

基于弹性力学第一性原理的数据驱动力学建模

郑勇刚, 吴哲同, 张涵博, 刘振海, 叶宏飞, 张洪武*

(大连理工大学 工程力学系 工业装备结构分析优化与 CAE 软件全国重点实验室 大连 116024)

摘要:提出了一种基于弹性力学第一性原理的数据驱动力学建模方法,其能够从基于弹性力学方程的数值计算结果建立简洁且能准确捕捉变形机制的力学模型。基于有限元计算得到的高精度数据和无监督数据驱动控制方程识别方法 Seq-SVF,从梁的载荷和位移数据中自动识别出了 Timoshenko 梁形式的弯曲控制微分方程,得到了三种不同加载条件下剪切影响系数关于结构尺寸和力学参数的函数表达式。揭示了经典模型适用的加载条件,同时还给出了一种未发现的新模型。通过将基于弹性力学的第一性原理计算与数据驱动范式相结合,克服了传统建模方法的局限性和对人类经验的强依赖性,为建立简洁的力学模型提供了一种新途径。

关键词:结构力学模型;数据驱动;方程识别;Timoshenko 梁;第一性原理

中图分类号:O342

文献标志码:A

文章编号:1007-4708(2024)01-0073-08

1 引言

梁、板和壳等结构力学模型由于其形式简洁和具有准确表征物体主要变形模式的能力,其在工程获得了广泛应用。在有限元法 FEM^[1]和高性能计算机尚未普及之前,这些模型的建立为结构的力学响应分析带来了极大便利。虽然这些模型的控制方程目前可以从弹性力学基本方程退化得来^[2],然而其建立及发展成熟花费了科学家数十年乃至上百年的时间。同时,随着科学的不断发展,需要解决的力学问题变得愈加复杂,这使得传统建模方式面临巨大的挑战。近年来,数据科学作为继实验、理论和模拟之后的第四个科学范式,其与计算力学的结合得到了广泛的关注。结合大数据^[3]、人工智能^[4]和机器学习^[5,6]等技术的数据驱动计算力学新范式发展迅猛^[7,8],各种机器学习方法广泛应用于建立材料本构模型^[9,10]和高效求解力学响应^[11,12]等科学问题以及智能仿真与制造^[13]、异常管理监测^[14,15]和数字孪生^[16]等工程问题。

对于数据驱动力学建模问题,其主要难点在于构建快速稳健、自动化的控制方程识别方法^[7]。目前获得广泛应用的控制方程识别方法主要有两类,即符号回归方法和稀疏学习方法。符号回归方法采用二叉树形式的拓扑结构来描述输出与输入变

量之间的函数关系,并对结构进行迭代优化,得到具有较小误差的函数表达式,从而实现对输出变量的非线性拟合^[17]。近几年,符号回归与贝叶斯学习^[18]和图神经网络^[19]等技术相结合,在具有强非线性的拟合问题中也展现出强大的能力。稀疏学习方法则假设在整个状态搜索空间中,控制方程实际包含的只有其中少量的项,因此约束控制方程的稀疏性不仅可以平衡模型的精度和复杂性,也可以提升控制方程的可解释性和泛化能力。目前应用最广泛的稀疏学习方法有 LASSO^[20]和 SINDy^[21]。除了上述两大类识别方法外,深度学习^[6]也广泛用于拟合变量之间隐藏的非线性关系^[22,23],如基于物理信息的神经网络 PINN^[24]通过自动微分技术^[25,26]将已知具体形式的控制微分方程的残差加入到目标函数中,可从已知数据中识别出控制方程的系数。此外,量纲分析和最小作用量原理也结合用于方程的识别^[27],采用此方法已从三维静力学模拟数据中准确识别出了细长梁的 Euler-Bernoulli 挠曲线方程^[28]。

尽管上述方法成功应用于一些力学建模问题,但它们都需要预先提供关于控制方程的结构化先验知识,如控制方程的个数及需要进行回归的左端项表达式,在本质上都属于有监督的数据驱动方法。在面对一个崭新且复杂的力学系统时,上述方法所需的先验知识往往都是未知的,这使得其应用范围和可靠性大大降低。基于一种无监督的控制方程识别方法,序列奇异值过滤 Seq-SVF^[29]算法,本文提出了一种基于弹性力学第一性原理的数据

收稿日期:2023-08-11;修改稿收到日期:2023-10-08.

基金项目:国家重点研发计划(2022YFB4201200);国家自然科学基金(12072061;12072062;11972108)资助项目.

作者简介:张洪武*(1964-),男,博士,教授
(E-mail:zhanghw@dlut.edu.cn).

