

DOI: 10.7511/jslx20230808001

# 含裂纹纳米板振动问题的哈密顿体系方法

屈建龙, 周震寰, 徐新生\*

(大连理工大学 工程力学系 工业装备结构分析优化与 CAE 软件全国重点实验室, 大连 116024)

**摘要:** 基于裂纹处范德华力效应, 采用非局部弹性理论构造纳米板模型, 并通过导入哈密顿体系建立含裂纹纳米板振动问题的对偶正则控制方程组。在全状态向量表示的哈密顿体系下, 将含裂纹纳米板的固有频率和振型问题归结为广义辛本征值和本征解问题。利用哈密顿体系具有的辛共轭正交关系, 得到问题解的级数解析表达式。结合边界条件, 得到固有频率与辛本征值的代数方程关系式, 进而直接给出固有频率的表达式。数值结果表明, 非局部尺寸参数和裂纹长度对纳米板振动的各阶固有频率有直接的影响。对比表明, 辛方法是准确且可靠的, 可为工程应用提供依据。

**关键词:** 哈密顿体系; 含裂纹纳米板; 非局部理论; 振动; 固有频率

**中图分类号:** O327 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-4708(2024)01-0066-07

## 1 引言

随着纳米机电系统在航空航天、医学和机械电子等领域的广泛应用, 对纳米结构的可靠性和安全性更加重视。纳米板作为纳米机电系统的基本构件, 其出现裂纹或损伤会直接影响系统的工作状态, 甚至破坏<sup>[1-3]</sup>。因此, 对含裂纹或损伤纳米板动力学特性的深入研究是必要的<sup>[4]</sup>。由于尺寸效应, 经典的连续介质力学理论不再适用纳米结构的相关问题<sup>[5,6]</sup>。为此, Eringen<sup>[7]</sup>提出了一种适合纳米级结构的非局部弹性理论, 如纳米板的弯曲问题和振动问题等<sup>[8]</sup>。非局部弹性理论假设某点的应变状态不仅与该点的应力有关, 而且与域内的应力都相关。相比于经典的连续介质力学理论, 非局部弹性理论考虑了分子间的作用力对物体内某一点应变状态的影响。在纳米尺度下, 分子间的范德华力是不可忽略的, 因而在分析含裂纹纳米板的问题中, 非局部弹性理论具有一定的优势。研究含裂纹纳米板的问题时, 多采用修正的偶应力理论<sup>[9]</sup>和应变梯度理论<sup>[10]</sup>, 并以弹簧模型<sup>[11]</sup>拟合裂纹域内近场应力状态<sup>[12]</sup>, 从而建立含裂纹纳米板的控制方程。进一步得到含裂纹纳米板的固有频率和固有振型<sup>[13]</sup>, 结果表明, 裂纹效应会导致固有频率降低。然而, 这些方法仅适用于几种特殊的边界条

件, 因而有一定的局限性。因此, 采用非局部弹性理论研究含裂纹纳米板的振动问题是一种尝试。

钟万勰院士<sup>[14]</sup>以某一空间坐标模拟虚拟的时间, 并利用守恒性, 开创了弹性力学问题求解新体系, 从而形成一整套独特的求解系统。在该哈密顿体系下, 将问题归结为辛本征值和本征解问题。由于辛本征解之间满足辛共轭正交关系, 因此存在辛本征解展开定理, 从而形成一种有效的方法<sup>[15-21]</sup>。本文将非局部弹性理论与哈密顿体系方法相结合, 提出一种研究含裂纹纳米板振动问题的思路。

## 2 基本问题

考虑如图 1 所示的含裂纹纳米板模型, 其中纳米板的长度为  $2a$ , 宽度为  $2b$ , 高为  $h$ 。取纳米板的中心为坐标原点, 沿纳米板的长度方向为  $x$  轴, 宽度方向为  $y$  轴。在纳米板的中心存在一条平行于  $x$  轴的水平表面裂纹, 裂纹的长度记为  $2a_c$ 。纳米板的横向位移为  $w$ , 纳米板密度  $\rho$ , 弹性模量  $E$ ,

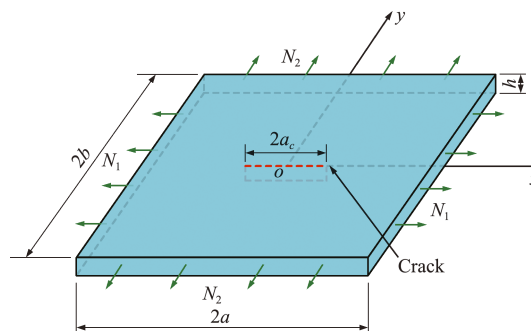


图 1 含裂纹纳米板

Fig. 1 Geometry of nanoscale plate with a surface crack

收稿日期: 2023-08-08; 修改稿收到日期: 2023-10-15.

基金项目: 工业装备结构分析优化与 CAE 软件全国重点实验室(S22303)资助项目.

作者简介: 徐新生\* (1957-), 男, 博士, 教授  
(E-mail: xxsxu@dlut.edu.cn).

