的后验误差估计方法,限于本文篇幅不再介绍。

### 4 平面刚体系统建模

#### 4.1 单刚体系统

考虑如图 1 所示平面单刚体系统,其中 (x,y) 为全局坐标系下的迪卡尔坐标,  $(\overline{x},\overline{y})$  表示以刚体上的固定点  $O_i$  为原点、以  $O_iO_{i+1}$  为横坐标的局部坐标。为描述刚体的平动和转动,定义从刚体上的固定点  $O_i$  到固定点  $O_{i+1}$  的广义坐标矢量

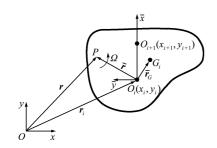


图 1 笛卡尔坐标描述的平面刚体 Fig. 1 A planar rigid body with Cartesian coordinates

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_i & y_i & x_{x+1} & y_{i+1} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

与单位正交矢量

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{D}_{i1} \, \mathbf{x}_i \,, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{D}_{i2} \, \mathbf{x}_i \tag{13}$$

式中

$$\mathbf{D}_{i1} = \frac{1}{l_i} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{i2} = \frac{1}{l_i} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
 (14)

并且需要满足约束条件

$$\phi(\mathbf{u}_i) = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{u}_i - 1) = 0$$
 (15)

根据式(13),可以定义平面运动的刚体旋转矩阵

$$\mathbf{R}_{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{i} & \mathbf{v}_{i} \end{bmatrix} \tag{16}$$

这样全局坐标系下刚体的质心坐标可表示为

$$\mathbf{r}_{Gi} = \mathbf{r}_i + \mathbf{R}_i \bar{\mathbf{r}}_{Gi} \tag{17}$$

式中  $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)^{\mathrm{T}}, \bar{\mathbf{r}}_{Gi} = (\bar{x}_{G_i}, \bar{y}_{G_i})^{\mathrm{T}}$  为局部坐标系的质心坐标。刚体的平面旋转角速度可以表示为

$$\mathbf{\Omega}_i = \mathbf{v}_i^{\mathrm{T}} \dot{\mathbf{u}}_i \tag{18}$$

据此可以推导得到单刚体的动能表达式

$$T_{i} = \frac{1}{2} m_{i} \dot{\mathbf{r}}_{Gi}^{\mathrm{T}} \dot{\mathbf{r}}_{Gi} + \frac{1}{2} J_{Gi} \Omega_{i}^{2} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_{i}^{\mathrm{T}} \overline{\mathbf{M}}_{i} \dot{\mathbf{x}}_{i}$$
(19)

式中  $J_{Gi}$  为质心的极惯性矩,  $\overline{\mathbf{M}}_{i} = \overline{\mathbf{M}}_{Gi} + \overline{\mathbf{M}}_{R_{i}}$ 

$$\overline{\mathbf{M}}_{Gi} = m_i \begin{bmatrix} \zeta_i & 0 & -\xi_i & -l_i \overline{y}_{Gi} \\ 0 & \zeta_i & l_i \overline{y}_{Gi} & -\xi_i \\ -\xi_i & l_i \overline{y}_{Gi} & \overline{r}_{Gi}^2 & 0 \\ -l_i \overline{y}_{Gi} & -\xi_i & 0 & \overline{r}_{Gi}^2 \end{bmatrix}$$
(20)

系数 
$$\xi_i = \overline{r}_{Gi}^2 - l_i \overline{x}_{Gi}$$
,  $\zeta_i = l_i^2 - 2l_i \overline{x}_{Gi} + \overline{r}_{Gi}^2$ , 以及
$$\overline{\mathbf{M}}_{Ri} = J_{Gi} \mathbf{D}_{i1}^T \mathbf{D}_{i2} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \mathbf{D}_{i2}^T \mathbf{D}_{i1}$$
(2)