驱动力学建模方法。使用此方法从细长结构的高精度有限元计算数据中自动识别出了 Timoshenko 梁形式的挠曲线控制微分方程;区分了三种不同加载条件下剪切影响系数关于结构尺寸和力学参数的函数表达式,并对经典理论公式进行了修正。

2 基于弹性力学第一性原理的数据驱动力学建模方法

2.1 Seq-SVF 方法介绍

Seq-SVF 针对于解决如下形式的控制方程识别问题。

$$\begin{bmatrix} X_1^{(1)} & \cdots & X_N^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_1^{(M)} & \cdots & X_N^{(M)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1^{(1)} & \cdots & \lambda_1^{(P)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_N^{(1)} & \cdots & \lambda_N^{(P)} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (1)$$

式中 M 为采样点个数, P 为控制方程个数, X 为候选函数库中的各项, N 为总项数, $X_i^{(j)}$ 为第 j 个采样点处第 i 个候选函数的值, $\lambda_i^{(j)}$ 为第 j 个控制方程中第 i 项的系数。候选函数的种类可根据实际需要设置具体的形式,如观测量本身和其线性函数及幂、指数和三角函数等形式的非线性函数。式(1)将提取控制方程的问题转化为数据矩阵的零空间识别问题,即

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{\Lambda} = \mathbf{0} \quad (2)$$

式中 $\mathbf{X}$ 为通过直接测量及计算派生项得到的数据矩阵, $\mathbf{\Lambda}$ 为控制方程的系数阵。由于控制方程个数及需要进行回归的左端项都是未知的,因此 LASSO 和 SINDy 等经典的系统识别方法不再适用。Seq-SVF 基于奇异值分解方法 SVD 能够提取矩阵本征线性结构的特点,设计了一套高度自动化的迭代流程,用于准确识别方程个数及从候选函数库中提取方程中实际存在的项。此方法分为预处理、奇异值过滤、识别左端项和筛选相关项四个步骤。

2.1.1 预处理

由式(1,2)可知,每个控制方程的系数对应的列向量都是方程 $\mathbf{X} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一个非平凡解,且系数列向量之间是线性无关的。因此,数据矩阵的零空间的维数等于控制方程的个数 P 。基于上述原理,则可使用 SVD 识别控制方程个数。SVD 将一个矩阵分解为三个矩阵的乘积,即

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T \quad (3)$$

式中 $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{V}$ 均为正交矩阵, $\mathbf{\Sigma}$ 为奇异值矩阵,其存放了原始矩阵的所有奇异值,即

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_N & \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

当矩阵 $\mathbf{X}$ 奇异时,只有前 $\text{rank}(\mathbf{X})$ 个奇异值是非零的,即 $\sigma_{\text{rank}(\mathbf{X})+1} = \sigma_{\text{rank}(\mathbf{X})+2} = \cdots = \sigma_N = 0$ 。由于数据矩阵中存在噪声,使得这些严格为 0 的奇异值变为非零,其数量级与其他奇异值数量级的相对大小取决于噪声的水平。因此,在信号原有噪声相对较小并且对数据进行去噪处理后,可以通过 SVD 确定相对较小的奇异值个数,即为控制方程的个数 P 。Seq-SVF 选用高斯滤波方法对数据集进行去噪处理。此外,为了避免某项因为数量级太小而在后续识别过程中忽略,对数据矩阵的每一列使用 L2 正则化处理,

$$\mathbf{X}'_{ij} = \frac{\mathbf{X}_{ij}}{\sqrt{\sum_{k=1}^M \mathbf{X}_{kj}^2}} \quad (i=1, \cdots, M; j=1, \cdots, N) \quad (5)$$

2.1.2 奇异值过滤

由于在候选函数库中的函数数量可能远大于控制方程中实际存在的项数,因此需要构造一个自动化的迭代流程用于将无关项过滤掉。在获得控制方程个数 P 的基础上,Seq-SVF 依次删除数据集矩阵中的各列,进一步实施 SVD 并识别缺失此列的矩阵的控制方程个数来实现奇异值的过滤,即如果仍然识别出 P 个方程,说明此列对应的项不包含在方程组里面;如果识别出 $P-1$ 个方程,说明这项在方程组里面。将有关项对应的列重组成数据矩阵,确保了所识别方程的稀疏性,能够提升结果的可解释性和泛化能力。

2.1.3 识别左端项

在过滤掉与控制方程无关的项后,数据矩阵的零空间中任何 P 个线性无关的向量理论上都可以作为方程组的系数。然而如果不加约束地随意选取,所识别出的每一个方程都很有可能只是最简洁形式方程的复杂线性组合,这为理解其中蕴含的物理意义和进一步的应用增加了难度。Seq-SVF 的策略是选择最为线性无关的 P 列对应的项作为方程的左端项,其原理是由于待定的左端项可以由其余的项线性表示,因此保持左端项之间的独立性可以确保其与其余项具有强线性相关性。在线性代数领域中,上述问题称为列子集选择问题 CSSP^[30] 或内插分解 ID^[31], Seq-SVF 采用了求解此问题的代表性方法 sRRQR^[32],只需输入数据矩阵以及待提取列的个数 P ,即可识别出对应左端项在原数据矩阵中的位置。将识别出的左端项重新排列在数据矩阵的左侧,记为 $Y_1 - Y_P$; 其余项为右端项,记为 $Y_{P+1} - Y_{N'}$ 。