泊松比  $\nu$ , 振动频率  $\omega$ , 剪切模量  $G = E/2(1 + \nu)$ , 板的弯曲刚度  $D = Eh^3/12(1 + \nu^2)$ 。依据非局部弹性理论<sup>[7]</sup>, 各向同性材料的应力  $\sigma_{ij}$  与应变  $\epsilon_{ij}$  的本构关系可以表示为

$$(1 - \xi^2 \nabla^2) \sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1)$$

式中  $\nabla^2$  为拉普拉斯算子,  $\xi$  为非局部参数,  $C_{ijkl}$  为弹性系数张量。

根据非局部本构关系, 可以将非局部弯矩用位移表示为

$$\begin{cases} (1 - \xi^2 \nabla^2) M_x = -D(\partial_x^2 \tau + \nu \partial_y^2 \tau) \\ (1 - \xi^2 \nabla^2) M_y = -D(\partial_y^2 \tau + \nu \partial_x^2 \tau) \\ (1 - \xi^2 \nabla^2) M_{xy} = -D(1 - \nu) \partial_x \partial_y \tau \end{cases} \quad (2)$$

式中  $\partial_x = \partial \tau / \partial x$ ,  $\partial_y = \partial \tau / \partial y$ 。由反映裂纹处范德华力效应的线弹簧模型和 kirchhoff 型经典薄板理论<sup>[22]</sup>, 纳米板中一条平行于  $x$  轴的中心水平裂纹引起的裂纹处的荷载可等效为  $\bar{M}_y$  和  $\bar{N}_x$ , 且可表示为

$$\bar{M}_y = -\xi_{M_x} M_y, \quad \bar{N}_x = -\xi_{N_x} N_x \quad (3)$$

式中  $\xi_{M_x}$  和  $\xi_{N_x}$  为裂纹特征系数<sup>[23]</sup>。含裂纹纳米板振动的控制方程<sup>[22]</sup>为

$$\partial_x^2 M_x + 2 \partial_x \partial_y M_{xy} + (1 - \xi_{M_x}) \partial_y^2 M_y + N_1 \partial_x^2 \tau + (1 + \xi_{N_x}) N_2 \partial_y^2 \tau + \rho h \omega^2 \tau = 0 \quad (4)$$

利用关系式(2), 用位移表示的控制方程(4)为

$$\begin{aligned} D_1 \partial_x^4 \tau + D_{12} \partial_x^2 \partial_y^2 \tau + D_2 \partial_y^4 \tau - K_1 \partial_x^2 \tau - \\ K_2 \partial_y^2 \tau - K_0 \tau = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

式中  $D_1 = D + \xi^2 N_1$

$$D_2 = D(1 - \xi_{M_x}) + \xi^2 N_2(1 + \xi_{N_x})$$

$$D_{12} = D(2 - \nu \xi_{M_x}) + \xi^2 N_2(1 + \xi_{N_x}) + \xi^2 N_1$$

$$K_0 = \rho h \omega, \quad K_1 = N_1 - \xi^2 K_0$$

$$K_2 = N_2(1 + \xi_{N_x}) - \xi^2 K_0。$$

### 3 导入哈密顿体系

为导入哈密顿体系, 将  $x$  模拟为时间坐标, 定义  $\dot{w} = \partial_x w$ 。记  $q_1 = w$  和纳米板在  $x$  方向的转角  $q_2 = -\dot{w}$ 。含裂纹纳米板振动问题的拉格朗日密度函数可表示为

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2} \{ & K_1 \dot{q}_1^2 - 2D_1 \ddot{q}_1 \dot{q}_1 - 2(D_{12} - D_0) \dot{q}_1 (\partial_y^2 \dot{q}_1) - \\ & 2D_1 q_2 \ddot{q}_1 - 2(D_{12} - D_0) q_2 (\partial_y^2 \dot{q}_1) + D_1 \dot{q}_2^2 - \\ & 2D_0 \dot{q}_2 (\partial_y^2 q_1) + D_2 (\partial_y^2 q_1)^2 + K_2 (\partial_y q_1)^2 + \\ & (D_{12} - 2D_0) (\partial_y q_2)^2 - K_0 q_1^2 \} \end{aligned} \quad (6)$$

式中  $D_0 = D\nu(1 - \xi_{M_x}/2)$ 。可以验证, 将关系  $q_2 = -\dot{w}$  代入方程(6), 并对式(6)变分可得到控制方程(5)。记原变量向量  $\mathbf{q} = \{q_1, q_2\}^T$ 。根据勒让德变

换可得  $\mathbf{q}$  的对偶变量向量  $\mathbf{p} = \partial L / \partial \dot{\mathbf{q}}$ , 即其分量为

$$\begin{cases} p_1 = -D_1 \ddot{q}_1 - (D_{12} - D_0) (\partial_y^2 \dot{q}_1) + K_1 \dot{q}_1 \\ p_2 = D_1 \dot{q}_2 - D_0 (\partial_y^2 q_1) \end{cases} \quad (7)$$

对偶向量的物理意义分别为广义剪力和广义弯矩。记全状态向量  $\Psi = \{\mathbf{q}^T, \mathbf{p}^T\}^T = \{q_1, q_2, p_1, p_2\}^T$ 。哈密顿密度函数  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{p} - L(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , 即

$$\begin{aligned} H = & -q_2 p_1 + \frac{1}{2D_1} p_2^2 - \frac{1}{2} D_{12} (\partial_y q_2)^2 - \\ & \frac{1}{2} K_1 (q_2)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{D_0^2}{D_1} + D_2 \right) (\partial_y^2 q_1)^2 - \\ & \frac{1}{2} K_2 (\partial_y q_1)^2 + \frac{1}{2} K_0 q_1^2 \end{aligned} \quad (8)$$