对于采用广义坐标  $x_i$  描述的平面刚体运动,其约束零空间需要满足条件  $u_i^T \dot{u}_i = 0$ ,可构造其零空间上的正交映射矩阵

$$\mathbf{S}_{1,i} = \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^{\mathrm{T}} \tag{22}$$

满足  $(\mathbf{I} - \mathbf{S}_{1,i})$   $\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$ 。因此引入式(22),可构造

$$T_{i,\gamma} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_i^{\mathrm{T}} \overline{\mathbf{M}}_i \dot{\mathbf{x}}_i + \frac{1}{2} \gamma \dot{\mathbf{u}}_i^{\mathrm{T}} (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{1,i}) \dot{\mathbf{u}}_i$$
 (23)

将式(13)代入式(23),可以得到单刚体的等价动能 表达式

$$T_{i,\gamma} = \frac{1}{2} \, \dot{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}} \, \overline{\boldsymbol{M}}_{i,\gamma} \, \dot{\boldsymbol{x}}_i \tag{24}$$

式中  $\overline{\mathbf{M}}_{i,\gamma}$  为具有待定参数的等价质量矩阵,其具体表达式为

$$\overline{\mathbf{M}}_{i,\gamma} = \overline{\mathbf{M}}_i + \gamma (\mathbf{D}_{i1}^{\mathrm{T}} \mathbf{D}_{i1} - \overline{\mathbf{M}}_{Ri} / J_{Gi}$$
 (25)

#### 4.2 重力场中的多体平面摆

为简化推导过程,本文只考虑如图 2 所示平面 多体摆系统,其中  $O_i$  是平面铰连接,坐标为  $(x_i, y_i)$ ,点  $O_0$  的坐标为(0,0)。定义系统的广义坐标向量为

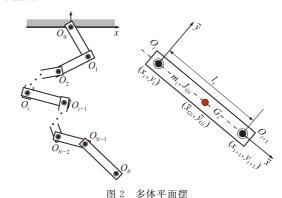


Fig. 2 A multi-body planar pendulum

$$\mathbf{q} = [x_1 \ y_1 \cdots x_N \ y_N]^{\mathrm{T}}$$
 (26)

其满足约束方程

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \phi(\mathbf{u}_1) \\ \phi(\mathbf{u}_2) \\ \vdots \\ \phi(\mathbf{u}_N) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$
 (27)

刚体系统的总动能表达式为

$$T_{\gamma} = \sum_{i=1}^{N} T_{i,\gamma} = \frac{1}{2} \, \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}} \, \overline{\boldsymbol{M}}_{\gamma} \, \dot{\boldsymbol{q}}$$
 (28)

式中 总的质量矩阵  $\overline{\mathbf{M}}_{y}$  由单个刚体的质量矩阵  $\overline{\mathbf{M}}_{i,y}$  组装而成。同理,可以推导势能表达式

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{V}_{i} = \sum_{i=1}^{N} m_{i} \mathbf{x}_{i}^{\mathrm{T}} \mathbf{g}_{i}$$
 (29)

式中 
$$\mathbf{g}_{i} = g \left[ -\frac{\overline{y}_{Gi}}{l_{i}} \quad 1 - \frac{\overline{x}_{Gi}}{l_{i}} \quad \frac{\overline{y}_{Gi}}{l_{i}} \quad \frac{\overline{x}_{Gi}}{l_{i}} \right]^{\mathrm{T}}$$
 (30)

重力加速度  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ 。然后可以推导得到系统的外力  $\mathbf{F}^{ex} = -\partial \mathbf{V}/\partial \mathbf{q}^{T}$ 。

为获得式(28)中参数  $\gamma$ 的合理取值,可以定义 参数  $^{[21]}$ 

$$\gamma_{R} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} J_{Gi}$$
 (31)

为所有平面刚体转动惯量的均值,离散误差估计表明当  $\gamma = \gamma_R$  时,数值积分的离散旋转动能误差较小。进一步,还可以考虑减小平移动能的离散误差,此时可以定义

$$\gamma_{\mathrm{T}} = \gamma_{\mathrm{R}} + \frac{1}{2N} \mathrm{Tr}(\overline{\mathbf{M}}_{\mathrm{G}})$$
 (32)