2.1.4 筛选相关项

为了确定各个方程的右端项及其系数,依次对

每个控制方程实施 2.1.2 节所述的步骤。即对 P 个左端项做循环,依次将每个左端项与所有的右端项组成数据矩阵,此时通过 SVD 会识别出 1 个控制方程,之后依次删除数据矩阵中的各右端项并实施 SVD;如果仍然识别出了 1 个控制方程,说明此右端项不包含在当前循环的左端项对应的控制方程里面;如果识别出了 0 个控制方程,说明此项应当保留。通过以上步骤,即可获得所有控制方程的所有项,其形式为

$$\begin{aligned} Y_1 &= \lambda_1^{(P+1)} Y_{P+1} + \lambda_1^{(P+2)} Y_{P+2} + \cdots + \lambda_1^{(N')} Y_{N'} \\ &\vdots \\ Y_P &= \lambda_P^{(P+1)} Y_{P+1} + \lambda_P^{(P+2)} Y_{P+2} + \cdots + \lambda_P^{(N')} Y_{N'} \end{aligned} \quad (6)$$

最后使用最小二乘法计算各项系数,得到最终的控制方程。需指出的是,对于在 2.1.2 节中过滤掉的项,其在式(6)中对应的系数直接设置为零。

综上所述,Seq-SVF 作为一种无监督的方程识别方法,能够在不依赖先验知识的情况下,自动识别出控制方程的个数并为每个方程识别一个左端项。借助 2.1.2 节和 2.1.4 节提出的识别方程稀疏结构方法,提升了结果的泛化能力和可解释性,相比于 LASSO 和 SINDy 结果更为准确并且具有更广的适用范围。数值分析表明,采用 Seq-SVF 从文献和数值模拟数据中可成功识别出多种经典的线性 and 非线性系统的控制方程,图 1 展示了对 Lorenz 动力系统的识别结果。

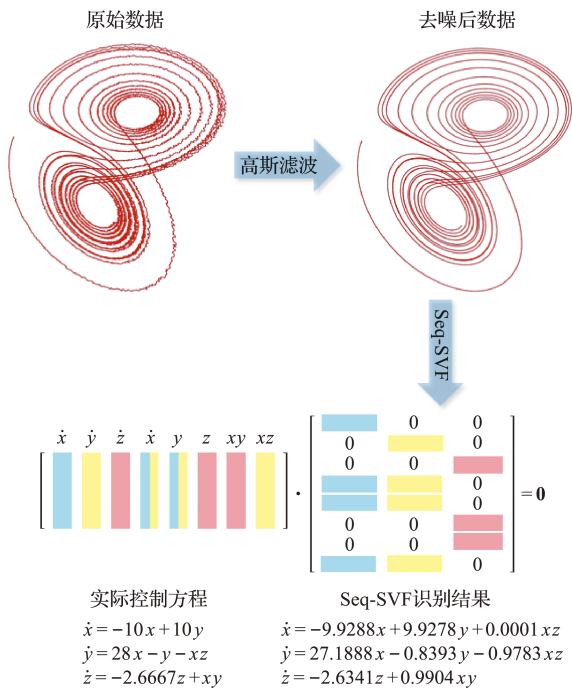


图 1 基于 Seq-SVF 的 Lorenz 动力系统控制方程识别结果
Fig. 1 Identification results of Lorenz dynamical system from Seq-SVF

2.2 基于弹性力学第一性原理的数据驱动力学建模方法流程

基于上述提出的 Seq-SVF 方法,本文进一步提出了基于弹性力学第一性原理的数据驱动力学建模方法,流程如图 2 所示,其可用于构建梁、板和壳等结构力学模型。本方法的主要步骤如下,首先对几何结构进行建模,施加载荷,使用有限元求解力学响应;之后收集感兴趣的位置(如梁中轴线和板中截面)处数据,根据具体需求设置候选函数库的形式;最后使用 Seq-SVF 自动识别其控制方程。

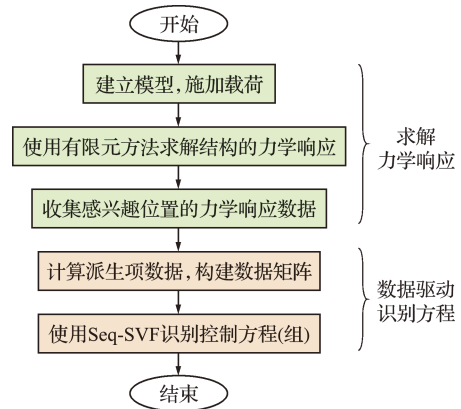


图 2 基于弹性力学第一性原理的数据驱动力学建模方法流程
Fig. 2 Flowchart of the data-driven mechanical modeling method based on the first principles of elasticity

3 梁弯曲模型的数据驱动识别

3.1 梁弯曲模型的建立与简化

考虑图 3 所示的受横向载荷作用的细长结构,为了从中轴线的横向位移有限元计算数据中建立梁挠曲线微分方程,首先根据模型的数学性质对控制方程的形式进行大体的猜测,从而对模型进行简化,以减少后续流程的工作量。

