第41卷第1期
2024 年 2 月

计 算 力 学 学 报
Chinese Journal of Computational Mechanics

Vol. 41, No. 1
February 2024

DOI:10.7511/jslx20230902002

参变量变分原理的提出、发展与应用

吴承伟*

(大连理工大学 工程力学系 工业装备结构分析优化与CAE软件全国重点实验室,大连 116024)

摘 要:参变量变分原理及其参数二次规划算法是由钟万勰院士 1985 年针对弹性接触边界非线性问题首次提出来的,经过将近 40 年的不断发展,目前参变量变分原理已经成功应用于各个领域,其中包括弹塑性分析、接触问题、润滑力学、岩土力学、变刚度杆系结构、先进材料性能分析、材料的蠕变与损伤、柔性结构力学和 LQ 最优控制等各个工程领域。本文首先回顾了参变量变分原理的起源,介绍了参变量变分原理的基本概念,然后以弹塑性分析问题为例,阐明建立参变量变分原理的理论模型以及实现数值参数二次规划求解原理,最后详细回顾了参变量变分原理的基本理论与相应数值算法在各个领域的发展及其工程应用,展示了参变量变分原理在求解各类非线性问题的特色与优势。

关键词:参变量变分原理;二次规划;非线性问题;弹塑性接触;变刚度结构

中图分类号:O302 **文献标志码**:A **文章编号**:1007-4708(2024)01-0026-14

1 引 言

参变量变分原理的基本概念是钟万勰院士[1,2]于 1985 年首次提出,并由钟万勰先生指导的博士生张柔雷[3]和孙苏明[4]较为系统地建立了参变量变分原理的理论框架和提出了相应的数值算法。最初参变量变分原理主要用于解决弹塑性等非线性问题。之后经过钟万勰先生的众多弟子以及计算力学同行的不断发展,参变量变分原理已经拓展应用到岩土力学、柔性结构、润滑力学、材料损伤与破坏和振动结构分析等各个领域。1993 年国际著名计算力学家英国普次茅斯大学 Brebbia 教授组织编写了国际计算工程系列丛书《接触力学计算方法》(Computational Methods in Contact Mechanics),钟万勰先生受特别邀请与吴承伟撰写了第 9 章(弹塑性接触的参数二次规划算法)[5],详细介绍了参变量变分原理在弹塑性干接触和润滑接触问题中的应用。1997 年受科学出版社邀请,钟万勰先生与张洪武和吴承伟共同完成了参变量变分原理及其在工程中的应用一书[6],在此书中参变量变分原理得到较为系统的介绍,形成了一个较为完整的理论体系。

参变量变分原理是一种求解数学物理问题中边界待定等非线性问题的一种全新方法。其突破了经典变分原理的局限性,引入了现代控制论的极值变分思想,将原问题转化为求解由本构关系建立的状态方程控制下的泛函极小值问题。其与经典变分原理的主要区别在于,在参变量变分原理中,首先本构关系不再像经典变分原理那样隐含于能量泛函中,而是用状态方程控制整个变分过程;其次参变量变分原理中的宗量分为两大类,一类是参加变分的状态变量,其与经典变分原理的宗量完全一样;另一类是控制变量(亦即参变量),其不参加变分,但是却通过状态方程控制着整个变分过程,从而使得问题的非线性本构关系得到自动满足。

参变量变分原理具有自己的明显特色与优势。(1) 其比经典变分原理应用范围更为广泛。如在塑性流动分析中其不受 Drucker 假设的限制,能够很方便解决带内摩擦材料的非关联流动、弹塑性耦合材料的不可逆流动、摩擦接触体间的非法向滑动等工程问题。(2) 参变量变分原理使得非线性问题的求解更为简化,数值求解不需要传统的反复冗长的迭代过程。如果把线性方程组求解看成是一次分解过程,那么参变量变分原理最多需要二次分解过程,而且数值求解精度高。(3) 参变量变分原理的泛函表达式比经典变分原理仅多了一个变分宗量线性项,因为控制变量不参加变分,在泛函中可以作为常数来处理,使得数值算法可以在常用的线性分析程序上实现。

本文作者于 1989—1990 年在大连理工大学工

收稿日期:2023-09-02;**修改稿收到日期**:2023-09-28.
基金项目:国家自然科学基金(12172083;U1908233);国家重点研发计划(2022YFB4003501)资助.
作者简介:吴承伟(1957-),男,博士,教授(E-mail:cwwu@dlut.edu.cn).

程力学研究所做博士后期间，在钱令希先生的鼓励下，有幸得到了钟万勰先生的指导，将参变量变分原理及其参数二次规划算法用于解决润滑接触力学中的固液界面滑移等问题，这是采用其他方法很难求解的非线性问题，使得作者终生受益。在钟万勰先生90诞辰之际，倍感当年钟先生悉心指导的价值珍贵。本文对参变量变分原理的基本概念、理论框架及其工程应用做一个简要回顾与综述。

2　参变量变分原理的建立

2.1　拉压不等刚度的非线性杆系结构

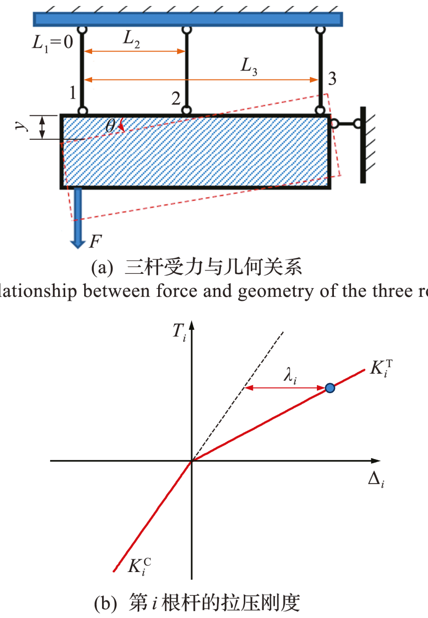
为了更加清晰地描述参变量变分原理，本文首先分析如图1所示的非线性三杆拉压杆系结构（图1(a)）。三杆的拉压刚度不等（图1(b)），每根杆的拉伸刚度系数为 K_i^{T}，压缩刚度为 K_i^{C}，拉力为 T_i。假设杆系在力 F 作用下，杆1伸长 y，第 i 根杆的伸长量为 $\Delta_i(\Delta_1=y)$，那么该非线性杆系的平衡方程和连续条件与本构关系如下。

$$\sum_{i=1}^{3} T_i - F = 0 \quad (i=1,2,3) \tag{1}$$

$$\Delta_i = y - \theta L_i \tag{2}$$

$$\Delta_i = \begin{cases} T_i/K_i^{\mathrm{T}} & (\text{当}\ T_i > 0) \\ T_i/K_i^{\mathrm{C}} & (\text{当}\ T_i \leqslant 0) \end{cases} \tag{3}$$

对于这样的非线性结构，本文很难进行一步求解，常规的求解方法就是对方程组反复循环迭代。但是迭代求解技术有时无效，常出现反复跳跃，迭代不收敛（尤其是结构复杂时，如杆的数量增多，拉压刚度变化多样）。然而，利用参变量变分原理解决这一类问题就简单多了[6]。



(a) 三杆受力与几何关系
(a) Relationship between force and geometry of the three rods

(b) 第 i 根杆的拉压刚度
(b) Tensile and compressive stiffness of the i^{th} bar

图1　拉压不等刚度的非线性杆系结构
Fig. 1　Nonlinear bar system structure with unequal stiffness of tension and compression

假设图1所示的三杆结构全部受压（也可以假设全部受拉），那么对于受压杆很容易得到本构关系 $\Delta_i = T_i/K_i^{\mathrm{C}}$；对于受拉杆本文引入了一个控制变量（附加伸长量）$\lambda_i(\lambda_i \geqslant 0)$，那么受拉杆的本构关系也可以用压缩刚度表示 $\Delta_i = T_i/K_i^{\mathrm{C}} + \lambda_i$，从图1(b)可以得到

$$\lambda_i = T_i/K_i^{\mathrm{T}} - T_i/K_i^{\mathrm{C}} \tag{4}$$

这样无论对于受拉和受压杆，本构关系可以统一表达式为

$$T_i = K_i^{\mathrm{C}}(y - \theta L_i - \lambda_i) \tag{5}$$

若令函数 f_i 满足式(6)

$$f_i/K_i^{\mathrm{T}} = T_i/K_i^{\mathrm{T}} - T_i/K_i^{\mathrm{C}} - \lambda_i \tag{6}$$

则有，当 $\lambda_i \geqslant 0, f_i = 0$，该根杆处于受拉状态；当 $\lambda_i = 0, f_i \leqslant 0$，该根杆处于受压状态。将式(5)代入式(6)整理得

$$f_i(y,\theta,\lambda_i) = (y - \theta L_i)(K_i^{\mathrm{C}} - K_i^{\mathrm{T}}) - K_i^{\mathrm{C}}\lambda_i \tag{7}$$

引入松弛变量 ν_i，可以得到非线性杆系的本构关系方程（又称为状态方程）[5]

$$f_i(y,\theta,\lambda_i) + \nu_i = 0 \tag{8a}$$

$$\lambda_i \nu_i = 0 \quad (\lambda_i \geqslant 0, \nu_i \geqslant 0) \tag{8b}$$

