

DOI: 10.7511/jslx20231126001

精细积分方法的发展与扩展应用

姚伟岸*, 高强, 谭述君, 吴锋

(大连理工大学 力学与航空航天学院 工业装备结构分析优化与 CAE 软件全国重点实验室, 大连 116024)

摘要: 钟万勰院士于 1991 年首先提出计算矩阵指数的精细积分方法, 其要点是 2^N 类算法和增量存储。精细积分方法可给出矩阵指数在计算机意义上的精确解, 为常微分方程的数值计算提供了高精度、高稳定性的算法, 现已成功应用于结构动力响应、随机振动、热传导以及最优控制等众多领域。本文首先介绍矩阵指数精细积分方法的提出、基本思想和发展; 然后依次介绍在时不变/时变线性微分方程、非线性微分方程以及大规模问题求解中发展起来的各种精细积分方法, 分析了其优缺点和适用范围; 最后介绍了精细积分方法的基本思想在两点边值问题、椭圆函数和病态代数方程等问题的扩展应用, 进一步展示了该思想的特色。

关键词: 精细积分方法; 矩阵指数; 常微分方程; 时程积分

中图分类号: O241; O302

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2024)01-0002-24

1 引言

精细积分方法的基本思想由钟万勰院士 1991 年首次提出^[1], 并很快应用到结构动力初值问题的求解^[2]。随后, 结合计算结构力学与最优控制的模拟理论, 钟万勰院士将精细积分方法的思想推广到两点边值问题^[3], 并持续不断推进精细积分方法的研究工作^[4]。精细积分方法提出之后, 经过钟万勰院士众多弟子及不同领域学术同行的不断发展, 在非齐次方程精细模拟、时变动力问题、非线性动力问题、复杂大规模问题和特殊矩阵函数等基本理论和算法方面不断取得研究成果, 并已经拓展应用到随机动力响应分析、热传导分析、动力弹塑性硬化和软化问题、动态载荷识别、周期结构能带分析、最优控制问题、Floquet 转移矩阵计算、对称和非对称 Riccati 微分方程求解和 Maxwell 方程求解等众多领域。

精细积分方法是一种区别于传统差分类数值方法的全新的初值问题数值积分方法, 其突出特色体现在: (1) 数值积分过程中, 基于加法定理和 2^N 类算法, 通过仅计算和存储迭代过程中的增量, 将计算过程中的截断和舍入误差降低到计算机精度之外, 从而能够给出计算机浮点意义上的精确解, 并能在合理积分步长范围内不发生稳定性和刚性问题; (2) 精细积分方法不仅是显式格式, 并且是

无条件稳定的, 突破了差分类算法只有隐式格式才具有无条件稳定性的限制; (3) 精细积分方法具有零振幅衰减率、零周期扩散率和无超越性等优点。由于算法的优异性能, 能够获得远优于传统差分类算法的数值结果, 特别是在处理刚性问题时具有差分类算法无法比拟的稳定性和精度。

本文作者在跟随钟万勰院士读博士和后期工作期间, 有幸在钟先生的教诲和指导下从不同方面参与到精细积分方法的理论研究和应用工作, 并不断跟踪精细积分方法的发展情况^[5]。本文对精细积分方法的基本思想、深入发展和在各领域的应用做一系统综述。

2 精细积分方法的基本思想

考虑常微分方程矩阵-向量形式的一般性表达

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{v}(t) + \mathbf{f}, \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0 \quad (1)$$

式中 $\dot{\mathbf{v}}$ 为 \mathbf{v} 对时间 t 的微商, $\mathbf{v}(t)$ 为待求的 n 维向量函数, \mathbf{A} 为 $n \times n$ 系统矩阵, \mathbf{f} 为 n 维已知非齐次项向量函数, 而 \mathbf{v}_0 为初始 t_0 时刻 \mathbf{v} 的已知向量函数。值得说明的是, 式(1)是对常微分方程组的一般性描述, \mathbf{A} 可以是时不变矩阵、时变矩阵或与状态 \mathbf{v} 相关的矩阵; 同样 \mathbf{f} 也可以是时不变向量、时变向量或与状态 \mathbf{v} 相关的向量。

当系统矩阵 \mathbf{A} 和向量 \mathbf{f} 与状态 \mathbf{v} 不相关时, 按线性微分方程的求解理论^[6], 状态微分方程(1)的通解可以由状态传递矩阵和 Duhamel 积分表达为

$$\mathbf{v}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau \quad (2)$$

式中 $\Phi(t, \tau)$ 为状态传递矩阵, 且具有以下性质

收稿日期: 2023-11-26; 修改稿收到日期: 2023-12-12.