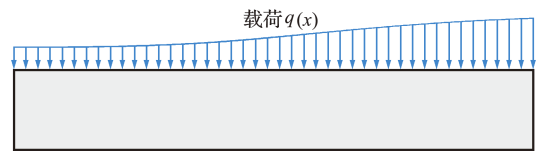


图 3 横向受载梁
Fig. 3 Transverse loaded beam

控制方程(组)中可能包含坐标 x 、挠度 $w(x)$ 和载荷 $q(x)$ 三个变量,以及结构的尺寸和力学参数,即杨氏模量 E 、泊松比 ν 、长 l 、宽 h 和高 b ,因此控制方程(组)可表示为

$$f(w(x), q(x), x, E, \nu, l, b, h) = 0 \quad (7)$$

使用有限元计算得到的挠曲线数据具有如下特征,(1) 由于不考虑材料和几何非线性,因此挠

曲线受线性规律控制,即控制方程是线性的,不含 $x \cdot w, (\partial w / \partial x)^2$ 和 $\sin(x)$ 等非线性项;(2) 在不受任何载荷时有 $w \equiv 0$, 因此控制方程是齐次的,即方程中不含有常数项和仅与 x 有关的函数项;(3) 由于要保证控制方程对于坐标的平移不变性,即容许刚体位移(滑移不变性),因此方程中不含有 w 这一项。

综上所述,控制方程形式上是一个(组)齐次线性常微分方程,

$$\alpha_i \frac{\partial w}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \cdots + \beta_0 q + \beta_1 \frac{\partial q}{\partial x} + \cdots = 0 \quad (8)$$

式中 i 为控制方程的序号($i=1, 2, \dots$)。对于微分阶次的选取,参考 Euler-Bernoulli 梁和 Timoshenko 梁的控制方程,对挠曲线的最高微分阶次设置为 4,对载荷的最高微分阶次设置为 2。因此待定的控制方程形式为

$$\alpha_1 \frac{\partial w}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \alpha_4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \beta_0 q + \beta_1 \frac{\partial q}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0 \quad (9)$$

3.2 载荷施加在梁上表面时挠曲线方程识别结果

首先,针对载荷施加在梁上表面的工况进行研究。此种工况可以用于分析梁承载重物的情况,并且许多求解矩形梁的弹性力学位移解的工作都是假设载荷施加于梁上表面的。根据式(9),候选函数库中包含 7 种函数,分别是挠度对坐标的 1 阶~4 阶微分和载荷对坐标的 0 阶~2 阶微分。对于载荷的选取,应当满足两个条件以确保识别结果的正确性,一是 $q, \partial q / \partial x$ 和 $\partial^2 q / \partial x^2$ 三者线性无关,否则将会识别出额外的控制方程;二是三者应具有相近的数量级,以确保其中某项不会因为太小而忽略。因此,将载荷设置为 $q = 1/(\sin x + 2)$, 施加在梁的上表面,使用有限元法进行计算并收集中轴线上所有节点的挠度,其中单元类型为平面应力四节点单元,厚度为 1。通过数值微分计算出 7 个候选函数的值并构建数据矩阵,将其代入 Seq-SVF 中识别控制方程。在步骤(1)预处理中,Seq-SVF 识别出数据矩阵具有一个明显小的奇异值,说明挠曲线受一个方程控制。之后在步骤(2)中依次删除各列,发现删除 $\partial w / \partial x, \partial^2 w / \partial x^2, \partial^3 w / \partial x^3$ 和 $\partial q / \partial x$ 四项后,控制方程的个数依旧是一个,说明这些项不存在于控制方程中;而删除 $\partial^4 w / \partial x^4, q$ 和 $\partial^2 q / \partial x^2$ 三项后控制方程的个数变为零,说明控制方程只包含这三项。最后,Seq-SVF 通过最小二乘法计算了各项的系数

$$\alpha(\partial^4 w / \partial x^4) - q + \beta(\partial^2 q / \partial x^2) = 0 \quad (10)$$

并且发现 $\partial^4 w / \partial x^4$ 的系数 α 与抗弯刚度 EI 的大小相等,即

$$EI(\partial^4 w / \partial x^4) = q - \beta(\partial^2 q / \partial x^2) \quad (11)$$

这与 Timoshenko 梁的控制方程形式一致^[33,34]。对于 $\partial^2 q / \partial x^2$ 的系数,通过改变模型参数,发现 β 与弹性模量 E 和梁长度 l 无关,随泊松比 ν 和梁高度 h 的改变而改变。为了进一步验证结果,将载荷设置为多项式形式,即

$$q = x^3 + x^2 + x \quad (12)$$

对挠曲线进行多项式拟合,得到挠曲线的四阶微分方程的函数式,即

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{1}{EI} [x^3 + x^2 + x - \beta(6x + 2)] \quad (13)$$

将式(12,13)代入式(11),等式左右相等,再次验证了所识别弯曲方程的准确性。对比两种载荷下 β 的值,发现几乎一致,列入表 1,说明控制方程的系数不受具体载荷形式的影响。此外,通过表 1 中 β 随 ν 和 h 的变化情况,发现 β 与 ν 有线性关系,并且与 h 的平方成正比,即

$$\beta = h^2(m + n \cdot \nu) \quad (14)$$

通过对表 1 的数据进行线性拟合,得到 β 的函数表达式为

$$\beta = h^2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{8} \nu \right) \quad (15)$$