式中 λ_i 和 ν_i 为非负的互补变量，两者至少有一个为零或者同时为零。当 $\lambda_i=0, \nu_i \geqslant 0$ 时，$f_i \leqslant 0$，第 i 根杆受压；当 $\lambda_i \geqslant 0, \nu_i = 0$ 时，$f_i = 0$，第 i 根杆受拉。

现在可以建立以 y 和 θ 为状态变量的系统总势能

$$\prod = \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{1}{2}K_i^{\mathrm{C}}(y-\theta L_i)^2 - \lambda_i K_i^{\mathrm{C}}(y-\theta L_i) + \frac{1}{2}K_i^{\mathrm{C}}\lambda_i^2\right] - Fy \tag{9}$$

参变量变分原理的策略是只对状态变量 y 和 θ 变分，给出平衡方程，但是控制变量 λ_i 不参加变分，得到的平衡方程中含有参变量 λ_i，λ_i 等待状态方程(8)确定。既然 λ_i 不参加变分，式(9)的 $\frac{1}{2}K_i^{\mathrm{C}}\lambda_i^2$ 可以去掉，系统总势能的表达式可以简化为

$$\prod[\lambda_i(\cdot)] = \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{1}{2}K_i^{\mathrm{C}}(y-\theta L_i)^2 - \lambda_i K_i^{\mathrm{C}}(y-\theta L_i)\right] - Fy \tag{10}$$

式中 $\prod[\lambda_i(\cdot)]$ 表示参变量 λ_i 不参加变分，其是一个正定的二次函数。式(10)对 y 和 θ 进行变分得

$$\sum_{i=1}^{3}\left[K_i^{\mathrm{C}}(y-\theta L_i) - \lambda_i K_i^{\mathrm{C}}\right] - F = 0 \tag{11a}$$

$$\sum_{i=1}^{3} L_i\left[K_i^{\mathrm{C}}(y-\theta L_i) - \lambda_i K_i^{\mathrm{C}}\right] = 0 \tag{11b}$$

结合式(5)得到系统的平衡方程为

$$\sum_{i=1}^{3} T_i - F = 0,\ \sum_{i=1}^{3} T_i L_i = 0 \tag{12}$$

证明了参变量最小势能原理。于是满足平衡方程、连续条件和本构关系的具有不同拉压刚度的三杆桁架结构问题,可以描述为下列参数二次规划问题

$$\min.\prod[\lambda_i(\cdot)] \tag{13a}$$

$$\text{s.t.}\ f_i(y,\theta,\lambda_i) + \nu_i = 0 \tag{13b}$$

$$\lambda_i \nu_i = 0 \tag{13c}$$

$$\lambda_i \geqslant 0,\ \nu_i \geqslant 0 \qquad (i=1,2,3) \tag{13d}$$

在二次规划问题中,只有状态变量 y 和 θ 参加变分。控制变量 λ_i 不参加变分但是满足代表本构关系的约束,控制着变分过程。实际上是最优控制论中的现代变分思想。至此,本文把参变量变分原理的基本思想通过一个非线性杆系结构清晰地表达出来。以上仅举例一个简单的变刚度结构,实际上这个方法可以推广到多级任意变刚度结构[6]。在方程(13)描述的参数二次规划中,状态变量、控制变量 λ_i 与松弛变量 ν_i 会同时解出,其在求解层次上处于同一级别,这是经典变分原理无法做到的。

2.2 弹塑性分析的参变量变分原理

2.1 节以非线性杆系结构为例介绍了参变量变分原理的基本概念,本节将以弹塑性非线性问题为例,展示参变量变分原理求解非线性问题的思路与优势。

弹塑性问题的参变量变分原理在 20 世纪 80 年代,钟万勰先生带领弟子们做了较为系统的研究,发表了一系列原创性论文[1-12],奠定了弹塑性问题参变量变分原理的理论基础。假设在平衡的结构域 Ω 上,弹塑性问题的应力增量为 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$、体力增量为 $\mathrm{d}\boldsymbol{b}$、应变增量为 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$、位移增量为 $\mathrm{d}\boldsymbol{u}$,其应满足下列关系式[6]

$$\boldsymbol{E}(\nabla)\mathrm{d}\sigma + \mathrm{d}\boldsymbol{b} = 0 \tag{14}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} = E^{\mathrm{T}}(\nabla)\mathrm{d}\boldsymbol{u} = 0 \tag{15}$$

在平衡体系边界 S_p上给定面力增量 $\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{p}}$, 在边界 Su 上给定位移增量 $\mathrm{d}\bar{u}$, 满足边界条件

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{n})\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{p}} \qquad (\text{在 } Sp \text{ 上}) \tag{16}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{u} = \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{u}} \qquad (\text{在 } Su \text{ 上}) \tag{17}$$

同时系统还要满足弹塑性本构关系

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}(\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p) \tag{18}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}^p,\boldsymbol{\kappa}) \leqslant 0 \tag{19}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p = (\partial g/\partial\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\lambda} \tag{20}$$

式中 $\boldsymbol{\kappa}$ 为硬化参数向量, $\boldsymbol{\lambda}$ 为在该增量步的比例流动因子向量(控制向量), $\boldsymbol{f}$ 为屈服函数向量。当 $\lambda_i = 0$ 时, $f_i < 0$; 当 $\lambda_i \geqslant 0$ 时, $f_i = 0$。引入松弛变量向量 $\boldsymbol{\nu}$, 弹塑性问题的本构控制方程(状态方程)可以描述为

$$\boldsymbol{f}(\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\lambda}) + \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{或} \tag{21a}$$

$$\boldsymbol{f}(\mathrm{d}\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda}) + \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{或} \tag{21b}$$

$$\boldsymbol{f}(\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\lambda}) + \boldsymbol{\nu} = 0 \tag{21c}$$

$$\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\lambda} = 0,\ \boldsymbol{\nu} \geqslant 0,\ \boldsymbol{\lambda} \geqslant 0 \tag{21d}$$

根据上述定义,参数最小势能原理可以描述为,在满足应变-位移关系(15)和几何边界条件(17)的所有可能解中,真实解使得下面的总势能最小

$$\prod_{\varepsilon} = \int_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}\right)\mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega}\mathrm{d}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{u}\mathrm{d}\Omega - \int_{S_p}\mathrm{d}\bar{p}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{u}\mathrm{d}s \tag{22}$$

式中 $\boldsymbol{R} = (\partial g/\partial\boldsymbol{\sigma})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}$ 为与当前状态无关的常量矩阵, $\boldsymbol{D}$ 为弹性矩阵。因而弹塑性参变量最小势能原理可以表示为

$$\min.\prod_{\varepsilon}[\boldsymbol{\lambda}(\cdot)] \tag{23a}$$

$$\text{s.t.}\ f(\mathrm{d}\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda}) + \boldsymbol{\nu} = 0 \tag{23b}$$

$$\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\lambda} = 0,\ \boldsymbol{\nu} \geqslant 0,\ \boldsymbol{\lambda} \geqslant 0 \tag{23c}$$

同理,系统的最小余能可以表示为

$$\prod_{\sigma} = \int_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{-1}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\right)\mathrm{d}\Omega - \int_{S_u}\mathrm{d}\bar{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{n})\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}s \tag{24}$$

式中 $\boldsymbol{Q} = (\partial\boldsymbol{g}/\partial\boldsymbol{\sigma})^{\mathrm{T}}$ 为常数矩阵。弹塑性参变量最小余能原理可以描述为

$$\min.\prod_{\sigma}[\boldsymbol{\lambda}(\cdot)] \tag{25a}$$

$$\text{s.t.}\ f(\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\lambda}) + \boldsymbol{\nu} = 0 \tag{25b}$$

$$\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\lambda} = 0,\ \boldsymbol{\nu} \geqslant 0,\ \boldsymbol{\lambda} \geqslant 0 \tag{25c}$$

以上为参变量变分原理的最小势能原理与最小余能原理。

3 参变量变分原理的发展与应用

3.1 参数二次规划算法

式(23,25)描述的参变量变分问题采用有限元离散化后可以实现数值求解。迄今为止,参数二次规划算法是最为成功的算法,可以说参数二次规划算法与参变量变分原理是一对孪生兄弟。钟万勰先生在参变量变分原理经典论文中[1]已经提出了参数二次规划数值求解技术,在 20 世纪 80 年代对于参数二次规划算法做了大量研究[12-15],其基本思想是基于 Lemke 算法[16]。1988—1989 年,钟万勰等[14]发表了连载论文,详细介绍了参数二次规划算法的理论与方法。对于弹塑性问题,如果二次规划出现射线解,其力学意义就是结构发生了塑性破

坏，二次规划的加载历史正好反映了结构的塑性变形状态。基于最小势能原理的弹塑性数值分析，由于刚度阵的正定性，参数二次规划算法本身便具备了保证在有限步以内使得增量解收敛和每个增量解必为最优解的两大特点。采用二次规划法求解时，每进行一次换基对应于一个单元进入塑性状态。若有 n 个单元进入加载状态，则仅需要进行 $n+1$ 次换基运算，最后一次换基是把人工变量赶出基底。换一次基相当于进行一次 Gauss-Jordan 消元运算，因而，参数二次规划算法具有很高的数值求解效率。用经典变分原理离散后的解方程方法是迭代求解，收敛性是最为棘手的问题。采用参变量变分原理，以 λ 为控制参数，在求解时与位移增量处于同一级别，当泛函达到最小时控制参数和位移增量同时给出，这是基于参变量变分原理的参数二次规划算法计算效率高的主要原因。