作者简介: 姚伟岸* (1963-), 男, 博士, 教授

(E-mail: ywa@dlut.edu.cn).

$$(1) \Phi(t, t) = \mathbf{I} \quad (3)$$

$$(2) \Phi(t, t_1) = \Phi(t, t_2) \Phi(t_2, t_1) \quad (4)$$

$$(3) \text{ 满足微分方程 } \dot{\Phi}(t, t_1) = \mathbf{A}(t) \Phi(t, t_1) \quad (5)$$

式中用 $\mathbf{A}(t)$ 描述表明这对于时变系统也适用。

式(2)表明,状态传递矩阵 Φ 是求解线性微分方程的关键。对于时不变系统, \mathbf{A} 为常数矩阵时,状态传递矩阵仅与区段长度有关,即

$$\Phi(t, t_1) = \Phi(t - t_1) = e^{\mathbf{A}(t-t_1)} \quad (6)$$

式中 矩阵指数

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{(\mathbf{A}t)^2}{2} + \frac{(\mathbf{A}t)^3}{3!} + \dots \quad (7)$$

虽然从数学上,矩阵指数可采用本征向量展开方法给出,但在实际数值计算中并不是十分有效,尤其出现或接近出现 Jordan 型本征解时。关于矩阵指数已经提出了很多计算方法,但仍不够理想。文献[7]给出了 19 种可疑的算法,且 25 年后再予以回顾^[8],指出问题并未完全解决。

2.1 精细积分方法的提出

钟万勰院士研究连续时间 LQ 控制本征对求解时,针对其核心问题即矩阵指数的计算,首次提出了精细积分方法^[1],并达到计算机意义上的精确解。本小节综合文献[1,2,9]的论述,介绍精细积分方法的基本思想。

首先将基本区段 η 对应的矩阵指数记为

$$\mathbf{T} = e^{\mathbf{A}\eta} \quad (8)$$

根据矩阵指数的加法定理可给出

$$e^{\mathbf{A}\eta} \equiv (e^{\mathbf{A}\eta/m})^m \quad (9)$$

式中 $m = 2^N$, 而 N 为任意正整数,如可选 $N = 20$, 则 $m = 1048576$ 。亦称为 2^N 类算法。

由于 η 本来是不大的时间区段,则 $\tau = \eta/m$ 是非常小的时间区段。根据式(7),对 τ 区段,矩阵指数可采用 Taylor 级数展开进行 q 阶近似,即有

$$e^{\mathbf{A}\tau} \approx \mathbf{I} + \mathbf{A}\tau + (\mathbf{A}\tau)^2/2 + \dots + (\mathbf{A}\tau)^q/q! = \mathbf{I} + \mathbf{T}_a \quad (10)$$

式中 \mathbf{T}_a 阵是一个小量的矩阵,为

$$\mathbf{T}_a = \mathbf{A}\tau + (\mathbf{A}\tau)^2/2 + \dots + (\mathbf{A}\tau)^q/q! \quad (11)$$

计算中至关重要的一点是矩阵指数的存储只能是增量 \mathbf{T}_a , 而不是 $(\mathbf{I} + \mathbf{T}_a)$ 。因为 \mathbf{T}_a 很小,当其与矩阵 \mathbf{I} 相加时,就会成为其尾数,在计算机的舍入操作中,其精度将丧失殆尽。为了提高计算 \mathbf{T} 阵的效率,运用 2^N 类算法先将式(9)作分解

$$\mathbf{T} = (\mathbf{I} + \mathbf{T}_a)^{2^N} = (\mathbf{I} + \mathbf{T}_a)^{2^{(N-1)}} (\mathbf{I} + \mathbf{T}_a)^{2^{(N-1)}} \quad (12)$$

这种分解一直做下去,共 N 次。

其次应注意,对任意矩阵 \mathbf{T}_b 和 \mathbf{T}_c 有

$$(\mathbf{I} + \mathbf{T}_b)(\mathbf{I} + \mathbf{T}_c) \equiv \mathbf{I} + \mathbf{T}_b + \mathbf{T}_c + \mathbf{T}_b\mathbf{T}_c \quad (13)$$

当 \mathbf{T}_b 和 \mathbf{T}_c 很小时,不应加上 \mathbf{I} 之后再执行乘法。因此式(12)的 N 次乘法相当于

$$\text{for (iter=0; iter < N; iter++) } \mathbf{T}_a = 2\mathbf{T}_a + \mathbf{T}_a^2 \quad (14)$$

当以上语句循环结束后,再执行 η 区段的增量相加

$$\mathbf{T} = \mathbf{I} + \mathbf{T}_a \quad (15)$$

由于 N 次乘法后, \mathbf{T}_a 已不再是很小的矩阵,这个加法已没有严重的舍入误差。

以上是矩阵指数计算的精细积分方法的思想。文献[1]指出,精细积分有两个要点,(1) 运用矩阵指数的加法定理,即 2^N 类算法;(2) 注意力放在增量上,而不是其全量。

2.2 基于 Padé 级数近似的精细积分方法

精细积分方法的高精度在于对区段 η 的精细划分以及对精细区段增量 \mathbf{T}_a 的近似。因此,如能提高增量计算的精度,将会进一步提高矩阵指数计算的精度。一般情况下,Padé 级数逼近比 Taylor 级数逼近具有更好的效果^[8]。因此,学者们进一步提出了基于 Padé 级数近似的矩阵指数精细积分方法^[10,11]。

根据 Padé 级数逼近理论,精细区段 $\tau = \eta/2^N$ 的矩阵指数 $e^{\mathbf{A}\tau}$ 的 (p, q) 阶 Padé 近似为

$$\mathbf{R}_{pq}(\mathbf{A}\tau) = [\mathbf{D}_{pq}(\mathbf{A}\tau)]^{-1} \mathbf{N}_{pq}(\mathbf{A}\tau) \quad (16)$$

式中

$$\mathbf{N}_{pq}(\mathbf{A}\tau) = \sum_{j=0}^p \frac{(p+q-j)! p!}{(p+q)! j! (p-j)!} (\mathbf{A}\tau)^j \quad (17)$$

$$\mathbf{D}_{pq}(\mathbf{A}\tau) = \sum_{j=0}^q \frac{(p+q-j)! q!}{(p+q)! j! (q-j)!} (-\mathbf{A}\tau)^j \quad (18)$$