表 1 β 与泊松比 ν 和梁高度 h 的定量关系

Tab.1 Relationship between the values of β and ν, h

$q = 1/(\sin x + 2)$					
$h \backslash \nu$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.2	0.0084	0.0089	0.0094	0.0099	0.0104
0.4	0.0334	0.0354	0.0374	0.0394	0.0414
0.8	0.1349	0.1430	0.1512	0.1594	0.1676
1.0	0.2120	0.2247	0.2373	0.2499	0.2627
$q = x^3 + x^2 + x$					
$h \backslash \nu$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.2	0.0084	0.0089	0.0094	0.0100	0.0105
0.4	0.0339	0.0359	0.0379	0.0400	0.0420
0.8	0.1357	0.1438	0.1518	0.1598	0.1679
1.0	0.2121	0.2246	0.2372	0.2498	0.2624

3.3 载荷施加在梁内部及中轴线上时挠曲线方程识别结果

针对载荷施加在梁内部及中轴线上的工况进行研究。其中,载荷分布在内部可以准确分析梁的自重对于梁弯曲变形的影响;当发生火灾时,受温度的影响,混凝土与其内部的钢筋具有不同的强度折减系数,并且有时钢筋会发生失效甚至熔化,导致结构的坍塌,此时通过在中轴线上施加等效热应力载荷可以准确分析梁整体的力学响应^[35]。研究

方法与 3.2 节相同,得到 β 与泊松比 ν 和梁高度 h 的定量关系,列入表 2。两种工况下 β 仍然与 ν 有线性关系,并且与 h 的平方成正比。通过线性拟合得到

$$\begin{aligned}\beta &= h^2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \nu \right) \quad (\text{载荷分布在梁内部}) \\ \beta &= h^2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} \nu \right) \quad (\text{载荷施加在中轴线})\end{aligned}\quad (16)$$

表 2 载荷施加在梁内部和中轴线上时 β 与泊松比 ν 和梁高度 h 的定量关系

Tab. 2 Relationship between the values of β and ν, h with loads applied inside the beam and on the middle line

载荷分布在梁内部					
$h \backslash \nu$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.2	0.0088	0.0096	0.0104	0.0112	0.0121
0.4	0.0352	0.0385	0.0417	0.0450	0.0483
0.8	0.1411	0.1543	0.1676	0.1808	0.1940
1.0	0.2205	0.2412	0.2618	0.2824	0.3031
载荷施加在梁中轴线					
$h \backslash \nu$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.2	0.0090	0.0100	0.0110	0.0120	0.0130
0.4	0.0359	0.0399	0.0440	0.0480	0.0520
0.8	0.1437	0.1598	0.1757	0.1918	0.2079
1.0	0.2234	0.2486	0.2738	0.2991	0.3245

3.4 与经典理论对比

通过将式 (11) 的系数与 Timoshenko 梁模型^[30,31]进行对比,并将 $I = bh^3/12, G = E/[2(1 + \nu)]$ 和 $A = bh$ 代入,得到剪切影响系数与载荷二阶微分项系数 β 的函数关系为

$$\kappa = h^2(1 + \nu)/(6\beta) \quad (17)$$

将式 (15,16) 代入式 (17), 得到三种加载位置对应的 κ 值为

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{5(1 + \nu)}{6(1 + 5\nu/8)} \quad (\text{载荷施加在梁上端}) \\ \kappa &= \frac{5}{6} \quad (\text{载荷分布在梁内部}) \\ \kappa &= \frac{5(1 + \nu)}{6(1 + 5\nu/4)} \quad (\text{载荷施加在中轴线})\end{aligned}\quad (18)$$

通过与已有理论对比发现,载荷施加在梁上端时,识别出的控制方程对应 Olsson^[36]提出的表达式;载荷分布在梁内部时, $\kappa = 5/6$, 与经典理论一致;载荷施加在中轴线上时,没有已有理论与之对应,即通过数据驱动方法发现了一个新的理论公式用于分析此工况。

为了验证识别结果的准确性,设计了一些算例,将经典 Euler-Bernoulli 梁和 Timoshenko 梁的

解、本文识别方程的数值求解结果,以及有限元高精度解进行对比。长和高为 4×0.4 的两端简支梁在上端受载荷 $q = 1/(\sin 3x + 2)$ 的结果如图 4 所示。对于数值求解本文识别方程时需设置的边界条件,分别尝试了 Euler-Bernoulli 梁和 Timoshenko 梁形式的边界条件。结果表明,采用本文识别出的控制微分方程,并将边界条件设置为 Timoshenko 梁的形式时,其数值求解结果与有限元计算结果最为接近。