3.2　弹塑性变形问题

结构的弹塑性变形问题属于最常见的力学三大非线性问题之一，数值求解的效率与精度一直备受计算力学工作者的高度关注。参变量变分原理最初就是针对弹塑性与接触问题提出来的，钟万勰等[7,17]在 20 世纪 80 年代，发表了一系列基于参变量变分原理的弹塑性分析的研究论文，从各个角度描述了参变量变分原理及其参数二次规划数值解法在弹塑性分析中的成功应用。文献[6]给出了许多参变量变分原理求解弹塑性问题的经典例子，本文仅给出两个经典数值算例，揭示参变量变分原理的数值求解优势。第一个算例为无限长厚壁圆筒，内半径为 $R_1=50$ mn，外半径为 $R_2=150$ mm，受到内压 p 的作用产生了弹塑性变形，材料为屈服极限 $\sigma_s=2400$ MPa 的理想弹塑性材料，弹性模量 $E=200$ GPa，泊松比 $\nu=0.25$，假设材料服从 Tresca 屈服准则 $f=\sigma_\theta-\sigma_r-\sigma_s\leqslant 0$。这是一个轴对称问题，塑性理论专著中有理论解析解。采用参变量变分原理及其二次规划数值求解技术，仅在径向划分 10 个 4 节点单元，即可获得非常满意的结果。表 1 给出了理论解析解与参变量变分及其二次规划数值解的比较，显示该方法具有很高的计算效率与精度。

第二个算例是利用参变量变分原理考察关联与非关联流动差异性。如图 2 所示，截面为 6 m×6 m 的矩形无限长理想弹塑性材料，服从 Ducker-Prager 屈服准则，上下受到两个宽度为 1 m 的刚性压块作用，最大压力为7.52 kN，按照平面应变

表 1　无限长厚壁圆筒的弹塑性应力状态[6]

Tab. 1 Elastoplastic stress state of an infinitely long thick-walledcylinder[6]

P /MPa	u_r/mm		弹塑边界半径/mm		塑性单元	换基次数
	解析	文献[13]	解析	文献[13]		
200.0	0.074	0.074			弹性	
1445.6	0.58	0.581	60	60	1	2
1746.7	0.81	0.81	70	70	1-2	3
1986.7	1.01	1.01	80	80	1-3	4
2330.2	1.58	1.58	100	100	1-5	6

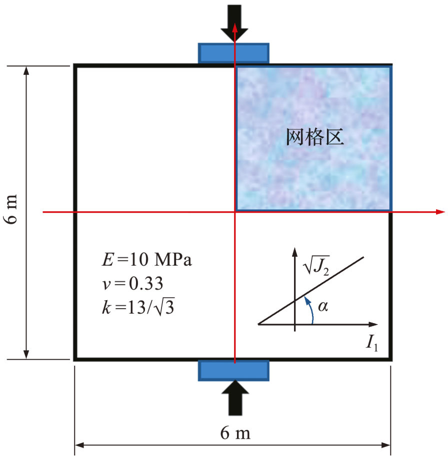


图 2　刚性压头作用下材料的塑性变形

Fig. 2　Plastic deformation of the material under the action of a rigid indenter

问题处理[6]。由于问题的对称性，仅截取右上角 1/4 界面划分有限元网格，研究 Ducker-Prager 准则中的材料常数 α 和膨胀因子 Ψ 对于塑性流动的影响。当 $\alpha=0$ 时首先在靠近压块边缘处发生屈服，当 $\alpha=0.174$ 时在压块边缘与中心之间也发生屈服。非关联流动法则下的塑性区扩展速度比相关联流动法则下扩展速度快。当 $\alpha=0$ 时，Drucker-Prager 准则简化为 Mises 准则，参变量变分原理的计算精度与 Chen[18] 的三角形单元计算精度一致，但是参变量变分原理及其二次规划求解仅采用了 68 个四节点单元和 10 个增量步；而 Chen 采用了 274 个三角形单元和 120 个增量步，进一步显示了参变量变分原理数值求解效率的优势。

参变量变分原理及其参数二次规划算法在结构弹塑性分析方面具有自己的鲜明特色与优势。在众多学者的不断努力下，目前已经可以解决理想弹塑性[17]、塑性硬化和塑性软化等材料本构非线性问题。周太全等[19]将参变量变分原理推广到研究弹塑性损伤等问题，构造了弹塑性损伤的势能泛函，建立了弹塑性损伤分析的参变量变分原理，分析了超静定杆系的弹塑性损伤问题。张洪武等[20]

针对动力应变软化与局部化中的网格依赖性问题，在本构模型上采用了建立于非局部理论基础上的梯度塑性模型，有效克服软化材料在有限元分析中的网格依赖性问题。其基于参变量变分原理，推导了用于求解动力软化问题的参数二次规划有限元方法列式，并构造了具体的求解算法。给出的动力软化问题的一维和二维算例，表明参变量变分原理可以有效处理动力应变软化问题。刘涛等[21]基于参变量变分原理，研究了材料弹塑性数值模拟的多尺度分析问题，用渐近分析方法建立了宏-细观变量之间的关系。针对 Von-Mises 准则和 Tsai-Hill 准则，提出了一个基于参变量变分原理的改进算法，可以显著消除传统方法采用线性展开式构造线性互补条件带来的误差。罗晓辉等[22]根据大变形弹塑性理论 Lagrangian 描述的方法，利用参变量变分原理的思想提出了弹塑性大变形 Biot 固结理论的数值模拟计算方法。研究发现大变形条件下的孔隙水压力比小变形时明显增加，对于坑外地面沉陷，塑性膨胀因子的变化影响较为显著。显示了参变量变分原理在岩土材料大变形固结分析计算中的数值求解优势。

参变量变分原理的研究一直得到钱令希院士的鼎力支持，1992 年钱先生还提出了刚性有限元的参变量变分原理及其参数二次规划求解技术[23]。发现刚性有限元参变量变分原理可以大大地提高弹塑性分析的效率。同时参变量变分原理对增量步长不敏感，因此计算时可以取较大的步长以减少计算时间。刚性有限元能方便地模拟层状材料及岩石材料的变形方式和屈服条件，因此，其可用于求解岩体稳定性问题。如果将形状优化技术引入刚性有限元，可以找出边坡等结构的破坏方式，有利于深入研究其破坏机理。

3.3 弹塑性接触问题

接触问题大量存在于机械工程、土木工程等各个领域以及生活的环境中。旋转机械工程中力的传递主要依靠接触表面实现力传递，如齿轮、凸轮和轴承等。接触问题又分为干摩擦接触和润滑接触问题，后者耦合了流体力学问题使得求解技术更为复杂。接触问题属于边界待定的非线性力学问题，最常用的数值求解手段就是反复迭代。同其他非线性问题一样，迭代的收敛速度与精度一直是计算力学关心的热点。文献[24]详细介绍了关于接触力学的各种理论与计算方法，其中第 9 章详细介绍了参变量变分原理及其二次规划算法。本文仅介绍用参变量变分原理及其参数二次规划算法处理各种接触问题的特点与优势。

弹性接触问题的参变量变分原理是钟万勰先生在 1985 年首先提出[1]，属于参变量变分原理的奠基性论文。类似于弹塑性问题，接触位移增量 $\boldsymbol{\delta}_c=(u_\tau,u_n)^{\mathrm{T}}$（$u_\tau$ 为接触表面切向相对位移，u_n 为表面法向相对位移）可以分解为弹性接触位移增量和塑性接触位移增量，$\boldsymbol{\delta}_c=\boldsymbol{\delta}_c^e+\boldsymbol{\delta}_c^P$。两个相互接触的弹性形体的法向接触应力 p_n 与切向接触应力 p_n 应满足库伦摩擦定律，并且接触应力不能为拉应力（界面摩擦系数为 μ）

$$\tilde{f}_1=p_\tau+\mu p_n\leqslant 0 \tag{26a}$$

$$\tilde{f}_2=-p_\tau+\mu p_n\leqslant 0 \tag{26b}$$

$$\tilde{f}_3=p_n\leqslant 0 \tag{26c}$$

函数 $\tilde{f}_1$ 和 $\tilde{f}_2$ 称为正向和负向接触界面切向滑移函数，$\tilde{f}_3$ 为接触分离函数，相当于弹塑性问题中的屈服函数。与弹塑性问题非常类似，对应接触屈服函数(26a,26b,26c)，可以定义接触界面滑动势函数

$$\tilde{g}_1=p_\tau,\ \tilde{g}_2=-p_\tau,\ \tilde{g}_3=p_n \tag{27}$$

那么接触滑动相对位移 $\boldsymbol{\delta}_c^p$ 可以表示为

$$\boldsymbol{\delta}_c^p=(\partial\tilde{\boldsymbol{g}}/\partial p_c)^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \tag{28}$$

式中 $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}=(\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2,\lambda_3)^{\mathrm{T}}$ 为界面滑移位移增量向量，p_c 代表 p_τ 或 p_n。接触应力增量向量为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p}_c=\tilde{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{\delta}_c^e+\boldsymbol{\delta}_c^*)=\tilde{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{\delta}_c+\boldsymbol{\delta}_c^*-\boldsymbol{\delta}_c^P) \tag{29}$$