显然,当 $q=0$ 时, $\mathbf{R}_{p0}(\mathbf{A}\tau)$ 是 $e^{\mathbf{A}\tau}$ 的 p 阶 Taylor 近似,即 Taylor 近似是 Padé 近似的特例。在实际应用中通常令 $p=q$, 即 q 阶对角 Padé 近似。下面介绍的 Padé 近似均表示对角 Padé 近似。

参照精细积分方法,将精细区段矩阵指数的 q 阶 Padé 近似的增量分离出来表示为

$$\mathbf{R}_{qq}(\mathbf{A}\tau) = \mathbf{I} + \mathbf{R}_a \quad (19)$$

同样 $\mathbf{N}_{qq}(\mathbf{A}\tau)$ 和 $\mathbf{D}_{qq}(\mathbf{A}\tau)$ 的增量也分离出来

$$\mathbf{N}_{qq}(\mathbf{A}\tau) = \mathbf{I} + \mathbf{N}_a, \quad \mathbf{D}_{qq}(\mathbf{A}\tau) = \mathbf{I} + \mathbf{D}_a \quad (20)$$

式中

$$\begin{cases} \mathbf{N}_a = \sum_{j=1}^q \frac{(2q-j)! q!}{(2q)! j! (q-j)!} (\mathbf{A}\tau)^j \\ \mathbf{D}_a = \sum_{j=1}^q \frac{(2q-j)! q!}{(2q)! j! (q-j)!} (-\mathbf{A}\tau)^j \end{cases} \quad (21)$$

将式(19,20)代入式(16),可以导出

$$\mathbf{R}_a = (\mathbf{I} + \mathbf{D}_a)^{-1} (\mathbf{N}_a - \mathbf{D}_a) \quad (22)$$

获得了 Padé 近似的增量部分 \mathbf{R}_a 后,再采用与 2.1 节相同的方法,结合矩阵指数加法定理,并在执行过程中只存储和计算增量部分,就得到了基于

Padé 级数近似的矩阵指数精细积分方法。

由于在精细区段 τ 上采用了精度更高的 Padé 级数近似,因此在选择相同参数 (N, q) 的情况下,基于 Padé 级数近似的精细积分方法比基于 Taylor 级数近似的精细积分方法计算精度更高和稳定性更好。但是 Padé 级数增量部分 \mathbf{R}_n 涉及矩阵求逆,这一定程度上影响了其计算效率,尤其是矩阵维数较大时。进一步需要指出的是,如矩阵 \mathbf{A} 是 Hamilton 矩阵,则其对应的矩阵指数是辛矩阵。此情况可以证明基于 Padé 近似的精细积分方法给出的矩阵指数是辛矩阵,因此是保辛算法^[11,12]。

2.3 误差分析与算法设计

无论是基于 Taylor 级数近似还是基于 Padé 级数近似的精细积分方法,其精细区段划分系数 N 和截断项数 q 的选择直接影响到矩阵指数数值逼近的精度,也直接影响到计算效率。文献[13, 14]分析了基于 Taylor 级数逼近的精细积分方法的误差估计,并给出了 (N, q) 选择的经验及一些建议。文献[10]研究了当展开项数 $q = 4$ 时,系数 N 的选择,而文献[15]则分析了 Hamilton 矩阵指数采用一阶和二阶甚至任意阶 Padé 级数近似的误差估计等。上面对 (N, q) 的选择是在给定级数截断项数 q (主要凭经验)的情况下,选择系数 N 以保证其计算精度,但这样得到的 (N, q) 组合不能保证其计算量最小。

文献[16]进一步基于误差分析理论,推导出给定精度下采用 Padé 级数逼近时参数 (N, q) 满足的条件。考虑到矩阵指数精细积分方法的计算量主要为 $(N + q - 1)$ 次矩阵乘法,因此可将参数 (N, q) 的选择描述为下面优化问题的求解

$$\begin{cases} \min_{N, q} J = N + q \\ \text{s.t. } \epsilon(N, q) \|\mathbf{A}\eta\|_{\infty} \leq \text{EPS} \end{cases} \quad (23)$$

式中 EPS 为指定精度

$$\epsilon(N, q) = 8 \left(\frac{\|\mathbf{A}\eta\|_{\infty}}{2^N} \right)^{2q} \cdot \frac{(q!)^2}{(2q)!(2q+1)!} \quad (24)$$

进一步,文献[16]基于该误差函数分析了 N 和 q 的增加对相对误差降低速度的影响,导出了在给定精度 EPS 时参数 (N, q) 优化组合的自适应选择算法和计算流程,此处不再赘述。

3 时不变线性微分方程的精细积分方法

许多问题的数学模型都可采用时不变线性微分方程组来描述,即在一般性描述式(1)中, \mathbf{A} 是

时不变矩阵,且 \mathbf{f} 与状态 \mathbf{v} 不相关,表示为

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{v}(t) + \mathbf{f}(t), \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0 \quad (25)$$

常微分方程的数值求解通常采用逐步积分法,对于一系列等时间区段 η 划分的时刻

$$t_k = t_0 + k\eta \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (26)$$

在区段 $[t_k, t_{k+1}]$ 上利用 Duhamel 积分式(2),得到时不变线性微分方程式(25)的离散递推列式为

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{T}\mathbf{v}_k + \int_0^{\eta} e^{\mathbf{A}(\eta-\tau)} \mathbf{f}(t_k + \tau) d\tau \quad (27)$$