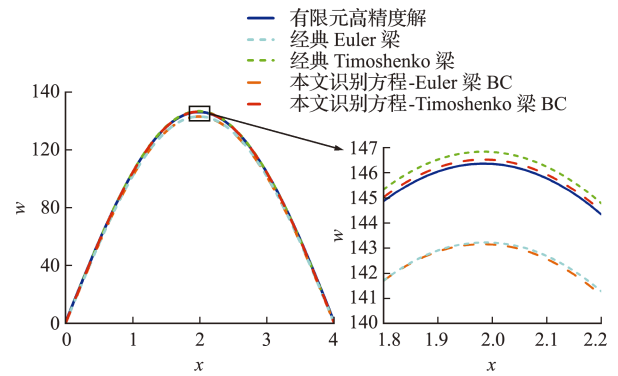
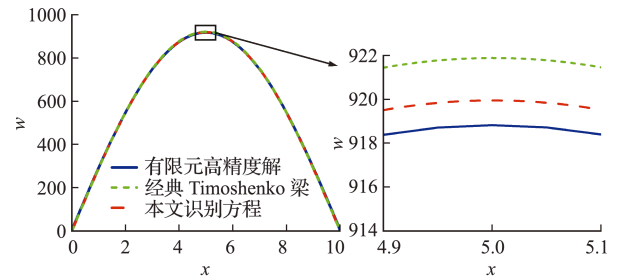


图 4 与有限解和经典模型解对比

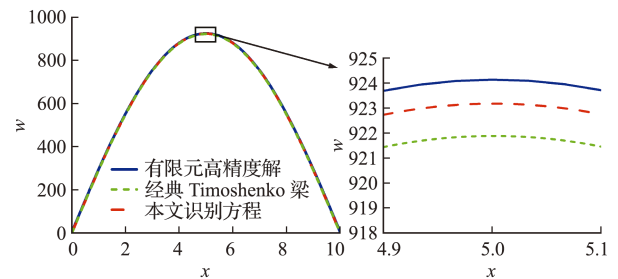
Fig. 4 Comparison with the solutions of FEM and classical models

之后将梁尺寸改为 10×1 , 载荷施加在上表面和中轴线上的结果如图 5 所示,再次验证了识别结果的准确性。



(a) 载荷施加在上表面的结果

(a) Results for the case with load applying on the upper surface



(b) 载荷施加在中轴线的结果

(b) Results for the case with load applying on the middle line

图 5 与有限解和经典模型解对比(尺寸: 10×1)

Fig. 5 Comparison with the solutions of FEM and classical models(size: 10×1)

最后,设计了一个三明治型结构,来说明本文识别的梁模型对于分析复杂复合工况的准确性。

载荷如图 6(a)所示,在梁的上下表面和中轴线处均受到加载,并且整体受到重力的作用。对于传统梁模型,是不区分载荷位置是在上线和中线还是内部的,而本文模型能够区分不同加载位置得到的不同挠曲线响应。通过线性叠加原理对挠曲线进行计算

$$w = w_1 + w_2 + w_3 + w_4$$

$$\frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} = \frac{1}{EI} \left[q_i - h^2 \left(\frac{1}{5} + \theta_i \nu \right) \frac{\partial^2 q_i}{\partial x^2} \right] \quad (19)$$

$$\theta_1 = \theta_3 = 1/8, \theta_2 = 1/4, \theta_4 = 1/5$$

与有限元解对比如图 6(b)所示,可以看出两者吻合良好。此外,通过变形后梁的形状可以发现,梁的截面在变形后依旧保持近似平面,而且截面与中轴线是不垂直的,这在 $x=2$ 和 $x=8$ 处的截面体现得尤为明显。这说明了 Timoshenko 梁模型保留截面变形后为平面的假设并抛弃轴线与截面垂直的假设,与弹性力学解非常相符。

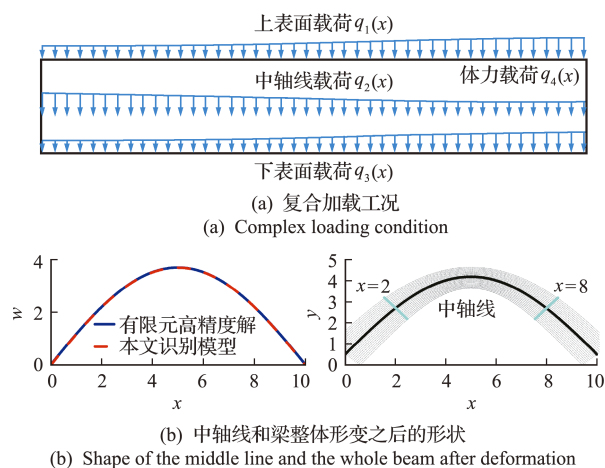


图 6 复合加载工况下与有限元解的对比

Fig. 6 Comparison with the solutions of FEM under a complex loading condition

4 结 论

本文提出了一种基于弹性力学第一性原理的数据驱动力学建模方法,采用无监督的控制方程识别方法 Seq-SVF,能够从弹性力学高精度解中自动识别简化的力学模型。使用精细有限元计算梁受横向载荷下的挠曲线数据,识别出的控制微分方程中包含载荷的二阶微分项,其形式与 Timoshenko 梁的控制方程一致。通过在同一尺寸模型中施加具有不同形状的载荷,得出控制方程系数不随载荷的形式改变的结论。通过改变模型参数,得到载荷二阶微分项的系数与模型参数的定量关系,并对三种载荷加载位置下剪切修正因子的函数表达式进行了区分,其中载荷施加在上表面和内部时识别