式中 $\boldsymbol{\delta}_c^*=(0,\boldsymbol{\delta}^*)^{\mathrm{T}}$ 为接触间隙向量，$\tilde{\boldsymbol{D}}$ 为接触单元弹性矩阵，用法向和切向惩罚因子（$E_n\to\infty$，$E_\tau\to\infty$,）表示为

$$\tilde{\boldsymbol{D}}=\begin{bmatrix}E_n & 0\\ 0 & E_t\end{bmatrix} \tag{30}$$

将式(28～30)代入式(26)并引入松弛变量，可以得到接触问题状态控制方程，即

$$\tilde{\boldsymbol{f}}(u_c,\tilde{\boldsymbol{\lambda}})+\tilde{\boldsymbol{v}}=0 \tag{31a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{T}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\lambda}}=0,\ \tilde{\boldsymbol{v}}\geqslant 0,\tilde{\boldsymbol{\lambda}}\geqslant 0 \tag{31b}$$

式中 $\tilde{\boldsymbol{f}}=(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2,f_3)^{\mathrm{T}}$，$\tilde{\boldsymbol{v}}=(\tilde{\nu}_1,\tilde{\nu}_2,\tilde{\nu}_3)^{\mathrm{T}}$

$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}=(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_1,\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_2,\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{u}_c=(\mathrm{d}u_\tau,\mathrm{d}u_n)^{\mathrm{T}}$

类似于弹塑性变形问题，可写出弹塑性接触问题的总势能，即

$$\prod_{\varepsilon}=\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}\right)\mathrm{d}\Omega-\int_\Omega\mathrm{d}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\Omega-\int_{S_p}\mathrm{d}\bar{p}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}s\ \int_{S_c}\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\delta}_c+\boldsymbol{\delta}_c^*)^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{\delta}_c+\boldsymbol{\delta}_c^*)-\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{\delta}_c\right]\mathrm{d}s \tag{32}$$

假设系统经过有限元离散后，有 n_1 个常规单元、n_2 个接触单元，总单元数 $n=n_1+n_2$。现在可

以把弹塑性接触问题的参变量变分原理统一描述为

$$\min.\prod_{\epsilon}[\boldsymbol{\lambda}(\cdot)]=\frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{t}) \tag{33a}$$

$$\mathrm{s.t.}\,\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{\delta}^{*})-\boldsymbol{M}\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{d}+\boldsymbol{v}=0 \tag{33b}$$

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\lambda}=0,\ \boldsymbol{v}\geqslant 0,\ \boldsymbol{\lambda}\geqslant 0 \tag{33c}$$

式中的向量与矩阵内容不同于式(23)，其包含了常规单元与接触单元的组合信息，各个矩阵与向量的物理意义参见文献[6]。对于某个非线性力学问题，建立参变量变分原理的关键是如何建立该问题的状态控制方程，良好的状态控制方程不但物理意义清晰，而且能够使得数值求解效率与可靠性大幅度提高。

以上介绍了二维弹塑性接触问题的参变量变分原理，对于空间接触问题接触切向应力 p_τ 有两个相互垂直的切向分量 $p_{\tau1}$ 和 $p_{\tau2}$。可以定义一个切向应力模函数，设在切向应力分量原点处模为零，在任意一条自原点出发的射线上，模应当单调增加，与距离原点的距离成正比。由 $\mathrm{mod}(p_{\tau1},p_{\tau1})=\mu p_n$ 确定的周边应该是凸的，容许切向应力的取值范围与接触法向压力有关，可表示为 $\mathrm{mod}(p_{\tau1},p_{\tau1})\leqslant\mu p_n$。在可取域内部滑动不可能发生，滑动只可能发生在边界上，其滑动方向是垂直于周边的内法线方向。为了提高计算效率，可行域可以用一个无限大的无底 N 边形棱锥体代替古典 Coulomb 定律的圆锥体[5]，这样空间三维接触问题的状态控制方程就可以实现逐次线性化。

接触问题的参变量变分原理的提出，受到国内外学者的高度关注与不断发展。张洪武等[25,26]基于参变量变分原理采用正交各向异性摩擦定律对三维弹塑性摩擦接触问题进行分析。对三维接触问题滑动方向的确定，该文提出了组合规划法和迭代法，建立了用于各向异性摩擦接触分析的二阶锥线性互补模型。由于避免了对摩擦锥的显式线性化，该方法的变量个数比线性互补模型小很多，并且精度高。之后李建宇等[27]提出了增广 Lagrange 线性互补表述形式，构造出求解摩擦接触问题的一种增广 Lagrange 线性互补算法。虽然也包含了惩罚参数，但在理论上不需要其趋于无穷大就能得到精确解。廖爱华等[28]针对某柴油机涡轮增压器的压气机设计问题，采用参变量变分原理并结合多重子结构技术，研究了叶轮与轴套、轴套与轴的三维弹塑性接触问题，获得了叶轮、轴套与轴之间接触应力的分布规律，发现轴套与轴的过盈量是影响涡轮增压器性能的关键参数。并提出非均匀初始过盈量设计技术，以保证接触面不发生相对位移和接触应力均匀性。张军等[29]应用参变量变分原理及有限元参数二次规划法，研究了机车车轮与道岔的接触问题，发现由于车轮踏面与辙叉的型面不配合轮与辙叉形成两点接触，靠近轮缘处踏面和辙叉接触斑的结构应力与接触力太大，导致了车轮踏面与辙叉的磨耗严重，为改进道岔设计提供了理论依据。赵伟等[30]利用参变量变分原理和数学二次规划法研究了轮轨接触问题，发现轮对承受横向载荷时，轮轨接触点在粘着区和蠕滑区有明显差异，在粘着区蠕滑与钢轨纵向夹角较小，而在蠕滑区方向与钢轨纵向夹角较大，这些研究对于轮轨接触设计具有指导意义。此外，张洪武[31]基于参变量变分原理，建立了弹性接触颗粒状组成周期性结构材料力学分析的均匀化模型，研究了具有周期性构造的弹性接触颗粒材料力学的微观与宏观两级均匀化方法，发展了问题局部微观尺度分析的有限元求解技术。

3.4　固液界面滑移问题

数百年来，在经典流体力学和润滑力学的所有教科书和论文中，几乎都有一个重要假设，在固体和液体的交界面上没有滑移，即固体和液体在交界面上没有相对运动，这就是所谓的非滑移边界条件，已广泛用于各种工程和实验，几乎所有的流体粘度和流变学实验都是基于这个假设。这个假设对于宏观流体动力学问题是成立的，因为界面剪力不是很大。

假设固-液交界面上没有滑移，在物理概念上就是假设固液交界面上的流体剪应力可以达到无穷大，这个假设在近代受到了实验的严厉挑战。近年来随着纳米测试技术的不断进步，对固液界面滑移问题的纳米尺度测试成为可能，近场激光速度仪 NFLV、原子力显微镜 AFM 和表面力仪 SFA 的直接观测反复证明了固液界面滑移无可怀疑。除了试验之外，分子动力学数值模拟也证明固液界面存在滑移现象。但是关于固液界面的滑移准则与分析理论研究还比较落后。本文作者在 20 世纪 90 年代初师从钱令希院士做博士后期间，受钱令希先生的鼓励，开始向钟先生学习参变量变分原理在润滑力学中的应用。1992 年吴承伟与钟先生和钱令希先生等发表了第一篇关于流体力学间隙流动的固液界面滑移论文[32]。润滑接触问题分析比干接触问题复杂，不但涉及到两个固体表面，而且还涉及到流体的流动问题。若考虑固体的弹性变形，又属于流固强耦合问题。固液界面滑移问题的状态

控制方程要比固体干接触问题复杂,本文不再详细描述,但是变分泛函经过有限元离散后,流固边界滑移问题的数学描述与弹塑性接触问题非常类似,

$$\min.\boldsymbol{J}[\boldsymbol{\lambda}(\cdot)]=\frac{1}{2}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{KP}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Bu}+\boldsymbol{W}\dot{\boldsymbol{h}}-\boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{\rho}}-\boldsymbol{q}) \tag{34a}$$

$$\mathrm{s.t.}\boldsymbol{CP}+\boldsymbol{M\lambda}+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{v}=0 \tag{34b}$$

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\lambda}=0,\boldsymbol{v}\geqslant 0,\boldsymbol{\lambda}\geqslant 0 \tag{34c}$$

式中 $\dot{\boldsymbol{h}}$ 和 $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ 为流体膜厚与密度对时间的导数,P 为流体压力(最后求解的关键参数),其他各矩阵与向量在文献[5,6]中有详细描述。利用参变量变分原理及其参数二次规划算法能够很方便一次求解流固耦合界面滑移润滑问题的各个参数,不但可以揭示流固界面滑移区的产生机理,而且发现了当两个固体表面相对滑动速度太大时发生油膜破裂的物理本质[32,33]。超疏水表面的亲水能力很弱,近年来很多试验证明了在微纳间隙流动容易发生大面积滑移。这个问题理论分析若采用迭代求解技术很难收敛。吴承伟等[34,35]利用参变量变分原理及其参数二次规划算法,可以很方便处理这个问题,理论预报与试验吻合非常好。图3是利用参变量变分原理PVP预报的超疏水球压向平面的流体动压力 F 与水膜厚度倒数的关系。而其他方法[36,37]理论预报与试验误差较大。