式中

$$\mathbf{T} = e^{\mathbf{A}\eta} \quad (28)$$

对于等区段 η 划分的时间步长,式(27,28)给出了式(25)基于矩阵指数的逐步递推积分列式。可以看出,时不变线性微分方程数值求解的核心:一是矩阵指数的计算,二是非齐次项引起的 Duhamel 积分的处理。矩阵指数的计算已经由精细积分方法给出,下面要讨论的是 Duhamel 积分的处理方法,其求解方法也非常丰富。

3.1 解析积分方法

钟万勰首先在文献[2]中给出了当非齐次项 \mathbf{f} 在区段 $[t_k, t_{k+1}]$ 为线性函数或采用线性近似时的解析积分格式。随后,林家浩等^[17,18]通过引入特解 $\mathbf{v}_p(t)$ 将式(27)表示为

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{T}[\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_p(t_k)] + \mathbf{v}_p(t_{k+1}) \quad (29)$$

并进一步导出了在时间区段 $[t_k, t_{k+1}]$ 内非齐次项 $\mathbf{f}(t)$ 为多项式、指数函数、三角函数及其组合函数时对应的特解 $\mathbf{v}_p(t)$ 的解析格式,介绍如下。

(1) 当非齐次项 $\mathbf{f}(t)$ 为线性函数,即

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1 \cdot (t - t_k) \quad (30)$$

其对应的特解为

$$\mathbf{v}_p(t) = (\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{I} \cdot t)(-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}_1) - \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{f}_0 - \mathbf{f}_1 \cdot t_k) \quad (31)$$

将式(31)代入式(29),进行整理即得到如下解析积分格式

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{T}[\mathbf{v}_k + \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{f}_0 + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}_1)] - \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{f}_0 + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}_1 + \eta\mathbf{f}_1) \quad (32)$$

(2) 当非齐次项 $\mathbf{f}(t)$ 为三角函数,即

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_1 \sin(\omega t) + \mathbf{f}_2 \cos(\omega t) \quad (33)$$

其对应的特解为

$$\mathbf{v}_p(t) = \mathbf{a} \sin(\omega t) + \mathbf{b} \cos(\omega t) \quad (34)$$

式中

$$\begin{cases} \mathbf{a} = (\omega^2 \mathbf{I} + \mathbf{A}^2)^{-1}(\omega \mathbf{f}_2 - \mathbf{A} \mathbf{f}_1) \\ \mathbf{b} = (\omega^2 \mathbf{I} + \mathbf{A}^2)^{-1}(-\omega \mathbf{f}_1 - \mathbf{A} \mathbf{f}_2) \end{cases} \quad (35)$$

(3) 当 $\mathbf{f}(t)$ 为多项式与三角函数的组合,即

$$\mathbf{f}(t) = (\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1 \cdot t + \mathbf{f}_2 \cdot t^2) \times [\alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t)] \quad (36)$$

其对应的特解为

$$\mathbf{v}_p(t) = (\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \cdot t + \mathbf{a}_2 \cdot t^2) \sin(\omega t) + (\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 \cdot t + \mathbf{b}_2 \cdot t^2) \cos(\omega t) \quad (37)$$

式中

$$\begin{cases} \mathbf{a}_i = (\omega^2 \mathbf{I} + \mathbf{A}^2)^{-1} (\omega \mathbf{p}_{ia} - \mathbf{A} \mathbf{p}_{ib}) \\ \mathbf{b}_i = (\omega^2 \mathbf{I} + \mathbf{A}^2)^{-1} (-\omega \mathbf{p}_{ia} - \mathbf{A} \mathbf{p}_{ib}) \end{cases} \quad (i = 2, 1, 0) \quad (38)$$

$$\begin{cases} \mathbf{p}_{2a} = \alpha \mathbf{f}_2, \mathbf{p}_{2b} = \beta \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{p}_{1a} = \alpha \mathbf{f}_1 - 2\mathbf{a}_2, \mathbf{p}_{1b} = \beta \mathbf{f}_1 - 2\mathbf{b}_2 \\ \mathbf{p}_{0a} = \alpha \mathbf{f}_0 - \mathbf{a}_1, \mathbf{p}_{0b} = \beta \mathbf{f}_0 - \mathbf{b}_1 \end{cases} \quad (39)$$

(4) 当 $\mathbf{f}(t)$ 为指数与三角函数的组合,即

$$\mathbf{f}(t) = e^{\alpha t} [\mathbf{f}_1 \sin(\omega t) + \mathbf{f}_2 \cos(\omega t)] \quad (40)$$

其对应的特解为

$$\mathbf{v}_p(t) = e^{\alpha t} [\mathbf{a} \sin(\omega t) + \mathbf{b} \cos(\omega t)] \quad (41)$$

式中

$$\begin{cases} \mathbf{a} = [\omega^2 \mathbf{I} + (\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A})^2]^{-1} [\omega \mathbf{f}_2 + (\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{f}_1] \\ \mathbf{b} = [\omega^2 \mathbf{I} + (\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A})^2]^{-1} [-\omega \mathbf{f}_1 + (\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{f}_2] \end{cases} \quad (42)$$

以上 $\alpha, \beta, \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1$ 和 \mathbf{b}_2 等在时间区段 $[t_k, t_{k+1}]$ 内均为常量。