出的控制方程分别与两种已有理论对应,在载荷施加在梁中轴的工况下发现了一种新的剪切修正因子表达式。最后对识别的控制方程进行数值求解,得到的结果比经典 Timoshenko 梁方程的数值解要更为接近弹性力学精确解。

参考文献(References):

- [1] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京:清华大学出版社, 2003. (WANG Xu-cheng. *Finite Element Method* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003. (in Chinese))
- [2] Reddy J N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis* [M]. Boca Raton: CRC Press, 2004.
- [3] Gandomi A, Haider M. Beyond the hype: Big data concepts, methods, and analytics [J]. *International Journal of Information Management*, 2015, **35**(2): 137-144.
- [4] 鲍跃全,李 惠. 人工智能时代的土木工程[J]. 土木工程学报, 2019, **52**(5): 1-11. (BAO Yue-quan, LI Hui. Artificial intelligence for civil engineering [J]. *China Civil Engineering Journal*, 2019, **52**(5): 1-11. (in Chinese))
- [5] Jordan M I, Mitchell T M. Machine learning: Trends, perspectives, and prospects [J]. *Science*, 2015, **349**(6245): 255-260.
- [6] LeCun Y, Bengio Y, Hinton G. Deep learning [J]. *Nature*, 2015, **521**(7553): 436-444.
- [7] 王 鹏,孙 升,张 庆,等. 力学信息学简介[J]. 自然杂志, 2018, **40**(5): 313-322. (WANG Peng, SUN Sheng, ZHANG Qing, et al. A brief introduction of mechanoinformations [J]. *Chinese Journal of Nature*, 2018, **40**(5): 313-322. (in Chinese))
- [8] 阳 杰,徐 锐,黄 群,等. 数据驱动计算力学研究进展[J]. 固体力学学报, 2020, **41**(1): 1-14. (YANG Jie, XU Rui, HUANG Qun, et al. Research progress of data-driven computational mechanics [J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2020, **41**(1): 1-14. (in Chinese))
- [9] Hashash Y M A, Jung S, Ghaboussi J. Numerical implementation of a neural network based material model in finite element analysis [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, **59**(7): 989-1005.
- [10] 明瑞典,刘云飞,王计真,等. 数据/物理驱动的复合材料非线性力学响应代理模型[J/OL]. 计算力学学报 (2023-08-29) [2023-10-08]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/21.1373.O3.20230828.1816.016.html>. (MING Rui-dian, LIU Yun-fei, WANG Ji-zhen, et al. Data/physics-driven surrogate models for the nonlinear