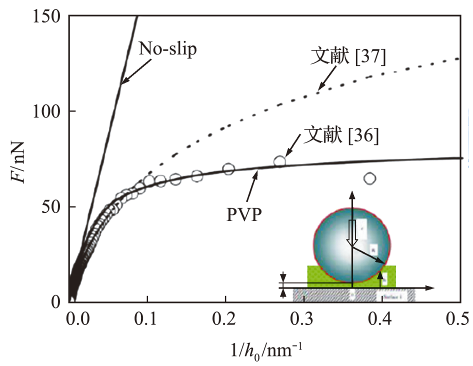


图3 超疏水球流体膜挤压理论预报与实验比较

Fig. 3 Theoretical prediction and experimental comparison of superhydrophobic spherical fluid squeezing film

吴承伟等[38]把参变量变分原理用于分析金属板扎制过程中的粘塑性润滑问题,能够快速预报金属扎制过程中润滑油馍的厚度与扎制速度的关系,为金属扎制工艺设计提供了理论基础。之后基于润滑固液界面滑移动力学研究基础,设计了一种滑移与非滑移复合表面滑动轴承,使得轴承的摩擦力大幅度减小,承载力大幅度提高[39-43]。如经过滑移区形状优化设计,滑块轴承的流体承载力比经典轴承提高了159%,摩擦阻力降低了59%[44]。另外,吴承伟等[45]建立了双线性流变关系润滑剂的润滑力学本构方程与参变量变分原理,使得这类非线性润滑问题得到解决。当第一级粘度趋于无穷大时,这个模型就退化为Bingham流变润滑问题。显示了参变量变分原理在润滑力学数值计算中的明显特色与优势。

3.5 岩土力学问题

自从1986年钟先生发表了第一篇关于土力学问题的参变量变分原理论文[9],众多学者不断发展和拓展岩土力学问题的参变量变分原理,已经形成了一套比较完整的理论体系。岩土类材料在受载时不仅会产生弹塑性变形,还常伴随着渗流和固结,是一个典型的与时间相关的动态变形过程。曾攀等[46,47]于1991年建立了岩土渗透固结过程的参变量变分原理及其参数二次规划算法,可有效处理岩土弹塑性渗透固结问题。文献[22,48-50]对于饱和土等岩土材料固结渗透动力学问题进行了更深入的研究。基于参变量变分原理及其参数二次规划算法求解岩土介质的固结渗透非线性问题,求解过程不受Drucker假设的限制,适用于弹塑性固结分析的关联或非关联塑性流动问题。同时可以处理固结分析中的软化问题,并避免了传统固结弹塑性问题求解的反复的迭代过程。显示了参变量变分原理处理土力学若干非线性问题具有自己的明显特色。

彭华等[51]利用参变量变分原理研究了预应力轨枕的损伤演化和寿命平复方法,揭示了预应力轨枕在自身徐变与其他疲劳荷载交互作用下的材质劣化损伤行为及其损伤失效机理,对轨枕损伤过程中的循环应力场进行更有效描述。郑俊杰等[52,53]基于参变量变分原理研究了土的变形模量与压缩模量之间的关系,并给出了多元复合地基的复合模量在弹性及塑性状态下的解析解。朱珍德等[54]采用参变量变分原理,研究了膨胀软岩的湿度弹塑性问题,湿度引起的膨胀应力-塑性流动与随湿度变化的屈服准则等相互耦合在一起,给问题分析带来一定的难度。把这类问题用参变量变分原理及其参数二次规划法来处理,物理概念更加清晰,数值计算方法简便,实用性强。

邓岳保等[55]基于地基梁模型能量泛函,结合参变量变分原理和分段线性地基模型中的互补条件,得到了一个标准的线性互补模型,使地基梁位移非线性求解问题转化为一个标准的数学规划问题。考虑非线性影响时,地基梁位移曲线非均匀沉降增大,地基梁内力增大。荷载大小及梁与地基的

相对刚度均会影响地基梁位移分布形式。栾茂田等[56]基于参变量变分原理的基本思想，改进了多体非连续变形计算力学模型，探讨了能够涵盖各种变形状态和运动形式的广义有限单元模式。根据非连续变形系统的分区参变量最小势能变分原理，联立变分驻值条件与参变量的状态控制条件，建立了多体系统非连续变形的基本控制方程。该模型不仅能够对多体系统进行静和动力耦合分析，而且还能够模拟多体系统的变形与应力及接触界面上的接触应力和相对运动等复杂的非线性过程。

3.6　拉压变刚度结构分析

工程中有很多结构件受拉和受压时刚度各异，如钢索结构与网膜结构等。这类结构受拉时刚度较大，但是受压时几乎没有刚度，若大型结构由很多此类构件组成，结构呈现出较强的非线性特征，结构分析若采用传统的迭代求解技术，收敛性一直是比较棘手的问题。然而参变量变分解决此类工程问题却非常容易。变刚度结构的参变量变分原理与参数二次规划算法的基本理论在2.1节已经做了介绍。钱江等[57]基于参变量变分原理与参数二次规划算法，以上海市浦江大桥工程为设计背景，提出了大跨度斜拉桥采用具有单边约束性质的辅助墩设计的参数二次规划分析方法，显示了该方法对分段线性系统极为有效。高强等[58]在钟万勰先生指导下，建立了拉压刚度不同杆单元组成的桁架结构动力学的参变量变分原理，将非线性动力分析问题转换为线性互补问题求解，并结合时间有限元方法构造了求解此问题的保辛数值积分方法，此方法不需要迭代和刚度矩阵更新，避免了迭代求解方法的收敛问题，数值计算过程稳定而高效。索网天线属于典型的索杆张拉结构，具有抗拉不抗压的材料非线性特性，并与几何非线性的叠加给大型索网天线结构的力学建模与分析带来很大困难。谭述君等[59]研究了桁架式索网天线的本构非线性和结构大变形引起的几何非线性问题，首先针对含预应力索单元拉压模量不同分段描述的本构关系，通过引入参变量，导出了基于参变量及其互补方程的统一描述形式。然后利用拉格朗日应变描述索网天线结构大变形问题，建立了含有参变量的非线性平衡方程和线性互补方程，给出了牛顿-拉斐逊迭代法与莱姆算法相结合的求解算法，比传统算法具有更稳定的收敛性和更高的求解精度，此方法适合于大型索网天线结构的高精度变形分析和预测。刘涛等[60]在索网天线找形分析中使用了类似的方法，证明了参变量变分原理及其参数二次规划算法在解决这一类非线性结构问题的有效性。直升机在舰船上停留或者在机库长期存放时，必须使用系留装置将直升机牢固系留在舰船上，需要对直升机的系留索具和系留接头上的载荷进行分析，从而给出合理的系留方案，使直升机和系留设备上承受的载荷比较均匀和合理。张燕辉等[61]基于参变量变分原理，研究了直升机的系留结构非线性力学问题，为提高直升机系留载荷计算效率、快速优化系留方案等提供了可靠依据。

3.7　先进材料的力学性能分析

先进材料是由各种微纳结构组成的针对各种工程需求而特殊设计的新材料。先进材料设计与性能分析不同于常规的金属材料，常涉及到非线性与多尺度分析等问题。先进材料种类繁多且性能各异，很难建立一套统一的分析理论与方法。参变量变分原理在这类材料的设计与分析中同样具有自己的特色与优势。1989年潘敬哲等[62]发表了一篇关于纤维增强复合材料层压板失效分析的论文，建立了关于具有逐层失效不连续本构关系的纤维增强复合材料层压板的参变量变分原理，构造的受参变量控制的能量泛函的驻值问题可转化为一个拟二次规划问题。该方法的优点在于避免了分析层压板强度的冗长迭代过程，可在一个加载步内求出对应各单层失效的一系列强度比值。张洪武等[63]针对材料非线性多级分析的计算模型与算法问题，采用近似技术建立非线性分析的本征应变矩阵，构造了针对弹塑性材料均匀化分析的一致性算法。将建立的单胞分析过程作为有限元分析的子程序嵌入到总程序系统当中完成对应的高斯点应力计算。针对考虑材料内摩擦接触的颗粒材料多尺度计算问题，建立了一种基于数值技术的多级分析方法。张洪武等[65]针对非均质材料在小变形下的弹塑性力学行为进行数值模拟，建立了基于参数变分原理的多边形有限元法和Voronoi单元有限元法，给出了多边形单元的形状函数，验证了弹塑体系的参数势能原理。针对碳纳米管力学问题，文献[66]建立了任意两个相邻非键合原子之间范德华力模拟的参数变分原理，以及相应的改进二次规划方法。与传统数值迭代方法相比，该方法仅依赖于标准二次规划问题求解中的基交换。在计算中表现出非常好的收敛性。Zhang等[67-69]利用参数变分原理，研究了双模量复合材料的力学行为，创建了一个统一的本构方程，以解决局部坐标系中应变不连续性引起的问题。通过结合材料改性的概念，成功地将该方法扩展到薄膜材料的起皱分析。