当非齐次项具有上述函数形式时,解析积分格式本身没有任何近似。对于一般形式的非齐次项,也可在时间区段 $[t_k, t_{k+1}]$ 内用上述函数进行近似,由于递推列式简单,得到了广泛应用。

值得指出的是,上述解析积分格式中含有矩阵的逆 \mathbf{A}^{-1} 或 $(\omega^2 \mathbf{I} + \mathbf{A}^2)^{-1}$, 而求逆运算容易引起数值困难,特别是当矩阵奇异或接近奇异时。对此,文献[19]指出对于奇异矩阵可先利用奇异值分解得到正交矩阵,再采用精细积分方法求解。文献[20]进一步针对奇异 Hamilton 系统矩阵,利用 Hamilton 系统的共轭辛正交归一关系将零本征值对应子空间分离出来,再采用精细积分法求解。

此外,发展避免求逆的一般性算法也得到了学者们的关注,归纳起来主要有以下三类。

3.2 直接数值积分方法

为避免矩阵求逆运算导致的数值困难,许多学者将式(27)的 Duhamel 积分看作普通函数的积分,记

$$\int_0^\eta e^{\mathbf{A}(\eta-\tau)} \mathbf{f}(t_k + \tau) d\tau = \int_0^\eta \mathbf{g}(\tau) d\tau \quad (43)$$

并分别采用常用的 Simpson, Romberg, Cotes 和 Gauss 等数值积分技术进行计算,然后与矩阵指数的精细积分相结合,构造式(27)的离散递推列式。

以采用 Gauss 数值积分为例^[21,22],式(43)的数值积分如下

$$\int_0^\eta \mathbf{g}(\tau) d\tau \approx \frac{\eta}{2} \sum_{i=1}^{N_g} \omega_i \mathbf{g} \left[(1 + \tau_i) \frac{\eta}{2} \right] \quad (44)$$

式中 N_g 为积分点的个数, τ_i 为 Gauss 积分点的坐标, ω_i 是加权系数。将式(44)代入式(27)得到离散递推列式为

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{T}(\eta) \mathbf{v}_k + \frac{\eta}{2} \sum_{i=1}^{N_g} \omega_i \mathbf{T} \left[\frac{\eta}{2} (1 - \tau_i) \right] \times \mathbf{f} \left[t_k + \frac{\eta}{2} (1 + \tau_i) \right] \quad (45)$$

式中

$$\mathbf{T} \left[\frac{\eta}{2} (1 - \tau_i) \right] = e^{\mathbf{A} \frac{\eta}{2} (1 - \tau_i)} \quad (46)$$

显然,方程(45)的精度取决于 Gauss 积分点的个数 N_g 和时间步长 η 的大小。

文献[23]比较了多种直接数值积分的精度,指出 Cotes 和 Gauss 积分是保持精细积分算法高精度的较好方法,文献[14, 24]则进一步指出采用 Padé 逼近为基础的矩阵指数精细方法是无条件稳定的计算格式,可给出更高的精度。

通过直接数值积分与矩阵指数的精细积分方法相结合来构造求解列式,不需要矩阵求逆运算,也无需对非齐次项进行数学拟合,具有很好的通用性。微分方程式(27)的求解精度主要取决于 Duhamel 数值积分的精度。同时,式(46)表明还需计算积分点上的矩阵指数,增加了计算量。但这类方法没有充分利用 Duhamel 积分函数中矩阵指数的特殊性。

3.3 增维精细积分方法

文献[25]首先将增维技术应用于非齐次微分方程的精细积分求解算法的构造,指出如果非齐次项 \mathbf{f} 为一组齐次线性常微分方程组的解,记为

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{D} \mathbf{f} \quad (47)$$

那么,通过构造扩展状态变量 $\tilde{\mathbf{v}} = [\mathbf{v}^T, \mathbf{f}^T]^T$, 式(47)与原状态方程式(25)就可以组合成下面一组维数更高的齐次线性常微分方程组

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}} = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{v}} \quad (48)$$

式中

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (49)$$

增维齐次方程(48)与原非齐次方程(25)是完全等价的,可直接采用矩阵指数的精细积分方法求解。

需要说明的是,增维齐次化显著增加了系统的维度,直接计算增维后的矩阵指数的计算量是相当大的,但可以利用增维系统矩阵的结构来降低一定的计算量。如增维系统矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 是上三角阵, $\tilde{\mathbf{T}}$ 也

必然是上三角阵,利用此特性在计算上可作相应的简化。进一步,增维精细积分方法中矩阵 \mathbf{D} 的确定依赖具体的非齐次项,代表非齐次项所满足的常微分方程组的关系,往往具有特殊的结构。文献[25]讨论了对非齐次项分别做常数化、线性化和正弦/余弦化的处理来减少计算量的方法。

文献[26]还提出了基于 Taylor 级数的增维精细积分方法(也称为齐次扩容精细积分方法)。首先在时间区段 $[t_k, t_{k+1}]$ 内将非齐次项 f 进行 Taylor 级数展开,即设

$$f(t) = f_m \cdot t^m + f_{m-1} \cdot t^{m-1} + \dots + f_1 \cdot t + f_0 \quad (50)$$