依据哈密顿变分原理, 有哈密顿正则方程组  $\dot{\mathbf{q}} = \delta H / \delta \mathbf{p}$  和  $\dot{\mathbf{p}} = -\delta H / \delta \mathbf{q}$ 。将其表示成向量和矩阵形式为

$$\dot{\Psi} = \mathbf{H} \Psi \quad (9)$$

式中  $\mathbf{H}$  为哈密顿算子矩阵

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ D_0 D_1^{-1} \partial_y^2 & 0 & 0 & D_1^{-1} \\ S_1 & 0 & 0 & -D_0 D_1^{-1} \partial_y^2 \\ 0 & S_2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中 算子  $S_1 = (D_2 - D_0^2 D_1^{-1}) \partial_y^4 - K_2 \partial_y^2 - K_0$ ,  $S_2 = -(D_{12} - 2D_0) \partial_y^2 + K_1$ 。由于哈密顿正则方程组(9)与方程(5)是等价的, 所以该方程组加上边界条件就形成一个封闭的问题。

### 4 辛本征值和本征解

采用分离变量方法, 设  $\Psi(x, y) = \Psi_\mu(y) e^{\mu x}$ , 其中  $\mu$  为辛本征值,  $\Psi_\mu$  为对应的辛本征解向量。将其代入方程(9)可得

$$\mu \Psi_\mu = \mathbf{H} \Psi_\mu \quad (11)$$

求解式(11), 可得特征方程

$$D_2 \lambda^4 + (D_{12} \mu^2 - K_2) \lambda^2 + D_1 \mu^4 - K_1 \mu^2 - K_0 = 0 \quad (12)$$

记方程的四个根为  $\lambda = \lambda_k (k=1, 2, 3, 4)$ , 其中  $\lambda_2 = -\lambda_1, \lambda_4 = -\lambda_3$ 。方程(12)同时也给出频率  $\omega$  与辛本征值  $\mu$  和特征根  $\lambda$  的关系。根据特征根, 辛本征解可表示为

$$\bar{\Psi}_\mu(y) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sinh(\lambda_1 y) \\ \cosh(\lambda_1 y) \\ \sinh(\lambda_3 y) \\ \cosh(\lambda_3 y) \end{Bmatrix} \quad (13)$$

式中  $A_{jk} (j, k=1, 2, 3, 4)$  为待定系数, 且这些待定系数并非相互独立。应该指出, 对于特征方程(12)的重根或零根情况, 其辛本征解与式(13)有所不同, 但可类似讨论。将式(13)代入式(11), 得  $A_{2k} =$

$-\mu A_{1k}, A_{3k} = \mu [(D_0 - D_{12})\lambda_k^2 - \mu^2 D_1 + K_1] A_{1k}$ ,  
 $A_{4k} = -(\mu^2 D_1 + \lambda_k^2 D_0) A_{1k} (k=1, 2, 3, 4)$ 。可知独立的待定系数只有四个。含裂纹纳米板的辛本征解(13)需满足侧边条件 ( $y = \pm b$ ), 如简支侧边条件为

$$\omega = 0, M_y = 0 \quad (14)$$

将辛本征解式(13)代入式(14), 且利用非零解条件, 可得

$$\sinh(2\lambda_1 b) \sinh(2\lambda_3 b) = 0 \quad (15)$$

因而有  $\lambda_1 = \frac{i n \pi}{2b}$  或  $\lambda_3 = \frac{i n \pi}{2b} (n=1, 2, \dots)$  (16)

式中  $\lambda_1$  和  $\lambda_3$  的关系可由方程(12)确定。由式(15)可知, 待定系数  $A_{1k} (k=1, 2, 3, 4)$  存在相互关系。事实上, 由式(12, 16)可建立频率  $\omega$  与辛本征值  $\mu$  的关系。

## 5 含裂纹纳米板的固有频率

以四边简支的纳米板为例。满足  $y = \pm b$  简支侧边条件的特征方程(12)可表示为

$$D_1 \mu^4 - [D_{12}(n\pi/2b)^2 + K_1] \mu^2 + D_2(n\pi/2b)^4 + K_2(n\pi/2b)^2 - \rho h \omega^2 = 0 \quad (n=1, 2, \dots) \quad (17)$$

式(17)给出辛本征值与固有频率的直接关系。记满足方程(17)的四个根为  $\pm \mu_1$  和  $\pm \mu_2$ 。此时辛本征解(13)可表示为

$$\Psi = a_1 \bar{\Psi}_1 e^{\mu_1 x} + a_2 \bar{\Psi}_2 e^{\mu_2 x} + a_3 \bar{\Psi}_3 e^{-\mu_1 x} + a_4 \bar{\Psi}_4 e^{-\mu_2 x} \quad (18)$$