- mechanical response of composite materials [J/OL]. *Chinese Journal of Computational Mechanics* (2023-08-29) [2023-10-08]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/21.1373.O3.20230828.1816.016.html>. (in Chinese))
- [11] Kirchdoerfer T, Ortiz M. Data-driven computational mechanics[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2016, **304**:81-101.
- [12] 陈豪龙,柳占立. 基于数据驱动模型求解热传导反问题[J]. 计算力学学报, 2021, **38**(3):272-279. (CHEN Hao-long, LIU Zhan-li. Solving the inverse heat conduction problem based on data driven model [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2021, **38**(3):272-279. (in Chinese))
- [13] 周 济. 智能制造——“中国制造 2025”的主攻方向[J]. 中国机械工程, 2015, **26**(17):2273-2284. (ZHOU Ji. Intelligent manufacturing, Main direction of “Made in China 2025” [J]. *China Mechanical Engineering*, 2015, **26**(17):2273-2284. (in Chinese))
- [14] 姜绍飞. 结构健康监测-智能信息处理及应用[J]. 工程力学, 2009, **26**(S2):184-212. (JIANG Shao-fei. Structural health monitoring-Intelligent information processing and application [J]. *Engineering Mechanics*, 2009, **26**(S2):184-212. (in Chinese))
- [15] 黄 炎,葛思源,翟慕寒,等. 环境温度影响下基于 LSTM 神经网络识别结构损伤[J/OL]. 计算力学学报. (HUANG Yan, GE Si-yuan, ZHAI Mu-sai, et al. Structural damage identification based on lstm neural networks under ambient temperature variations [J/OL]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, <http://kns.cnki.net/kcms/detail/21.1373.O3.20230309.0947.006.html>. (in Chinese))
- [16] 宫志群,王永志,廖少明. 基于数字孪生的建设工程项目管理数字化[J/OL]. 土木工程学报 (2023-07-27) [2023-10-08]. <https://doi.org/10.1595/j.tmgcxb.23040317>. (GONG Zhi-qun, WANG Yong-zhi, LIAO Shao-ming. Digitalization of construction engineering project management based on the digital twin [J/OL]. *China Civil Engineering Journal* (2023-07-27) [2023-10-08]. <https://doi.org/10.1595/j.tmgcxb.23040317>. (in Chinese))
- [17] Bongard J, Lipson H. Automated reverse engineering of nonlinear dynamical systems[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2007, **104**(24):9943-9948.
- [18] Guimerà R, Reichardt I, Aguilar-Mogas A, et al. A Bayesian machine scientist to aid in the solution of challenging scientific problems[J]. *Science Advances*, 2020, **6**(5):eaav6971.
- [19] Cranmer M, Sanchez-Gonzalez A, Battaglia P, et al. Discovering symbolic models from deep learning with inductive biases[A]. *Processings of 34th International Conference on Neural Information Processing Systems*[C]. 2020.
- [20] Tibshirani R. Regression shrinkage and selection via the Lasso: A retrospective[J]. *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*, 2011, **73**(2):273-282.
- [21] Brunton S L, Proctor J L. Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2016, **113**(15):3932-3937.
- [22] Hornik K, Stinchcombe M, White H. Multilayer feed-forward networks are universal approximators [J]. *Neural Networks*, 1989, **2**(5):359-366.
- [23] Cybenko G. Approximation by superpositions of a sigmoidal function [J]. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 1989, **2**(4):303-314.
- [24] Raissi M, Perdikaris P, Karniadakis G E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 2019, **378**:686-707.
- [25] Gunes B A, Pearlmutter Barak A, Andreyevich R A, et al. Automatic differentiation in machine learning: A survey[J]. *Journal of Machine Learning Research*, 2018, **18**:1-43.
- [26] Vigliotti A, Auricchio F. Automatic differentiation for solid mechanics [J]. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2021, **28**(3):875-895.
- [27] Huang Z, Tian Y, Li C, et al. Data-driven automated discovery of variational laws hidden in physical systems [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2020, **137**:103871.
- [28] Huang Z C, Li C J, Huang Z L, et al. AI-Timoshenko: Automatically discovering simplified governing equations for applied mechanics problems from simulated data [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2021, **88**(10):101006.
- [29] Wu Z, Ye H, Zhang H, et al. Seq-SVF: An unsupervised data-driven method for automatically identifying hidden governing equations[J]. *Computer Physics Communications*, 2023, **292**:108887.
- [30] Kishore K N, Schneider J. Literature survey on low rank approximation of matrices [J]. *Linear and Multilinear Algebra*, 2017, **65**(11):2212-2244.
- [31] Liberty E, Woolfe F, Martinsson P G, et al. Randomized algorithms for the low-rank approximation of

- matrices [J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2007, **104**(51): 20167-20172.
- [32] Gu M, Eisenstat S C. Efficient algorithms for computing a strong rank-revealing QR factorization [J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1996, **17**(4): 848-869.
- [33] Timoshenko S P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars [J]. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1921, **41**(245): 744-746.
- [34] Timoshenko S P. On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section [J]. *The London Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1922, **43**(253): 125-131.
- [35] 陆洲导, 朱伯龙, 周跃华. 钢筋混凝土简支梁对火灾反应的试验研究 [J]. *土木工程学报*, 1993, **26**(3): 47-54. (LU Zhou-dao, ZHU Bo-long, ZHOU Yue-hua. Experimental study on fire response of simple supported reinforced concrete beams [J]. *China Civil Engineering Journal*, 1993, **26**(3): 47-54. (in Chinese))
- [36] Olsson R G. Zur berechnung der frequenz der transversalschwingungen des prismatischen stabes [J]. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1935, **15**(4): 245. (in German)

Data-driven mechanical modeling based on the first principles of elasticity

ZHENG Yong-gang, WU Zhe-tong, ZHANG Han-bo, LIU Zhen-hai,

YE Hong-fei, ZHANG Hong-wu*

(State Key Laboratory of Structural Analysis, Optimization and CAE Software for Industrial Equipment,
Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: A data-driven mechanical modeling method based on the first principles of elasticity is proposed in this paper, which enables the identification of concise mechanical models that can accurately capture the deformation mechanism from the numerical simulation results of elasticity. Based on the high-precision data obtained from finite element calculations and the unsupervised data-driven identification method of Seq-SVF, the governing differential equation to describe the bending deformation in the form of Timoshenko beam is automatically identified from the load and displacement data, and the expressions of the shear correction coefficient as a function of structural dimension and mechanical parameters under three different loading conditions are identified. The results reveal the applicability of classical beam models in cases of different loading conditions, and a new model is also established. By combining the first-principle calculation of elasticity with the data-driven paradigm, a new approach is provided for building and analyzing complex mechanical models, which can overcome the limitations and the strong dependence on human experience of traditional modeling methods.

Key words: structural mechanics model; data-driven method; equation identification; Timoshenko beam; first principles

引用本文/Cite this paper:

郑勇刚, 吴哲同, 张涵博, 等. 基于弹性力学第一性原理的数据驱动力学建模 [J]. *计算力学学报*, 2024, **41**(1): 73-80.

ZHENG Yong-gang, WU Zhe-tong, ZHANG Han-bo, et al. Data-driven mechanical modeling based on the first principles of elasticity [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2024, **41**(1): 73-80.