式中  $\overline{\mathbf{M}}_{G}$  由  $\overline{\mathbf{M}}_{Gi}$  组装而成, $\mathrm{Tr}(\overline{\mathbf{M}}_{G})$  为  $\overline{\mathbf{M}}_{G}$  的迹。则根据离散误差估计,当  $\gamma = \gamma_{T}$  时,数值积分的离散总动能误差较小。

### 5 数值算例

考虑由两个刚体组成的两自由度平面摆,其构型参数为  $l_1 = 2, l_2 = 3, m_1 = m_2 = 1$  以及

$$(\bar{x}_{GI}, \bar{y}_{Gi}) = (l_i/2, 0), J_{Gi} = m_i l_i^2 / 12$$
 (33)  
式中  $i = 0, 1$ 。给定初始条件

$$\mathbf{q}_0 = -\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = -\begin{bmatrix} 6\pi & 0 & 15\pi & 0 \end{bmatrix}$$
(34)

本文采用 Gauss-Lobatto SPARK 算法来构造保辛 积分格式,具体格式参考文献[22]。需要注意,由于式(28)的引入,保辛积分格式中含有待定系数  $\gamma$ 。首先取待定系数  $\gamma=0$  与  $\gamma=\gamma_T=0$ .916667 进行数值结果比较,其中  $\gamma_T$  的定义见式(32)。为此,定义均值误差

$$E[|\delta x|] = \sum_{i=2}^{N+1} \left( \frac{1}{N_h + 1} \sum_{k=0}^{N_h} (|\delta x_i^{(k)}|) \right)$$
 (35)

$$E\left[\left|\delta y\right|\right] = \sum_{i=2}^{N+1} \left(\frac{1}{N_h + 1} \sum_{k=0}^{N_h} \left(\left|\delta y_i^{(k)}\right|\right)\right) \tag{36}$$

$$E[|\delta H|] = \frac{1}{N_h + 1} \sum_{k=0}^{N_h} (\delta H(\boldsymbol{q}_k, \boldsymbol{p}_k)) / H_0 \quad (37)$$

式中  $N_h$  为总的时间步数,N=2 为刚体数目,h 为时间步长, $\delta(\pm)$  表示数值解和参考解之间的误差,H=T+V 为系统的能量,上标 k 表示  $t_k=hk$  时刻的值。本文参考解选取为比待比较数值解步长小 100 倍的数值解。

表 1 给出了当待定参数 γ取 0 与取  $γ_T$  时的数值比较结果,其中 h = 0.04,  $N_h = 100$ , (s,s) 代表

SPARK 方法选取了 s 个 Gauss-Lobatto 积分点与 s 个 Lobatto 积分点进行离散。若数值积分选取 s 个积分点,则收敛阶数为 2s 阶。数值结果显示,对于 2 阶、4 阶、6 阶和 8 阶 SPARK 方法,参数  $\gamma = \gamma_T$  时的轨迹精度与能量精度均优于  $\gamma = 0$ 。证实了参数预调节保辛算法可以通过调整  $\gamma$  的取值改变数值积分的精度。图 3 给出了能量误差随步长收敛曲线,其中 s=1。可以看出,无论参数取何值,取 1 个积分点的 SPARK 方法都保证了 2 阶收敛性。实际上,当 s=2,3 和 4 时,数值结果也显示了算法与待定参数  $\gamma$  取值无关的 2s 阶收敛性,限于篇幅本文不列出其相关数值结果。