该解也称之为固有频率对应的固有振型。将解(18)代入  $x = \pm a$  简支条件, 即  $\omega = 0$  和  $M_x = 0$ 。同理存在非零解的条件为

$$\sinh(2\mu_1 a) \sinh(2\mu_2 a) = 0 \quad (19)$$

得  $\mu_1 = i m \pi / 2a$  或  $\mu_2 = i m \pi / 2a$ 。对比式(17, 19)的根, 可得出固有频率表达式

$$\omega_{nm}^2 = \frac{\kappa_{nm}}{\rho h} [D_1(m\pi/2a)^4 + D_2(n\pi/2b)^4 + D_{12}(nm\pi^2/4ab)^2 + N_1(m\pi/2a)^2 + N_2\gamma(n\pi/2b)^2] \quad (n, m=1, 2, \dots) \quad (20)$$

式中  $\kappa_{nm} = 1/[1 + \xi^2(m\pi/2a)^2 + \xi^2(n\pi/2b)^2]$  和  $\gamma = 1 + \xi_{Nx}$ 。应该指出, 其他的边界条件也可得到对应的固有频率表达式。可以说, 含裂纹纳米板的固有频率不仅与材料常数、非局部参数和裂纹特征有关, 而且与边界条件和面内载荷有关。

## 6 辛本征解间的辛共轭正交关系

由式(12)或式(17)可知, 辛本征值成对出现, 记为  $\pm \mu_{nm} (n, m=1, 2, \dots)$ 。因此可以将辛本征值分

成两类<sup>[14]</sup>,  $\alpha$ 类 ( $\text{Re}(\mu_{nm}) > 0$  或  $\text{Re}(\mu_{nm}) = 0, \text{Im}(\mu_{nm}) > 0$ ) 和  $\beta$ 类 ( $\text{Re}(\mu_{nm}) < 0$  或  $\text{Re}(\mu_{nm}) = 0, \text{Im}(\mu_{nm}) < 0$ )。与之对应的辛本征解分别记为  $\alpha$ 类辛本征解  $\Psi_{nm}^{(\alpha)}(x, y) = \bar{\Psi}_{nm}^{(\alpha)}(y) e^{\mu_{nm} x}$  和  $\beta$ 类辛本征解  $\Psi_{nm}^{(\beta)}(x, y) = \bar{\Psi}_{nm}^{(\beta)}(y) e^{-\mu_{nm} x}$ 。如果  $\mu_{nm} = 0$ , 也可根据正交化规定  $\alpha$ 类和  $\beta$ 类的辛本征解。这些辛本征解是独立的且其之间是线性无关的。引入泛函

$$\langle \Psi_{nm}, \Psi_{kj} \rangle = \int_{-a}^a \int_{-b}^b [\mathbf{q}_{nm}^T \mathbf{p}_{kj} - \mathbf{q}_{kj}^T \mathbf{p}_{nm}] dy \quad (21)$$

经过对辛本征解的辛正交归一化并重新排序, 存在辛共轭正交关系, 即

$$\begin{cases} \langle \Psi_{nm}^{(\alpha)}, \Psi_{kj}^{(\beta)} \rangle = -\langle \Psi_{kj}^{(\beta)}, \Psi_{nm}^{(\alpha)} \rangle = \delta_{nk} \delta_{mj} \\ \langle \Psi_{nm}^{(\alpha)}, \Psi_{kj}^{(\alpha)} \rangle = \langle \Psi_{nm}^{(\beta)}, \Psi_{kj}^{(\beta)} \rangle = 0 \end{cases} \quad (22)$$

在以上辛本征解的讨论中, 仅考虑了齐次方程和齐次边界条件问题。对于一般问题, 可将非齐次边界条件转化为齐次边界条件问题, 对应的方程增加一非齐次项。这样, 辛本征解线性叠加解可作为齐次方程通解, 即

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [A_{nm} \Psi_{nm}^{(\alpha)}(x, y) + B_{nm} \Psi_{nm}^{(\beta)}(x, y)] \quad (23)$$

式中  $A_{nm}$  和  $B_{nm} (n, m=1, 2, \dots)$  为待定系数。该解加上一个特解, 并满足边界条件即可得到问题的解。

## 7 数值结果分析

为方便数值计算, 进行无量纲化, 固有频率  $\Omega = 4a^2 \omega \sqrt{\rho h / D}$ , 非局部参  $\bar{\xi} = \xi / (2a)$ , 面内力  $\bar{N}_k = N_k (2a)^2 / (D\pi^2) (k=1, 2)$  和裂纹长度  $\bar{a}_c = a_c / 2a$  等。仍考虑四边简支边界条件下的含裂纹纳米板问题, 讨论裂纹长度、材料常数、纳米板几何参数和非局部尺度参数等对含裂纹纳米板固有振动频率的影响。不妨先取纳米板的长度和宽度相等且为 10 nm, 裂纹深度和板厚度比值  $\zeta = 0.6$ <sup>[23]</sup>, 泊松比  $\nu = 0.3$  和面内力  $\bar{N}_1 = \bar{N}_2$ 。

为验证哈密顿体系与非局部弹性理论结合的辛方法在含裂纹纳米板振动问题中的有效性, 先不考虑尺度效应。由式(2, 4)可知, 当非局部参数  $\xi = 0$  时, 方程退化到经典薄板理论的振动问题。不妨取面力为零 ( $\bar{N}_1 = \bar{N}_2 = 0$ )。考察正方形和长方形板, 表 1 数据表明, 辛方法振动基频结果与文献[23]结果吻合, 其相对误差小于 0.03%。结果说明了辛方法在求解含裂纹板的振动问题上是靠和准确的。