然后引入扩展状态变量

$$\tilde{\mathbf{v}} = [\mathbf{v}^T, t^m, t^{m-1}, \dots, t, 1]^T \quad (51)$$

则相应的增维矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 为

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & f_m & f_{m-1} & \dots & f_1 & f_0 \\ 0 & 0 & m & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m-1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (52)$$

该方法得到的阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 也是上三角型,增加的维数 $m+1$ 由 Taylor 级数展开项数决定。如积分区间很大,必须采用高阶 Taylor 级数才能较好地逼近非齐次项,这会大大增加系统矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的规模,同时也会面临 Taylor 级数的收敛性问题。文献[27]采用分段低次 Taylor 级数来近似非齐次项,减小了 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的规模,但每个区段都要做一次矩阵指数的精细积分计算,也会增加计算量。文献[28]则进一步分析了 $\tilde{\mathbf{A}}$ 矩阵的结构,利用增维矩阵中零元素较多的特点,将增维矩阵的乘法运算转换为小规模非零分块矩阵的乘法运算,可在一定程度上提高计算效率。

此外,文献[29]还给出了非齐次项为正/余弦函数形式的增维方法,记非齐次项为

$$f(t) = \mathbf{a} \cos(\omega t) + \mathbf{b} \sin(\omega t) \quad (53)$$

式中 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 为不依赖时间的向量。引入扩展状态变量

$$\tilde{\mathbf{v}} = [\mathbf{v}^T, z_1, z_2]^T \quad (54)$$

则相应的增维矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 为

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0 & \omega & 0 \end{bmatrix} \quad (55)$$

而扩展状态变量初始条件为 $\tilde{\mathbf{v}}(0) = [\mathbf{v}(0)^T, 1, 0]^T$ 。

利用类似的思想,可以 Legendre, Chebyshev, Hermite 和 Laguerre 等正交多项式函数系^[30,31]来构造增维矩阵,并且文献[31]还指出基于 Legendre

函数系构造齐次方程具有更高的精度和收敛性。

增维精细积分方法将非齐次方程转化为齐次方程,在实施精细积分的过程中不必进行矩阵求逆运算,同时保留了精细积分的高精度,其代价是增加了矩阵指数的计算量。

3.4 扩展精细积分方法

实际上,利用 Duhamel 积分中矩阵指数的特点,可以构造出与解析积分格式一样高效和精确的递推算法,而且不需要矩阵求逆运算。即文献[32]提出的扩展精细积分方法。

离散递推列式(27)表明,其关键在于第二项 Duhamel 积分项的计算。首先,为了充分利用非齐次项本身的特点降低计算量,将非齐次项 $f(t)$ 写为

$$f(t) = \mathbf{B} f_s(t) \quad (56)$$

式中 常系数矩阵 \mathbf{B} 反映了非齐次项 $f(t)$ 的特点,例如结构动力学方程中作动力/干扰力的位置矩阵。由于 $f_s(t)$ 的维数小于 $f(t)$ 的维数,从而降低下面基函数响应矩阵的维数,提高计算效率。

将式(56)代入式(27),Duhamel 积分项描述为

$$\mathbf{v}_{p,k} = \int_0^\eta e^{\mathbf{A}(\eta-\tau)} \mathbf{B} f_s(t_k + \tau) d\tau \quad (57)$$

在区段 $[t_k, t_{k+1}]$ 内 $f_s(t)$ 采用特定基函数逼近为

$$f_s(t) = f_s(t_k + \tau) = \tilde{f}_{0,k} \phi_0(\tau) + \tilde{f}_{1,k} \phi_1(\tau) + \dots \quad (\tau \in [0, \eta]) \quad (58)$$

式中 $\phi_0(\tau), \phi_1(\tau), \dots$ 为基函数, $\tilde{f}_{0,k}, \tilde{f}_{1,k}, \dots$ 为对应的逼近系数。那么,区段 $[t_k, t_{k+1}]$ 的 Duhamel 积分项可以表示为

$$\mathbf{v}_{p,k} = \mathbf{R}_0(\eta) \tilde{f}_{0,k} + \mathbf{R}_1(\eta) \tilde{f}_{1,k} + \dots \quad (59)$$

式中 $\mathbf{R}_0(\eta), \mathbf{R}_1(\eta), \dots$ 分别为基函数 $\phi_0(\tau), \phi_1(\tau), \dots$ 的响应矩阵,定义如下

$$\begin{cases} \mathbf{R}_0(\eta) = \int_0^\eta \phi_0(\tau) e^{\mathbf{A}(\eta-\tau)} d\tau \cdot \mathbf{B} \\ \mathbf{R}_1(\eta) = \int_0^\eta \phi_1(\tau) e^{\mathbf{A}(\eta-\tau)} d\tau \cdot \mathbf{B} \\ \dots \end{cases} \quad (60)$$

显然,基函数响应矩阵仅与矩阵 \mathbf{A} 的矩阵指数、基函数和区段长度有关,体现了非齐次项在基函数模式下的响应特征。对于时不变系统,等长区段划分的基函数的响应矩阵只需计算一次。

将式(57,59)代入(27),即得到基于响应矩阵的精细积分递推公式为

$$\mathbf{v}_{k+1} = \Phi(\eta) \mathbf{v}_k + \mathbf{R}_0(\eta) \tilde{f}_{0,k} + \mathbf{R}_1(\eta) \tilde{f}_{1,k} + \dots \quad (61)$$