表 1 数值结果比较 Tab. 1 Comparison of numerical results

(s, s)	γ	$E[ \delta x ]$	$E[ \delta x ]$	Ε[ δΗ ]
(1,1)	0	2.38E+00	2.47E+00	3. 25E-03
	$\gamma_{\rm T}$	1.64E+00	1.70E + 00	2.44E-03
(2,2)	0	4.13E-03	4.24E-03	3. 23E-06
	$\boldsymbol{\gamma}_T$	2.21E-03	2.26E-03	1.45E-06
(3,3)	0	4.89E-06	4.86E-06	6.15E-09
(3,3)	$\boldsymbol{\gamma}_T$	1.73E-06	1.78E-06	2.80E-09
(4,4)	0	2.08E-08	2.09E-08	3. 47E-12
(1,1)	$\gamma_{\mathrm{T}}$	2 34F-09	2 40F-09	6 22F-13

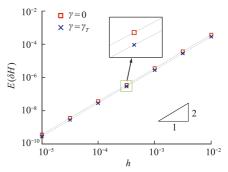
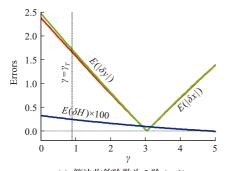


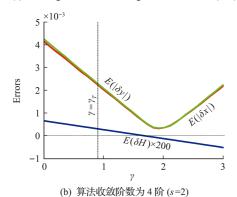
图 3 能量误差随步长收敛曲线

Fig. 3 Convergence curve of energy error with step size

图 4 呈现了数值误差随待定参数  $\gamma$ 变化曲线,其中 h=0.04, $N_h=100$ ,数值误差由式(35~37) 定义。如图 4 所示,无论是 s=1 还是 s=2,用逐点误差绝对值评估的平均轨迹误差与待定参数  $\gamma$  呈现了 V 字型的曲线。这些数值误差在  $\gamma$  的正半轴达到最小值。这意味着,如果通过优化  $\gamma$  来最小化积分的轨迹误差,算法的数值精度将得到极大的提升。然而,上述曲线中轨迹误差和能量误差曲线的最小值对应的横坐标  $(\gamma$  的取值)不同,因此应当考虑能量和轨迹的综合精度来确定  $\gamma$  的最佳值。本文以轨迹精度最佳为目标来求参数  $\gamma$  的最佳取值  $\gamma_{\text{out}}$ 。



(a) 算法收敛阶数为 2 阶 (s=1)(a) Convergence order of the algorithm is  $2^{nd}$  order (s=1)



(b) Envergence order of the algorithm is  $4^{th}$  order (s=2)

图 4 数值误差随待定参数 γ变化曲线 Fig. 4 Curve of numerical error with the undetermined parameter γ

图 5 显示了 s=1 时算法数值误差随参数  $\gamma$ 变化曲线,其中 h=0.01,  $N_h=1000$ 。尽管本文选择了不同的时间步长和更长的总仿真时间,但是图 5 与图 4(a)的误差曲线是精确一致的。这意味着虽然时间步长变化了,但最优轨迹精度的参数  $\gamma_{opt}$  几乎不受时间步长与仿真时间长短的影响。为进一步分析轨迹误差随参数  $\gamma$ 的变化规律,进一步定义如下均值轨迹误差

$$E[\delta x] = \sum_{i=2}^{N+1} \left( \frac{1}{N_h + 1} \sum_{k=0}^{N_h} (\delta x_i^{(k)}) \right)$$
 (38)

$$E[\delta y] = \sum_{i=2}^{N+1} \left( \frac{1}{N_h + 1} \sum_{k=0}^{N_h} (\delta y_i^{(k)}) \right)$$
(39)

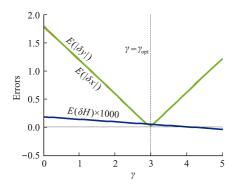


图 5 长时间绝对值误差随参数 γ变化曲线 Fig. 5 Curve of long-term absolute error with the parameter γ