表1 含裂纹板的第一阶固有频率对比  
Tab.1 Comparison of the first order natural frequencies for cracked plates

b/a	$\bar{a}_c$	无量纲频率 $\Omega$	
		本文解	文献[23]
1	0	19.739	19.74
	0.01	19.221	19.22
	0.025	18.674	18.67
0.5	0	49.348	49.35
	0.01	46.607	46.61
	0.025	43.615	43.61

针对含裂纹纳米板自由振动的固有频率问题,不妨取  $\bar{N}_1 = \bar{N}_2 = 0$ 。表2给出不同的裂纹长度和不同的非局部参数对应的振动基频。由表2可知,随着裂纹长度的增加,纳米板的振动基频会逐渐降低。这是因为裂纹的存在会使得纳米板的刚度降低。结果还表明,非局部参数的增加也使纳米板的刚度下降,因而固有频率降低。这种现象与现有文献的结论一致。表2同时说明,板的宽度相对减小时,固有频率变大。

表2 非局部参数和裂纹长度对振动基频影响  
Tab.2 Fundamental frequencies for nonlocal parameters and crack length

b/a	$\bar{a}_c$	无量纲频率 $\Omega$			
		$\bar{\xi}=0$	$\bar{\xi}=0.05$	$\bar{\xi}=0.1$	$\bar{\xi}=0.2$
1	0	19.739	19.270	18.039	14.756
	0.01	19.248	18.789	17.590	14.388
	0.025	18.724	18.278	17.111	13.996
	0.05	18.164	17.732	16.600	13.578
0.5	0	49.348	46.560	40.380	28.616
	0.01	46.707	44.068	38.219	27.084
	0.025	43.800	41.325	35.841	25.399
	0.05	40.562	38.270	33.191	23.521

为了显示上述结果的规律曲线,考虑在不同的非局部参数下,含裂纹纳米板的振动基频随着裂纹长度的变化规律。取  $a/b=1$ ,图2中实线曲线( $\bar{\xi}=0$ )为经典方形薄板理论结果。可以看出,频率曲线随裂纹长度单调递减且均低于经典薄板的对应曲线。结果也说明,在纳米级板的问题中尺度效应不能忽略。注意到, $\bar{a}_c=0$ 时为无裂纹板问题。图2中单调递减的曲线也说明,若纳米板出现裂纹,会降低其固有频率;且随裂纹长度增加,固有频率会下降。

表2仅给出特殊参数下的相关基频(第一阶固有频率)数据。下面讨论非局部参数和板的长宽比对各阶频率的影响。在考虑非局部参数影响时,取  $b/a=1, \bar{a}_c=0.01$  和  $\bar{N}_1 = \bar{N}_2 = 0$ ,图3给出前11阶固有频率的变化规律,其中实线曲线自下而上分

别对应固有频率  $\Omega_{11}, \Omega_{22}$  和  $\Omega_{33}$ , 2阶和3阶频率分别对应  $\Omega_{21}$  和  $\Omega_{12}$ , 且  $\Omega_{12} \neq \Omega_{21}$ 。本文固有频率  $\Omega_{nm}$  中的下标  $n$  和  $m$  分别表示纳米板振型沿  $y$  方向和  $x$  方向的阶数,当  $n=m=1$  时,频率最低,即为纳米板振动的基频。应该指出,对于不含裂纹正方形纳米板问题,由对称性知固有频率  $\Omega_{12} = \Omega_{21}$ 。事实上,纳米板中的裂纹破坏了对称性,因而出现固有频率增多的现象。对于高阶固有频率,这种现象更加突出且在数值上相差更大。为了考察一般的长宽比对含裂纹纳米板固有频率的影响规律以及固有频率  $\Omega_{nm}$  的排列顺序规律,选取  $\bar{\xi}=0.05, \bar{a}_c=0.01$  和  $\bar{N}_1 = \bar{N}_2 = 0$ 。图4中实线自下而上分别对应固有频率  $\Omega_{11}, \Omega_{22}, \Omega_{33}$  和  $\Omega_{44}$ 。结果表明,

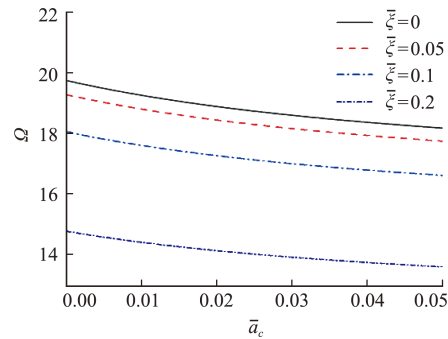


图2 裂纹长度和非局部参数对纳米板振动基频的影响  
Fig.2 Influence of crack length and nonlocal parameters on the fundamental frequency for problem of nanoplate vibration

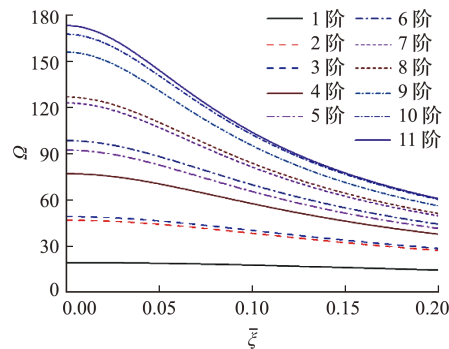


图3 非局部参数对各阶频率的影响  
Fig.3 Influence of nonlocal parameter on various order frequencies