在文献[70]第4章和第6章对这个问题的参变量变分原理及其数值方法进行了比较详细的介绍。

3.8 其他应用

3.1节～3.7节介绍了参变量变分原理在处理各种非线性力学问题中的理论发展及其应用，其实参变量变分原理能够处理的非线性问题很多，尤其擅长处理本构参数阶跃式变化的非线性问题。同时也可以有效处理材料的粘塑性、蠕变与损伤等问题。1991年曾攀等[71]用参变量变分原理研究了材料的粘塑性力学行为，建立了粘塑性问题的参变量变分原理与参数二次规划算法[72]。之后曾攀等[73,74]建立了具有损伤耦合效应的弹塑性蠕变问题的参变量变分原理，给出了用于结构损伤失效分析的有限元列式与相应的数值分析方法[75]。曹文衔等[76]基于连续介质损伤力学中有效应力的概念，研究建筑结构的热弹塑性与损伤的耦合问题，建立了热弹塑性损伤问题结构分析的参变量变分原理。

重大工程结构中存在诸多不确定因素，这些随机因素对工程结构的安全使用或运营的影响不可忽略。谢尊[77]基于参变量变分原理，研究了变截面随机结构静力响应的精确求解方法，解决了随机摄动法和随机谱方法难以求解具有连续位移场的随机结构静力响应问题。

最优控制论是现代控制论的重要组成部分，LQ最优控制问题是最优控制理论中最基本的核心问题之一。有关LQ最优控制系统设计与数值算法大多都限于系统无约束情况。彭海军等[78]基于弹塑性接触力学的参变量变分原理的基本思想，建立了控制输入受限的线性二次规划最优控制问题的物理方程，亦即耦合的Hamilton正则方程与线性互补方程，将连续时间离散成一系列等间距时间段，采用二次规划方法求解输入受限的LQ最优控制问题，该方法数值收敛性好，计算精度对于步长不敏感。

4 结 论

参变量变分原理是一种求解数学物理问题中边界待定等非线性问题的一种全新理论与方法。其突破了经典变分原理的局限性，引入了现代控制论的极值变分思想，将原问题转化为求解由本构关系建立的状态方程控制下的泛函极小值问题。参变量变分原理具有自己的明显特色与优势，比经典变分原理应用范围更为广泛，参变量变分原理求解非线性问题时不需要传统的冗长迭代过程，因而没有棘手的收敛性问题。如果把线性方程组求解看成是一次分解过程，那么参变量变分原理最多需要二次分解过程，而且数值求解精度高。

经过几十年的不断发展，参变量变分原理已经成功应用于各个领域。本文介绍了参变量变分原理的起源与建立过程，阐明了如何针对特定的非线性问题，建立参变量变分原理理论模型以及实现数值参数二次规划求解。详细回顾了参变量变分原理的基本理论与相应数值算法在各个领域的发展及其工程应用，其中包括弹塑性分析、接触问题、润滑力学、岩土力学、变刚度杆系结构、先进材料性能分析、材料的蠕变与损伤、柔性结构力学和LQ最优控制等。展示了参变量变分原理求解各类非线性问题的特色与优势。

为了便于化归参数二次规划的成熟算法，目前参变量变分原理的变分泛函多数都是经过线性化处理，然而线性化处理会带来一定的计算误差。钟万勰在文献[9]中关于土力学变分原理提出了不做线性化处理的概念，直接利用原有的参变量变分原理，将原问题化为一般的非线性规划问题，找出其有效算法和做出其增量步逐步积分。相信参变量变分原理还有很多的发展空间，以展示其在求解各类非线性问题的特色与优势。

谨以本文献给钟先生九十诞辰！

参考文献(References)：

[1] 钟万勰. 弹性接触问题的变分原理及其参数二次规划解[J]. 计算结构力学及其应用，1985，**2**(2)：1-10. (ZHONG Wan-xie. On variational principle of elastic contact problems and parametric quadratic programming solution[J]. *Computational Structure Mechanics & Applications*, 1985, **2**(2): 1-10. (in Chinese))

[2] 钟万勰. 弹性接触问题的势能原理及其算法[J]. 计算结构力学及其应用，1985，**2**(1)：21-29. (ZHONG Wan-xie. The minimum potential energy principle in elasto contact problems and its numerical method[J]. *Computational Structure Mechanics & Applications*, 1985, **2**(1): 21-29. (in Chinese))

[3] 张柔雷. 参变量变分原理及其应用[D]. 大连理工大学，1987. (ZHANG Rou-lei. Parametric Variational Principle and Its Applications[D]. Dalian University of Technology, 1987. (in Chinese))

[4] 孙苏明. 参数二次规划法的研究及其工程结构分析应用[D]. 大连理工大学，1988. (SUN Su-ming. Study of Parametric Quadratic Programming and Applications in Engineering Structure Analysis[D]. Dalian University of Technology, 1988. (in Chinese))

[5] Zhong W X, Wu C W. *Elastic-Plastic Contacts using*

Parametric Quadratic Programming, Chapter 9 *in Computational Mechanics in Contact Mechanics*[M]. UK: Computational Mechanics Publications & Elsevier Science Publications Ltd, 1993.
[6] 钟万勰，张洪武，吴承伟. 参变量变分原理及其在工程中的应用[M]. 北京：科学出版社，1997. (ZHONG Wan-xie, ZHANG Hong-wu, WU Cheng-wei. *Parametric Variational Principle and Its Application in Engineering* [M]. Beijing: Science Press, 1997. (in Chinese))
[7] Zhong W X, Zhang R L. Parametric variational principles and their quadratic programming solutions in plasticity[J]. *Computers & Structures*, 1988, **30**(4): 887-896.
[8] 张柔雷. 塑性全量理论中的控制变量变分原理[J]. 上海力学，1989, **10**(4): 45-53. (ZHANG Rou-lei. The controled variational principles in deformation theory of plasticity [J]. *Shanghai Journal of Mechanics*, 1989, **10**(4): 45-53. (in Chinese))
[9] Zhong W X. On parametric minimum complementary energy variational principle in soil mechanics[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1986, **2**(3): 249-255.
[10] 钟万勰，张柔雷. 塑性理论中的二阶最小变分原理[J]. 计算结构力学及其应用，1987, **4**(4): 1-7. (ZHONG Wan-xie, ZHANG Rou-lei. On the second stage minization variational principle in plasticity[J]. *Computational Structure Mechanics & Applications*, 1987, **4**(4): 1-7. (in Chinese))
[11] 张柔雷，钟万勰. 流动理论中的参变量最小势能原理[J]. 固体力学学报，1989, **10**(1): 90-95. (ZHANG Rou-lei, ZHONG Wan-xie. The parametric minimun potential energy principle of flow theory [J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1989, **10**(1): 90-95. (in Chinese))
[12] Zhong W X, Sun S M. A finite element method for elasto-plastic structures and contact problems by parametric quadratic programming [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1988, **26**(12): 2723-2738.
[13] 张柔雷，钟万勰. 参变量最小势能原理的有限元参数二次规划解[J]. 计算结构力学及其应用，1987, **4**(1): 1-11. (ZHANG Rou-lei, ZHONG Wan-xie, The numerical solution for PMPEP by parametric quadratic programming[J]. *Computational Structure Mechanics & Applications*, 1987, **4**(1): 1-11. (in Chinese))
[14] 钟万勰，张柔雷，孙苏明. 参数二次规划法在计算力学中的应用(一、二、三)[J]. 计算结构力学及其应用，1988, **5**(4): 106-114; 1989, **6**(1): 98-1-8; 1989, **6**(2): 113-120. (ZHONG Wan-xie, ZHANG Rou-lei, SUN Su-ming. Parametric quadratic programming applications in computational mechanics(I, II, III) [J]. *Computational Structure Mechanics & Applications*, 1988, **5**(4): 106-114; 1989, **6**(1): 98-1-8; 1989, **6**(2): 113-120. (in Chinese))
[15] 钟万勰，孙苏明. 二次规划问题参数加载算法[J]. 计算结构力学及其应用，1988, **5**(4): 83-88. (ZHONG Wan-xie, SUN Su-ming. Parametric incremental loading method of quadratic programming[J]. *Computational Structure Mechanics & Applications*, 1988, **5**(4): 83-88. (in Chinese))
[16] 程耿东. 工程结构优化设计基础[M]. 北京：水利电力出版社，1984. (CHENG Geng-dong. *Foundation of Engineering Structure Optimization Design*[M]. Beijing: Water Conservancy and Electric Power Press, 1984. (in Chinese))
[17] Zhong W X, Zhang R L. The parametric variational principle for elastoplasticity[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1988, **4**(2): 134-137.
[18] Chen W F. *Plasticity in Reinforced Concrete*[M]. New York: McGraw-Hill, 1982.
[19] 周太全，李兆霞，贾军波. 弹塑性损伤分析的参变量变分原理[J]. 东南大学学报，2001, **31**(5): 67-71. (ZHOU Tai-quan, LI Zhao-xia, JIA Jun-bo. Parametric variational principle for coupled elasto-plasticity damage problem analysis[J]. *Journal Southeast University*, 2001, **31**(5): 67-71. (in Chinese))
[20] 张洪武，张新伟，顾元宪. 基于梯度塑性理论的动力软化问题分析[J]. 振动工程学报，2001, **14**(2): 135-139. (ZHANG Hong-wu, ZHANG Xin-wei, GU Yuan-xian. Analysis of dynamic softening problem with gradient dependent model[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2001, **14**(2): 135-139. (in Chinese))
[21] 刘　涛，邓子辰. 材料弹塑性性能数值模拟的多尺度方法[J]. 固体力学学报，2007, **28**(1): 97-101. (LIU Tao, DENG Zi-chen. Multiscale analysis of elasto-plastic composite material [J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2007, **28**(1): 97-101. (in Chinese))
[22] 罗晓辉，白世伟. 弹塑性大变形 Biot 固结理论的参变量变分原理[J]. 岩土力学与工程学报，2003, **22**(10): 1716-1721. (LUO Xiao-hui, BAI Shi-wei. Parametric variation principle of elasto-plastic large deformation in Biot's consolidation theory[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2003, **22**(10): 1716-1721. (in Chinese))
[23] 钱令希，张　雄. 刚性有限元的参变量变分原理及有限元参数二次规划解[J]. 计算结构力学及其应用，1992, **9**(2): 117-123. (QIAN Ling-xi, ZHANG Xiong. Parametric variational principle for rigid finite element

and its parametric quadratic programming[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 1992, **9**(2): 117-123. (in Chinese))

[24] Aliabadi M H, Brebbia C A. *Computational Mechanics in Contact Mechanics* [M]. UK: Computational Mechanics Publications & Elsevier Science Publications Ltd, 1993.