通过上述定义,轨迹的均值误差变成可正可负。图 6给出了采用式(38,39)定义的误差随参数  $\gamma$ 变化趋势,其中 h=0.01,  $N_h=10$ 。数值结果显示轨迹误差随参数  $\gamma$ 呈现线性变化趋势,并且使误差最小的参数  $\gamma_{\rm opt}$  与图 5 的值一致。因此,可以采用较少的仿真时长预估最优参数  $\gamma_{\rm opt}$ 。

为预估  $\gamma_{\rm opt}$  的最优参数值,本文定义轨迹误差 均值的和为  $\delta W = E\left[\delta x\right] + E\left[\delta y\right]$ 。如图 6 所示, 误差  $\delta W$  随参数  $\gamma$  呈现线性变化趋势。进一步令  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 = \gamma_T$ ,  $\delta W_1 = \delta W(\gamma_1)$ ,  $\delta W_2 = \delta W(\gamma_2)$ , 然 后将这些取值代入式(11),计算得到  $\gamma_{\rm opt}$ 。

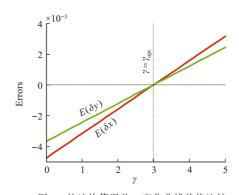


图 6 轨迹均值误差-γ变化曲线趋势比较 Fig. 6 Comparison of the trend of the averaged trajectory error-γ curve

表 2 给出了  $\gamma_1 = 0$  和  $\gamma_2 = \gamma_T$  时的误差  $\delta W_1$  与 δW<sub>2</sub> 的取值,以及通过式(11)计算出的 γ<sub>opt</sub> 取值, 其中 h=0.01,  $N_h=10$ 。表 3 给出了参数  $\gamma=\gamma_{out}$  以 及 h=0.04 时轨迹误差。可以看出,s=1 和 s=2时, x方向和 y 方向的轨迹误差分别减小了两个和 一个数量级。图 7 给出了 s=1 和 h=0.04 时多体 平面摆  $x_2$  分量与  $y_2$  分量的数值结果,其中黑色线 为解析解,红色 $\bigcirc$ 代表  $\gamma=0$  的数值解,蓝色 $\times$ 代表  $\gamma = \gamma_{out}$ 的数值解。数值结果表明,通过预先调节 待定参数 γ 的取值,数值积分的相位误差得到了大 幅降低。实际上对于  $s \ge 2$  的高阶情况,通过预参 数调节同样可以大幅降低,本文限于篇幅略去相关 讨论。需要指出,通过式(11)估计最优参数  $\gamma_{ont}$  需 要一定的额外计算量(不随仿真时间而增长)。所 以只有在长时间仿真和额外的计算量可以忽略不 计时,该方法才具有较大优势。

表 2 最优参数 Yopt 计算

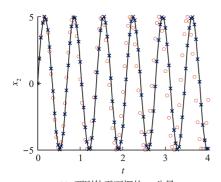
Tab. 2 Calculation of the optimal parameter  $\gamma_{opt}$ 

(s, s)	$\delta \mathbf{W}_1$	$\delta \mathbf{W}_2$	$\gamma_{\rm opt}$
(1,1)	-0.00516079	-0.003574097	2.981500943
(2,2)	−6.168893E-07	−3.251878E-07	1.938563795

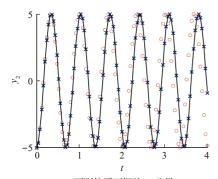
表 3 优化精度后的数值结果

TC 1 0	X T . 1	1.	* . 1		
Tab 3	Numerical	results	w/11h	ontimizing	accuracy
IUD. U	1 (different	icbarto	AAICII	Optimizing	accuracy

(s, s)	γ	$E[ \delta x ]$	Ε[ δy ]	E[ 8H ]
(1,1)	0	2.38E+00	2.47E + 00	3.25E-03
	$\gamma_{\rm opt}$	4.49E-02	4.63E-02	9.62E-04
(2,2)	0	4.13E-03	4.24E-03	3.23E-06
	$\gamma_{\rm opt}$	3.19E-04	3.25E-04	-5.42E-07