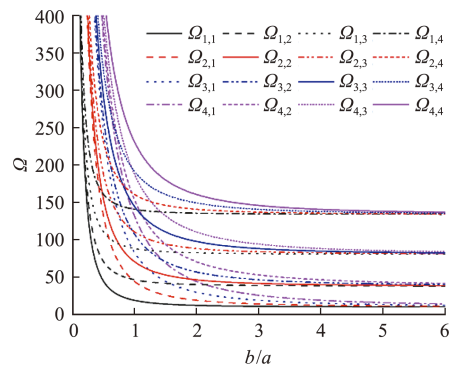


图4 纳米板长宽比对基频的影响  
Fig.4 Influence of ratio of length and width on fundamental frequency of nanoplates

其他的频率曲线均以其为极限值。如  $\Omega_{k1}$  ( $k=2, 3, 4, \dots$ ) 的极限为  $\Omega_{11}$ ;  $\Omega_{k2}$  ( $k=1, 3, 4, \dots$ ) 的极限为  $\Omega_{22}$  等。固有频率可以按此规律分类。本文还注意到,对于同一类频率,曲线存在上极限和下极限问题。以极限值  $\Omega_{33}$  为例,当  $k < 3$ ,  $\Omega_{33}$  为  $\Omega_{k3}$  的上极限;当  $k > 3$ ,  $\Omega_{33}$  为  $\Omega_{k3}$  的下极限。当  $b/a$  很大时,相当于宽度为  $2a$  的长矩形板问题。由于边界条件的限制,固有频率不会出现无限小的情况。当  $b/a$  很小时,结构为长度  $2a$  的窄板条问题。简支的边界条件使得结构刚度相对增加,导致出现固有频率增大的现象。

讨论面内力对含裂纹纳米板振动问题的影响。不妨仍考虑正方形纳米板 ( $b/a=1$ )。先设  $\bar{N}_1 = \bar{N}_2$ , 并记  $\bar{N} = \bar{N}_1$ 。取裂纹长度  $\bar{a}_c = 0.01$ , 图 5 给出非局部参数  $\bar{\xi} = 0, 0.05, 0.1, 0.2$  四种情况下面内力  $\bar{N}$  和基频的关系曲线。图中非局部参数的影响与图 3 一致。可以看出,面内荷载拉力 ( $\bar{N} > 0$ ) 情况明显比压力 ( $\bar{N} < 0$ ) 情况的振动基频高,且随着拉压程度的提高,固有频率幅值差距更突出。事实上,在边界上的面内拉力会增加结构的刚度,从而使得固有频率增高;而边界上的面内压缩力对应的基频低于无面内力 ( $\bar{N} = 0$ ) 的情况。因此,面内力对固有频率的影响不能忽视。应该指出,当面内力为压缩力时,需要稳定性校核。

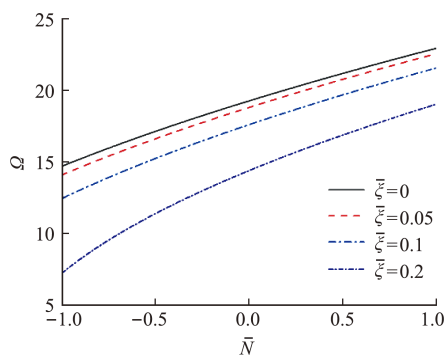


图 5 面内荷载对基频的影响  
Fig. 5 Influence of in-plane force on fundamental frequency

图 5 仅考虑了两个方向面内力相等,且只讨论了面内力同时作用对问题的影响。面内力  $\bar{N}_1$  和  $\bar{N}_2$  分别单独作用对基频的影响需要深入分析。不妨选取板的长宽比  $b/a=1$  和非局部参数  $\bar{\xi}=0.05$ 。图 6 ( $\bar{N}_2=0$ ) 和图 7 ( $\bar{N}_1=0$ ) 分别给出两个方向面内力  $\bar{N}_1$  和  $\bar{N}_2$  单独作用对基频的影响。可以看出,随面内力的增加,第一阶固有频率单调递增。当图 6 中  $\bar{N}_1=0$  和图 7 中  $\bar{N}_2=0$  时,问题退化为无面内力 ( $\bar{N}_1=0, \bar{N}_2=0$ ) 的情况。与图 5 相似,这两个图也显示出面内拉力能使固有频率增加,而

面内的压缩力可导致固有频率降低。从四条曲线对比可知,无论什么样的面内力,含裂纹的纳米板的基频皆比无裂纹板 ( $\bar{a}_c=0$ ) 的基频低。这个特点恰好说明纳米板出现裂纹后会降低固有频率。

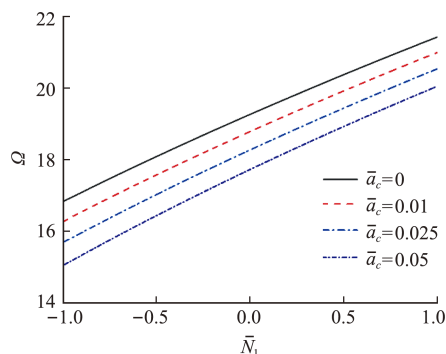


图 6  $x$  方向面内力与基频的关系  
Fig. 6 Relationship between fundamental frequency and internal force in  $x$ -direction