[25] 张洪武, 何素艳, 李兴斯. 正交各向异性弹塑性摩擦接触问题的数值求解[J]. 固体力学学报, 2004, **25**(4): 411-416. (ZHANG Hong-wu, HE Su-yan, LI Xing-si. Numerical solution of 3D elasto-plastic contact problems with orthotropic friction law[J]. *Acta Mechanica So-lida Sinica*, 2004, **25**(4): 411-416. (in Chinese))

[26] 李建宇, 张洪武, 潘少华. 正交各向异性摩擦接触分析的一个二阶锥线性互补法[J]. 固体力学学报, 2010, **31**(2): 109-118. (LI Jian-yu, ZHANG Hong-wu, PAN Shao-hua. A second-order cone linear comple-mentarity approach for contact problems with ortho-tropic friction law[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2010, **31**(2): 109-118. (in Chinese))

[27] 李建宇, 毕德学. 摩擦接触问题参变量二次规划分析的增广 Lagrange 算法[J]. 天津科技大学学报, 2009, **24**(6): 54-59. (LI Jian-yu, BI De-xue. A parametric augmented Lagrangian quadratic programming approach for frictional contact problems[J]. *Journal of Tianjing University of Science & Technology*, 2009, **24**(6): 54-59. (in Chinese))

[28] 廖爱华, 张洪武, 吴昌华. 增压器压气机三维弹塑性接触的研究[J]. 机械工程学报, 2006, **42**(5): 81-86. (LIAO Ai-hua, ZHANG Hong-wu, WU Chang-hua. Study on 3D elastoplastic contact problem of turbocharger compressor[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2006, **42**(5): 81-86. (in Chinese))

[29] 张 军, 王春艳, 孙传喜, 等. 轮对与道岔接触问题的有限元分析[J]. 铁道学报, 2009, **31**(3): 26-30. (ZHANG Jun, WANG Chun-yan, SUN Chuan-xi, et al. Finite element analysis on contact of wheelset and turnout[J]. *Journal of China Railway Society*, 2009, **31**(3): 26-30. (in Chinese))

[30] 赵 伟, 张 军, 王春艳, 等. 接触角和横向载荷对轮轨粘着的影响[J]. 机械工程学报, 2011, **47**(22): 100-105. (ZHAO Wei, ZHANG Jun, WANG Chun-yan, et al. Effects of the contact angle and lateral load on the wheel/rail adhesion[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2011, **47**(22): 100-105. (in Chinese))

[31] 张洪武. 弹性接触颗粒状周期性结构材料力学分析的均匀化方法(I): 局部 RVE 分析[J]. 复合材料学报, 2001, **18**(4): 93-97. (ZHANG Hong-wu. Homogenization method for the analysis of assemblage of elastic contact grains(I): Local RVE analysis[J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2001, **18**(4): 93-97. (in Chinese))

[32] Wu C W, Zhong W X, Qian L X, et al. Parametric variational principle of viscoplastic lubrication model [J]. *Journal of Tribology*, 1992, **114**(4): 731-735.

[33] 吴承伟, 胡令臣. 界面滑移与油膜破裂[J]. 大连理工大学学报, 1993, **33**(2): 172-178. (WU Cheng-wei, HU Ling-chen. Wall slippage and oil film collapse[J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 1993, **33**(2): 172-178. (in Chinese))

[34] Wu C W, Ma G J. On the boundary slip of fluid flow [J]. *Science in China Series G: Physics Mechanics and Astronomy*, 2005, **48**(2): 178-187.

[35] Wu C W, Zhou P, Ma G J. Squeeze fluid film of spherical hydrophobic surfaces with wall slip [J]. *Tribology International*, 2006, **39**(9): 863-872.

[36] Craig V S J, Neto C, Williams D R M. Shear-dependent boundary slip in an aqueous Newtonian liquid [J]. *Physical Review Letters*, 2001, **87**(5): 054504.

[37] Vinogradova O I. Drainage of a thin liquid film confined between hydrophobic surfaces[J]. *Langmuir*, 1995, **11**(6): 2213-2220.

[38] Wu C W, Ma G J, Sun H S. Viscoplastic lubrication analysis in a metal-rolling inlet zone using parametric quadratic programming[J]. *Journal of Tribology*, 2005, **127**(3): 605-610.

[39] Wu C W, Ma G J, Zhou P, et al. Low friction and high load support capacity of slider bearing with a mixed slip surface[J]. *Journal of Tribology*, 2006, **128**(4): 904-907.

[40] Wu C W, Ma G J. Abnormal behavior of a hydrodynamic lubrication journal bearing caused by wall slip [J]. *Tribology International*, 2005, **38**(5): 492-499.

[41] Wu C W, Sun H X. Quadratic programming algorithm for wall slip and free boundary pressure condition[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2006, **50**(2): 131-145.

[42] Ma G J, Wu C W, Zhou P. Wall slip and hydrodynamics of two-dimensional journal bearing[J]. *Tribology International*, 2007, **40**(7): 1056-1066.

[43] Ma G J, Wu C W, Zhou P. Multi-linearity algorithm for wall slip in two-dimensional gap flow[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2007, **69**(12): 2469-2484.

[44] Ma G J, Wu C W, Zhou P. Hydrodynamics of slip wedge and optimization of surface slip property[J].

Science in China Series G: Physics, Mechanics and Astronomy, 2007, **50**(3): 321-330.

[45] Wu C W, Sun H X. A new hydrodynamic lubrication theory for bilinear rheological fluids[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 1995, **56**(3): 253-266.

[46] 曾 攀，钱令希. 岩土中弹塑性渗透固结问题的参变量变分原理[J]. 力学学报，1991，**23**(4)：484-490.（ZENG Pan, QIAN Ling-xi. The parametric variational principle for elastoplasticity consolidation in soil[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1991, **23**(4): 484-490. (in Chinese)）

[47] 曾 攀，钱令希. 弹塑性岩土介质中渗透固结问题的参数二次规划法[J]. 应用力学学报，1991，**8**(3)：1-10，147.（ZENG Pan, QIAN Ling-xi. The quadratic programming method for elastoplastic consolidation problem in soil [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 1991, **8**(3): 1-10, 147. (in Chinese)）

[48] 张洪武，钟万勰，钱令希. 饱和土动力固结分析中的变分原理[J]. 岩土工程学报，1992，**14**(3)：20-29.（ZHANG Hong-wu, ZHONG Wan-xie, QIAN Ling-xi. Variational principle for dynamic consolidation analysis of saturated soil[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1992, **14**(3): 20-29. (in Chinese)）

[49] 张洪武，钟万勰，钱令希. 土体固结弹塑性分析的参数二次规划理论及有限元解[J]. 岩土力学，1995，**16**(1)：35-45.（ZHANG Hong-wu, ZHONG Wan-xie, QIAN Ling-xi. Parametric quadratic programming method and its finite element solution for soil non-linear consolidation problems based on generalized Boit equations[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 1995, **16**(1): 35-45. (in Chinese)）

[50] Zhang H W. Parametric variational principle for elastic-plastic consolidation analysis of saturated porous media[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1995, **19**(12): 851-867.