(a) 两刚体平面摆的  $x_2$  分量 (a)  $x_2$ -component of the 2-body planar pendulum



(b) 两刚体平面摆的  $y_2$  分量 (b)  $y_2$ -component of the 2-body planar pendulum

图 7 两体平面摆数值结果比较 Fig. 7 Comparison of numerical results of the 2-body planar pendulum

## 6 结 论

针对笛卡尔坐标描述的平面多刚体系统,本文提出了一种参数预调节保辛积分方法。在该方法构造过程中,首先引入约束零空间的正交投影矩阵,进而推导了平面多刚体系统的改进的拉格朗日方程,将动力学方程描述成包含待定参数  $\gamma$ 的微分代数方程组,然后参数预调节的保辛积分方法通过离散化改进的拉格朗日方程得到。为了减小数值方法的相位误差累积,本文利用数值积分的轨迹误差与参数  $\gamma$ 的近似线性关系,通过对误差线性插值,得到最优的参数值  $\gamma_{opt}$ 。数值结果表明通过预先估计最优的待定参数  $\gamma$ ,包含两个刚体平面摆的数值积分精度提升了  $1\sim 2$  个数量级,较大幅度地减小了保辛算法随时间累积的相位误差。

### 参考文献(References):

- [1] Blajer W. A geometric unification of constrained system dynamics [J]. Multibody System Dynamics, 1997,1(1):3-21.
- [2] Laulusa A, Bauchau O A. Review of classical approaches for constraint enforcement in multibody systems
  [J]. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 2008, 3(1):011004.
- [3] Hairer E, Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II[M]. New York; Springer, 1996.
- [4] Hairer E, Lubich C, Wanner G. Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations (Second Edition) [M]. Berlin: Springer, 2006.
- [5] 黄永安,尹周平,邓子辰,等. 多体动力学的几何积分方法研究进展[J]. 力学进展,2009,39(1):44-57. (HUANG Yong-an, YIN Zhou-ping, DENG Zi-chen, et al. Research progress of geometric integration method for multi-body dynamics[J]. Advances in Mechanics,2009,39(1):44-57. (in Chinese))
- [6] 那誉峰,季 奕,张慧敏. 时间积分方法的研究进展与挑战[J]. 北京航空航天大学学报,2022,48(9):1692-1701. (XING Yu-feng, JI Yi, ZHANG Hui-min. Advances and challenges in time integration methods [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics,2022,48(9):1692-1701. (in Chinese))
- [7] Reich S. Backward error analysis for numerical integrators [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1999, 36(5):1549-1570.
- [8] 那誉峰,杨 蓉.单步辛算法的相位误差分析及修正 [J].力学学报,2007,39(5):668-71. (XING Yu-feng, YANG Rong. Phase errors and their correction in symplectic implicit single-step algorithm[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2007,39(5):668-671. (in Chinese))
- [9] 刘晓梅,周钢,王永泓,等. 辛算法的纠颥研究 [J]. 北京航空航天大学学报,2013,39(1):22-26. (LIU Xiao-mei, ZHOU Gang, WANG Yong-hong, et al. Rectifying drifts of symplectic algorithm[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics,2013,39(1):22-26. (in Chinese))
- [10] 陈 璐,王雨顺.保结构算法的相位误差分析及其修 正 [J]. 计算数学,2014,36(3):271-90. (CHEN Lu, WANG Yu-shun. Phase error analysis and correction of structure preserving algorithms [J]. Mathematica Numerica Sinica,2014,36(3):271-290. (in Chinese))
- [11] 刘晓梅,王瑞平. 辛算法相位误差特性 [J]. 上海第二 工业大学学报,2015,32(4):325-330. (LIU Xiao-mei,