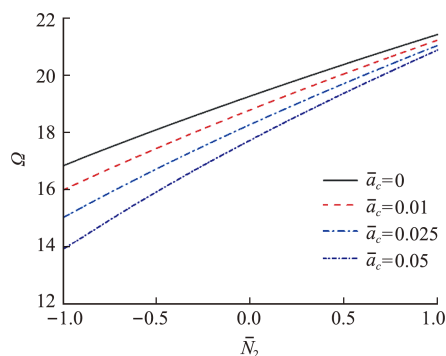


图 7  $y$  方向面内力与基频的关系  
Fig. 7 Relationship between fundamental frequency and internal force in  $y$ -direction

以长宽比  $b/a=1$  的含裂纹纳米板为例,进一步考察面内力  $\bar{N}_1$  和  $\bar{N}_2$  比例关系对固有频率的影响。由式(20)知固有频率可以表示为

$$\kappa_{nm}^{(0)} + \kappa_{nm}^{(1)} \bar{N}_1 + \kappa_{nm}^{(2)} \bar{N}_2 = \Omega_{nm}^2 \quad (n, m=1, 2, \dots) \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{nm}^{(0)} &= \kappa_{nm} \{ [(m\pi)^2 + (n\pi)^2]^2 - \\ &\quad (n\pi)^2 [\xi_{Mx}(n\pi)^2 + \nu \xi_{Mx}(m\pi)^2] \} \\ \kappa_{nm}^{(1)} &= \kappa_{nm} (m\pi)^2 \{ 1 + \bar{\xi}^2 [(m\pi)^2 + (n\pi)^2] \} \\ \kappa_{nm}^{(2)} &= \kappa_{nm} \gamma (n\pi)^2 \{ 1 + \bar{\xi}^2 [(m\pi)^2 + (n\pi)^2] \} \end{aligned}$$

由式(24)可知,固有频率与面内力  $\bar{N}_1$  和  $\bar{N}_2$  成线性关系。这说明在一定程度上可以通过调整面内力  $\bar{N}_1$  和  $\bar{N}_2$  比例关系,实现对固有频率的控制。

## 8 结 论

借助于非局部弹性理论建立含裂纹纳米板振动问题的哈密顿体系可将固有频率和振型问题归结为广义辛本征值和辛本征解问题。由辛共轭正交关系,问题的解可表示为辛本征解级数的形式。结果表明,含裂纹纳米板的固有频率随着裂纹长度

的增加而降低。随着非局部尺度参数增大,固有频率减小。作用在纳米板面内的拉力会使得纳米板的固有频率增加,而面内的压力则会降低纳米板的固有频率。因而,通过调整面内两个方向的拉力(压力)比例关系,可在一定范围内控制固有频率的数值。研究成果可为工程应用及相关设计提供依据。

## 参考文献(References):

- [1] 吴学仁,徐武. 裂纹体分析的权函数理论与应用:回顾和展望[J]. 力学进展,2022,52(3):415-507. (WU Xue-ren,XU Wu. Weight function theory and applications for crack analysis: A review and outlook[J]. *Advances in Mechanics*, 2022, 52(3): 415-507. (in Chinese))
- [2] 王春玲,赵鲁珂,王涵,等. 带裂纹矩形板自由振动解析解[J]. 计算力学学报,2019,36(6):757-762. (WANG Chun-ling,ZHAO Lu-ke,WANG Han, et al. Analytical study of free vibration for cracked rectangular plate[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2019, 36(6): 757-762. (in Chinese))
- [3] 韩国庆,张先锋,谈梦婷,等. 透明陶瓷材料冲击响应特性及损伤演化规律研究[J]. 力学进展,2023,53(3):497-560. (HAN Guo-qing,ZHANG Xian-feng,TAN Meng-ting, et al. Study on impact response characteristics and damage evolution law of transparent ceramic materials[J]. *Advances in Mechanics*, 2023, 53(3): 497-560. (in Chinese))
- [4] 孙秀婷,钱佳伟,齐志凤,等. 非线性隔振及时滞消振方法研究进展[J]. 力学进展,2023,53(2):308-356. (SUN Xiu-Ting,QIAN Jia-Wei,QI Zhi-Feng, et al. Review on research progress of nonlinear vibration isolation and time-delayed suppression method[J]. *Advances in Mechanics*, 2023, 53(2): 308-356 (in Chinese))
- [5] 乔吉超,张浪滢,童钰,等. 基于微观结构非均匀性的非晶合金力学行为[J]. 力学进展,2022,52(1):117-152. (QIAO Ji-chao,ZHANG Lang-ting,TONG Yu, et al. Mechanical properties of amorphous alloys: In the framework of the microstructure heterogeneity[J]. *Advances in Mechanics*, 2022, 52(1): 117-152. (in Chinese))
- [6] 吴伯朝,鲁才,刘泽. 微纳成型力学[J]. 力学进展,2022,52(1):153-179. (WU Bo-zhao,LU Cai,LIU Ze. Nanofabrication through forming: Techniques and mechanics[J]. *Advances in Mechanics*, 2022, 52(1): 153-179. (in Chinese))
- [7] Eringen A C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface-waves [J]. *Journal of Applied Physics*, 1983, 54(9):4703-4710.
- [8] Lu P, Zhang P Q, Lee H P, et al. Non-local elastic plate theories[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2007, 463(2088):3225-3240.
- [9] Gupta A, Jain N K, Salhotra R, et al. Effect of fibre orientation on non-linear vibration of partially cracked thin rectangular orthotropic micro plate: An analytical approach[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2016, 105:378-397.
- [10] Soni S, Jain N K, Joshi P V. Vibration and deflection analysis of thin cracked and submerged orthotropic plate under thermal environment using strain gradient theory[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 96(2): 1575-1604.
- [11] Rice J R, Levy N. The part-through surface crack in an elastic plate[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1972, 39(1):185-194.
- [12] 张恒,张雄,乔丕忠. 近场动力学在断裂力学领域的研究进展[J]. 力学进展,2022,52(4):852-873. (ZHANG Heng,ZHANG Xiong,QIAO Pi-zhong. Advances of peridynamics in fracture mechanics[J]. *Advances in Mechanics*, 2022, 52(4): 852-873. (in Chinese))
- [13] Lai S K, Zhang L H. Thermal effect on vibration and buckling analysis of thin isotropic/orthotropic rectangular plates with crack defects [J]. *Engineering Structures*, 2018, 177:444-458.
- [14] Zhong W X. *Duality System in Applied Mechanics and Optimal Control*[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [15] Xu X S, Zhong W X, Zhang H W. The Saint-Venant problem and principle in elasticity[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1997, 34(22): 2815-2827.
- [16] Xu X S, Ma Y, Lim C W, et al. Dynamic buckling of cylindrical shells subject to an axial impact in a symplectic system[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 43(13):3905-3919.
- [17] Jia J F, Xu X S, Li Y Q, et al. Free vibration characteristics of piezoelectric cylindrical shells with stepped thickness using an analytical symplectic approach[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2023, 117:726-740.
- [18] Zhou Z H, Fan J H, Lim C W, et al. A size-dependent coupled symplectic and finite element method for steady-state forced vibration of built-up nanobeam systems[J]. *International Journal of Structural Sta-*