[51] 彭 华，王均星，乐运国. 预应力轨枕的损伤演化和寿命估算方法[J]. 铁道学报，2001，**23**(5)：71-74.（PENG Hua, WANG Jun-xing, YUE Yun-guo. Damage evolution theory and life evaluating method for prestressed sleeper[J]. *Journal of China Railway Society*, 2001, **23**(5): 71-74. (in Chinese)）

[52] 郑俊杰，区剑华，袁内镇，等. 多元复合地基压缩模量参变量变分原理解析解[J]. 岩土工程学报，2003，**25**(3)：317-321.（ZHENG Jun-jie, OU Jian-hua, YAN Nei-zhen, et al. Analytical solutions of composite modulus of multi-element composite foundation by parametric variational principle[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2003, **25**(3): 317-321. (in Chinese)）

[53] 郑俊杰，区剑华，邢泰高. 参变量变分原理求解土的变形模量与压缩模量间的关系[J]. 固体力学学报，2004，**25**(1)：53-57.（ZHENG Jun-jie, OU Jian-hua, XING Tai-gao. Application of the parametric variational principle in determining the relation between the moduli of soil deformation and soil compression [J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2004, **25**(1): 53-57. (in Chinese)）

[54] 朱珍德，张爱军，张 勇，等. 基于湿度应力场理论的膨胀岩弹塑性本构关系[J]. 岩土力学，2004，**25**(5)：700-702.（ZHU Zhen-de, ZHANG Ai-jun, ZHANG Yong, et al. Elastoplastic constitutive law of swelling rock based on humidity stress field theory[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2004, **25**(5): 700-702. (in Chinese)）

[55] 邓岳保，谢康和，夏建中. 基于参变量变分原理的地基梁位移非线性分析[J]. 建筑结构学报，2012，**33**(4)：142-149.（DENG Yue-biao, XIE Kang-he, XIA Jian-zhong. Non-linear analysis of foundation beam based on parametric variational principle[J]. *Journal of Building Structures*, 2012, **33**(4): 142-149. (in Chinese)）

[56] 栾茂田，黎 勇，樊 成，等. 多体非连续变形系统的计算力学模型及其应用[J]. 工程力学，2004，**21**(4)：66-74.（LUAN Mao-tian, LI Yong, FAN Cheng, et al. A model for discontinuous deformation of multi-body system and its application [J]. *Engineering Mechanics*, 2004, **21**(4): 66-74. (in Chinese)）

[57] 钱 江，卢文达，翁智远. 带有单边约束斜拉桥非线性问题的参数二次规划法分析[J]. 土木工程学报，1993，**26**(2)：39-47.（QIAN Jiang, LU Wen-da, WENG Zhi-yuan. Application of parametric quadratic programming to cable-stayed bridge with unilateral supports [J]. *China Civil Engineering Journal*, 1993, **26**(2): 39-47. (in Chinese)）

[58] 高 强，张洪武，张 亮，等. 拉压刚度不同桁架的动力参变量变分原理和保辛算法[J]. 振动与冲击，2013，**32**(4)：179-184.（GAO Qiang, ZHANG Hong-wu, ZHANG Liang, et al. Dynamic parametric variational principle and symplectic algorithm for trusses with different tensional and compressional stiffnesses [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2013, **32**(4): 179-184. (in Chinese)）

[59] 谭述君，侯 健，吴志刚，等. 索网天线的参变量变分及非线性有限元方法[J]. 力学学报，2014，**46**(5)：770-775.（TAN Shu-jun, HOU Jian, WU Zhi-gang, et al. The parametric varational principle and non-

linear finite element method for analysis of astromesh antenna structures[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2014, **46**(5): 770-775. (in Chinese))

[60] 刘 涛,王 碧,唐国安,等.索网天线找形分析的参变量变分有限元法[J].计算力学学报,2021,**38**(1):73-77.(LIU Tao, WANG Bi, TANG Guo-an, et al. Parametric variational finite element method for the form-finding of the cable-network antenna[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2021, **38**(1): 73-77. (in Chinese))

[61] 张燕辉,高 强.基于参变量变分原理的直升机系留载荷高性能计算方法[J].计算力学学报,2022,**39**(6):699-705.(ZHANG Yan-hui, GAO Qiang. High-performance method for mooring load computation of helicopter based on parametric variational principle [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2022, **39**(6): 699-705. (in Chinese))

[62] 潘敬哲,陈陆平,钱令希.纤维增强复合材料层压板的失效过程分析[J].应用力学学报,1989,**6**(3):1-11.(PAN Jing-zhe, CHEN Lu-ping, QIAN Ling-xi. The failure analysis of composite laminmates by the parametric variational principle[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 1989, **6**(3): 1-11. (in Chinese))

[63] 张洪武,王鲲鹏.弹塑性多尺度计算的模型与算法研究[J].复合材料学报,2003,**20**(1):60-66.(ZHANG Hong-wu, Wang Kun-peng. Numerical model and algorithm for multi-scale analysis of elastic-plastic composite materials [J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2003, **20**(1): 60-66. (in Chinese))

[64] 张洪武,王鲲鹏.材料非线性微-宏观分析的多尺度方法研究[J].力学学报,2004,**36**(3):359-363.(ZHANG Hong-wu, Wang Kun-peng. Multiscale methods for nonlinear analysis of composite materials[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2004, **36**(3): 359-363. (in Chinese))

[65] Zhang H W, Wang H, Wang J B. Parametric variational principle based elastic-plastic analysis of materials with polygonal and Voronoi cell finite element methods[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2007, **43**(3): 206-217.

[66] Zhang H W, Wang J B, Ye H F, et al. Parametricvariational principle and quadratic programming method for van der Waals force simulation of parallel and cross nanotubes[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, **44**(9): 2783-2801.

[67] Zhang L, Gao Q, Zhang H W, Analysis of 2D bimodular materials and wrinkled membranes based on the parametric variational principle and co-rotational approach[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2014, **98**(10): 721-746.

[68] Zhang H W, Zhang L, GAO Qiang. An efficient computational method for mechanical analysis of bimodular structures based on parametric variational principle [J]. *Computers & Structures*, 2011, **89**(23-24): 2352-2360.

[69] Zhang H T, Wu J, Yan B, et al. Parametric variational principle for Bi-modulus materials and its application to nacreous bio-composites[J]. *International Journal of Applied Mechanics*, 2016, **8**(6): 1650082.

[70] 张洪武.参变量变分原理与材料和结构力学分析[M].北京:科学出版社,2010.(ZHANG Hong-wu. *Parametric Variational Principle and Mechanical Analysis of Materials and Structures*[M]. Beijing: Science Press, 2010. (in Chinese))

[71] 曾 攀,钟万勰.Perzyna粘塑性模型的参变量变分原理[J].应用数学和力学,1991,**12**(5):409-424.(ZENG Pan, ZHONG Wan-xie. The parametric variational principle for perzyna model in viscoplasticity [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1991, **12**(5): 409-414. (in Chinese))

[72] 曾 攀,钱令希.粘塑性问题的参数二次规划法[J].应用数学和力学,1991,**12**(6):541-545.(ZENG Pan, QIAN Ling-xi. Parametric quadratic programming method for viscoplasticity[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1991, **12**(6): 541-545. (in Chinese))

[73] 曾 攀,孙训方.用于弹性蠕变损伤问题的参变量变分原理[J].力学学报,1992,**24**(5):629-633.(ZENG Pan, SUN Xun-fang. The variational principle for elastic creep-damage problem [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1992, **24**(5): 629-633. (in Chinese))

[74] 曾 攀,孙训方.具有损伤耦合效应的弹塑性蠕变问题结构分析的变分原理[J].固体力学学报,1992,**13**(2):95-100.(ZENG Pan, SUN Xun-fang. The variational principle of structural analysis for damage-coupled elastoplastic creep problem[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1992, **13**(2): 95-100. (in Chinese))

[75] 曾 攀,高 庆.损伤失效分析的数值原理及有限元列式[J].西南交通大学学报,1992,**88**(6):33-41.(ZENG Pan, GAO Qing. A numerical principle and FEM formulation for the analysis of damage failure[J]. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 1992, **88**(6): 33-41. (in Chinese))

[76] 曹文衔,沈祖炎,董 宝.考虑损伤累积的热弹塑性问题变分原理及其有限元方法[J].上海力学,1996,**17**(4):171-277.(CAO Wen-xian, SHEN Zu-yan, DONG Bao. A variational principle and its FEM implementation for an elasto-plasticity thermal problem with damage cumulation [J]. *Shanghai Journal of Mechanics*,

1996,**17**(4):171-277.(in Chinese))

[77] 谢 尊.基于含参变量变分法的随机结构静力响应的精确解法[D].武汉理工大学,2020.(XIE Zun. Accurate Solution of Static Response of Random Structures Based on Variational Method with Parametric Variables [D]. Wuhan University of Technology, 2020.(in Chinese))

[78] 彭海军,高 强,张洪武,等.输入受限LQ控制的参变量变分原理和算法[J].力学学报,2011,**43**(3):488-495.(PENG Hai-jun, GAO Qiang, ZHANG Hong-wu, et al, Parametric variational principle and numerical algorithm for LQ optimal control with constrained control input[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2011, **43**(3):488-495.(in Chinese))

Proposal, development and applications of parametric variational principle

WU Cheng-wei*

(State Key Laboratory of Structure Analysis, Optimization and CAE Software for Industrial Equipment, Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: The parametric variational principle and its parametric quadratic programming algorithm were first proposed by Academician ZHONG Wanxian in 1985 for the nonlinear boundary problem of elastic contact. After nearly 40 years of continuous development, the parametric variational principle has been successfully applied to various fields, including elastoplastic analysis, contact, mechanics lubrication mechanics, geotechnical mechanics, variable stiffness rod structure, advanced material performance analysis, creep and damage of materials, flexible structural mechanics, LQ optimal control and other engineering fields. This paper first reviews the origin of the parametric variational principle, introduces the basic concepts of parametric variational principle, then takes an elastoplastic analysis problem as an example to clarify how to establish the theoretical model of the parametric variational principle and realize its quadratic programming solution, and finally reviews in detail the basic theory of the parametric variational principle and the development and engineering application of corresponding numerical algorithms in various fields, showing the characteristics and advantages of the parametric variational principle in solving various nonlinear problems.

Key words: parametric variational principle; quadratic planning; nonlinear problem; elasto-plastic contact; variable stiffness structure

引用本文/Cite this paper:

吴承伟.参变量变分原理的提出、发展与应用[J].计算力学学报,2024,**41**(1):26-39.

WU Cheng-wei. Proposal, development and applications of parametric variational principle [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2024, **41**(1):26-39.