式中 $\Phi(\eta) = e^{\mathbf{A}\eta}$ 。因此,核心问题是矩阵指数和基函数响应矩阵的精确计算。

利用基函数响应矩阵表达式中含有矩阵指数

的性质,文献[32]也导出了基函数为多项式函数、指数函数、正/余弦函数及其组合函数形式时响应矩阵的加法定理,同时给出了基函数响应矩阵的精细积分方法,因此称之为扩展精细积分方法。

与解析积分方法相比,扩展精细积分方法可同样给出非齐次项为多项式函数、指数函数、正/余弦函数及组合函数形式时的精确解。更具优势的是,扩展精细积分方法不需要对矩阵求逆,具有更好的数值稳定性和更广泛的适用性,对进一步构造非线性微分方程数值算法非常有意义^[33,34]。

4 时变线性微分方程的精细积分方法

所谓时变线性微分方程组,就是常微分方程组的一般性描述式(1)的系统矩阵 \mathbf{A} 随时间变化,记为 $\mathbf{A}(t)$,且 \mathbf{f} 与状态 \mathbf{v} 不相关,表示为

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{v}(t) + \mathbf{f}(t), \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0 \quad (62)$$

此时利用状态传递矩阵和 Duhamel 积分表述的通解式(2)仍然成立,状态传递矩阵也仍然满足式(3~5)。在区段 $[t_k, t_{k+1}]$ 上,递推式表达为

$$\mathbf{v}_{k+1} = \Phi(t_{k+1}, t_k)\mathbf{v}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau \quad (63)$$

式中 时变系统状态传递矩阵 $\Phi(t_{k+1}, t_k)$ 不再只是区段长度 η 的函数,加法定理也不存在,这大大增加了时变系统状态传递矩阵和微分方程求解的困难。

本节主要讲述以精细积分方法为基础求解齐次时变系统对应的状态传递矩阵的计算方法,而非齐次线性时变微分方程的求解与非线性微分方程的求解类似,将在下节介绍。

式(62)对应的齐次时变线性动力系统表示为

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{v}, \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0 \quad (64)$$

在区段 $[t_k, t_{k+1}]$ 上,方程解的递推式表达为

$$\mathbf{v}_{k+1} = \Phi(t_{k+1}, t_k)\mathbf{v}_k \quad (65)$$

4.1 常值近似法

对于时变系统,一个自然想法就是将时变系统 $\mathbf{A}(t)$ 在区段 $[t_k, t_{k+1}]$ 上对应的状态传递矩阵 $\Phi(t_k + \eta, t_k)$ 的计算转化为定常系统 $\bar{\mathbf{A}}_k$ 的矩阵指数的计算,即有

$$\Phi(t_k + \eta, t_k) \approx e^{\bar{\mathbf{A}}_k \eta} \quad (66)$$

余下关键是 $\bar{\mathbf{A}}_k$ 的选择方法。文献[35]指出, Magnus 级数展开具有李群结构,利用其积分序列不同阶次的截断可得到时变状态传递矩阵的不同的近似,如基于 Magnus 级数展开的 4 阶近似为

$$\begin{cases} t_1 = t_k + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\eta \\ t_2 = t_k + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\eta \\ \bar{\mathbf{A}}_k = \frac{\mathbf{A}(t_1) + \mathbf{A}(t_2)}{2} - \frac{\sqrt{3}\eta}{12} [\mathbf{A}(t_1), \mathbf{A}(t_2)] \end{cases} \quad (67)$$

式中 定义李括号运算为

$$[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2] \triangleq \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 \quad (68)$$

文献[36]给出另一种 4 阶 Magnus 级数近似结果

$$\begin{cases} t_1 = t_k + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\eta \\ t_2 = t_k + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\eta \\ \bar{\mathbf{A}}_k = \frac{\mathbf{A}(t_1) + \mathbf{A}(t_2)}{2} + \frac{\sqrt{3}\eta}{12} [\mathbf{A}(t_1), \mathbf{A}(t_2)] + \frac{\eta^2}{80} [\mathbf{A}(t_2) - \mathbf{A}(t_1), [\mathbf{A}(t_2), \mathbf{A}(t_1)]] \end{cases} \quad (69)$$

误差理论分析表明,该方法的精度仅依赖于 Magnus 级数截断的阶次和区段长度。常值近似也是后面乘法摄动的基础。

4.2 乘法摄动法

时变系统虽不能完全采用精细积分方法,但可采用摄动法进行求解,并且将定常系统的精细积分作为摄动的基础。钟万勰等^[37]首先提出了时变 Hamilton 系统的矩阵指数计算的保辛乘法摄动的思想,随后谭述君等^[38]进一步将其应用于变系数 Riccati 方程的保辛摄动近似求解。在此基础上,富明慧等^[39]将乘法摄动思想做了进一步推广,提出了一种高阶乘法摄动方法,将时变系统状态传递矩阵转换为一系列矩阵指数的乘积,并可采用精细积分方法精确计算。

对齐次时变系统(64),取区段 $[t_k, t_{k+1}]$ 上的一点 t_c ,将时变矩阵 $\mathbf{A}(t)$ 分解为定常和时变两部分,即

$$\mathbf{A}(t) = \bar{\mathbf{A}}_0 + (t - t_c)\tilde{\mathbf{A}}_0(t) \quad (70)$$