- bility and Dynamics*, 2019, **19**(7):1950081.
- [19] 范俊海, 贾菊芳, 赖安迪, 等. 双层石墨烯系统稳态受迫振动问题中的辛方法[J]. 计算力学学报, 2020, **37**(2):193-198. (FAN Jun-hai, JIA Ju-fang, LAI An-di, et al. Symplectic method for the forced vibration of bilayers graphene system in steady-state[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2020, **37**(2):193-198. (in Chinese))
- [20] Yao W A, Su B, Zhong W X. Hamiltonian system for orthotropic plate bending based on analogy theory [J]. *Science in China (Series E): Technological Sciences*, 2001, **44**(3):258-264.
- [21] 杨雨诗, 安东琦, 倪超凡, 等. 四角点支承四边自由矩形薄板屈曲问题的新解析解[J]. 计算力学学报, 2020, **37**(5):517-523. (YANG Yu-shi, AN Dong-qi, NI Zhuo-fan, et al. A new analytic solution to the buckling problem of rectangular thin plates with four corners point-supported and four edges free[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2020, **37**(5):517-523. (in Chinese))
- [22] Joshi P V, Jain N K, Ramtekkar G D. Effect of thermal environment on free vibration of cracked rectangular plate: An analytical approach[J]. *Thin-Walled Structures*, 2015, **91**:38-49.
- [23] Ismail R, Cartmell M P. An investigation into the vibration analysis of a plate with a surface crack of variable angular orientation[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2012, **331**(12):2929-2948.

## The method of Hamiltonian system for vibration problem of cracked nanoplates

QU Jian-long, ZHOU Zhen-huan, XU Xin-sheng\*

(State Key Laboratory of Structural Analysis, Optimization and CAE Software for Industrial Equipment,  
Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

**Abstract:** Based on theory of nonlocal elasticity and the van der Waals force effect at the crack location, Hamiltonian system is introduced into the vibration problem of cracked nanoplates and the Hamiltonian dual equations are represented. In the Hamiltonian system, which is represented by the full state vector, the natural frequencies and modes of the cracked nanoplates are reduced to the problem of the symplectic eigenvalues and symplectic eigensolutions. The expression of analytical solutions for the problem can be obtained by the series of symplectic eigenfunctions using the adjoint symplectic relationships of orthogonality in the Hamiltonian system. Considering the boundary conditions, the relationship between the natural frequencies and the symplectic eigenvalues are obtained, and then the frequency equations can be given directly. The numerical results indicate that the nonlocal parameter and the crack length have a direct effect on all the natural frequencies of the nanoplates. It is shown that the symplectic method has high accuracy and reliability by comparison of the results. Meanwhile, the method provides a basis for engineering applications.

**Key words:** Hamiltonian system; cracked nanoplate; nonlocal theory; vibration; natural frequency

引用本文/Cite this paper:

屈建龙, 周震寰, 徐新生. 含裂纹纳米板振动问题的哈密顿体系方法[J]. 计算力学学报, 2024, **41**(1):66-72.

QU Jian-long, ZHOU Zhen-huan, XU Xin-sheng. The method of Hamiltonian system for vibration problem of cracked nanoplates [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2024, **41**(1):66-72.