- WANG Rui-ping. The properties of phase-lag on symplectic algorithm[J]. *Journal of Shanghai Second Polytechnic University*, 2015, **32**(4):325-330. (in Chinese))
- [12] 朱 帅,周 钢,刘晓梅,等.精细辛有限元方法及其相位误差研究[J]. 力学学报,2016,48(2):399-405. (ZHU Shuai, ZHOU Gang, LIU Xiao-mei, et al. Precise symplectic time finite element method and the study of phase error[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2016,48(2):399-405. (in Chinese))
- [13] Hu W P, Song M Z, Deng Z C. Structure-preserving properties of Störmer-Verlet scheme for mathematical pendulum [J]. Applied Mathematics and Mechanics (English Edition), 2017, 38(9):1225-1232.
- [14] 刘晓梅,周 钢,朱 帅. Hamilton 系统下基于相位 误差的精细辛算法 [J]. 应用数学和力学,2019,40 (6): 595-608. (LIU Xiao-mei, ZHOU Gang, ZHU Shuai. A highly precise symplectic direct integration method based on phase errors for Hamiltonian systems[J]. Applied Mathematics and Mechanics,2019, 40(6):595-608. (in Chinese))
- [15] Noh G, Bathe K J. Further insights into an implicit time integration scheme for structural dynamics [J]. Computers & Structures, 2018, 202:15-24.
- [16] Noh G, Bathe K J. For direct time integrations: A comparison of the Newmark and  $\rho \infty$ -Bathe schemes

- [J]. Computers & Structures, 2019, 225:106079.
- [17] Noh G, Bathe K J. The Bathe time integration method with controllable spectral radius: The ρ∞-Bathe method [J]. Computers & Structures, 2019, 212: 299-310.
- [18] De Jalón J G, Gutiérrez-López M D. Multibody dynamics with redundant constraints and singular mass matrix: Existence, uniqueness, and determination of solutions for accelerations and constraint forces [J]. Multibody System Dynamics, 2013, 30(3):311-341.
- [19] Xu X M, Chen Y, Luo J, et al. Constructing time integration with controllable errors for constrained mechanical systems [J]. Applied Mathematical Modelling, 2023, 118:185-211.
- [20] Xu X M, Zhong W X. On the numerical influences of inertia representation for rigid body dynamics in terms of unit quaternion[J]. Journal of Applied Mechanics, 2016, 83(6):061006.
- [21] Xu X, Luo J H, Wu Z G. Extending the modified inertia representation to constrained rigid multibody systems [J]. Journal of Applied Mechanics, 2020, 87 (1):011010.
- [22] Jay L O. Specialized partitioned additive Runge-Kutta methods for systems of overdetermined DAEs with holonomic constraints[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2007, 45(5):1814-1842.

#### A parameter-preadjusted symplectic algorithm for planar rigid body systems

WU Zhi-gang\*, XU Xiao-ming

(School of Aeronautics and Astronautics, Shenzhen Campus of Sun Yat-sen University, Shenzhen 518107, China)

Abstract: Symplectic integrations have important applications for constrained Hamiltonian systems because they exhibit excellent stability in long-time simulations. However, the symplectic scheme usually has a large phase error accumulation with the increase of simulation time. This paper develops a parameter-preadjusted symplectic integration for planar rigid multibody systems with Cartesian coordinates. By deriving the modified Lagrangian equation with undetermined parameters, combining it with the existing symplectic scheme, and adjusting the corresponding parameter in advance, the symplectic method can greatly reduce the phase error of the numerical solution. Theoretical analysis and numerical results show that the new method not only preserves the symplectic structure of the flow but also presents a very low phase error accumulation. Therefore, the parameter-preadjusted symplectic integration is recommended for long-time simulations.

**Key words:** planar rigid body systems; Cartesian coordinates; orthogonal projection; symplectic algorithm; high-precision

引用本文/Cite this paper:

吴志刚,徐小明. 平面刚体系统的参数预调节保辛算法[J]. 计算力学学报,2024,41(1):101-107.

WU Zhi-gang, XU Xiao-ming. A parameter-preadjusted symplectic algorithm for planar rigid body systems [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2024, 41(1):101-107.