式中 $\bar{\mathbf{A}}_0 = \mathbf{A}(t_c)$ 为零阶近似的定常矩阵, $\tilde{\mathbf{A}}_0(t)$ 为时变的小量矩阵。对原状态进行变换,令

$$\mathbf{v}(t) = e^{\bar{\mathbf{A}}_0(t-t_c)}\mathbf{v}_1(t) \quad (71)$$

将式(71)代入式(64)可得到一阶乘法摄动系统,即

$$\dot{\mathbf{v}}_1 = (t - t_c)\mathbf{A}_1(t)\mathbf{v}_1 \quad (72)$$

式中

$$\mathbf{A}_1(t) = e^{-\bar{\mathbf{A}}_0(t-t_c)}\tilde{\mathbf{A}}_0(t)e^{\bar{\mathbf{A}}_0(t-t_c)} \quad (73)$$

这样原系统(64)就转化为一阶摄动系统(72),其系数矩阵为关于 $(t - t_c)$ 的一阶小量。可以看出,当 $t_c = t_k$ 时,式(73)即为文献[38]提出的乘法摄动。

依次类推,继续进行摄动。设摄动的最终次数为 M , 其状态变换如下

$$\mathbf{v}_{M-1}(t) = e^{\frac{1}{M}\bar{\mathbf{A}}_{M-1}(t-t_c)^M} \mathbf{v}_M(t) \quad (74)$$

相应的第 M 阶乘法摄动系统为

$$\dot{\mathbf{v}}_M = (t-t_c)^M \mathbf{A}_M(t) \mathbf{v}_M \quad (75)$$

式中

$$\mathbf{A}_M(t) = e^{-\frac{1}{M}\bar{\mathbf{A}}_{M-1}(t-t_c)^M} \tilde{\mathbf{A}}_{M-1}(t) e^{\frac{1}{M}\bar{\mathbf{A}}_{M-1}(t-t_c)^M} \quad (76)$$

将 $\mathbf{A}_M(t)$ 分解为

$$\mathbf{A}_M(t) = \bar{\mathbf{A}}_M + (t-t_c)\tilde{\mathbf{A}}_M(t) \quad (77)$$

式中 $\bar{\mathbf{A}}_M = \mathbf{A}_M(t_c)$, $\tilde{\mathbf{A}}_M(t) = [\mathbf{A}_M(t) - \bar{\mathbf{A}}_M]/(t-t_c)$ 。第 M 阶摄动系统已为小量, 可以只保留常数矩阵 $\bar{\mathbf{A}}_M$ 来近似。因此得到由一系列矩阵指数相乘构成的区段 $[t_k, t_{k+1}]$ 传递矩阵,

$$\Phi(t_{k+1}, t_k) = \mathbf{T}_M(\beta) \mathbf{T}_M^{-1}(-\alpha) \quad (78)$$

式中 $\alpha = t_c - t_k$, $\beta = t_{k+1} - t_c$

$$\mathbf{T}_M(t) = e^{\bar{\mathbf{A}}_0 t} e^{\frac{1}{2}\bar{\mathbf{A}}_1 t^2} \dots e^{\frac{1}{M}\bar{\mathbf{A}}_{M-1} t^M} e^{\frac{1}{M+1}\bar{\mathbf{A}}_M t^{M+1}} \quad (79)$$

文献[39]还讨论了 $t_c = t_k$, $t_c = t_{k+1}$ 和 $t_c = (t_k + t_{k+1})/2$ 时 $\Phi(t_{k+1}, t_k)$ 的精度和计算量, 指出 $t_c = (t_k + t_{k+1})/2$ 时算法性价比最高。

值得指出的是, 如果系统矩阵 $\mathbf{A}(t)$ 是 Hamilton 矩阵, 那么摄动后的系统仍然是 Hamilton 系统, 因此该方法成为一种高阶保辛摄动方法, 这对于 Hamilton 系统求解的保辛要求是非常重要的。

4.3 周期变系数系统

周期变系数系统是一般时变线性系统的特例, 即式(64)的时变系统矩阵具有周期时变特性

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t+T) \quad (80)$$

式中 T 是周期的大小。

根据 Floquet-Lyapunov 理论, 周期时变系统的稳定性由 Floquet 转移矩阵特征值的实部决定。Floquet 转移矩阵是状态传递矩阵在一个周期端部的值, 参照式(2)的描述, 记为 $\Phi(t_0 + T, t_0)$ 。Floquet 转移矩阵的计算, 以往主要有两类方法, 一类是 Hsu^[40] 提出的一系列将矩形波方法推广于多维系统的近似方法; 另一类是各种直接数值积分方法, 其中, 四阶预估-校正 Hamming 法最为有效^[41]。利用系数周期性变化的特点, 文献[42]将解析精细积分方法应用于 Floquet 转移矩阵的计算。然而该方法需要逆运算, 难以处理奇异或接近奇异矩阵情况, 对此文献[43]建立了相应的扩展精细积分方法。

根据周期函数的 Fourier 级数展开式, 式(80)描述的周期函数 $\mathbf{A}(t)$ 可采用 s 阶 Fourier 级数近似

$$\mathbf{A}(t) \approx \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^s (\sin(\omega_i t) \mathbf{D}_i + \cos(\omega_i t) \mathbf{B}_i) \quad (81)$$

式中 $\omega_i = i2\pi/T$, 而 \mathbf{A}_0 与 $\mathbf{D}_i, \mathbf{B}_i (i=1, 2, \dots, s)$ 均为常数矩阵。将式(81)代入式(64), 得到

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{A}_0 \mathbf{v} + \mathbf{f}(\mathbf{v}, t) \quad (82)$$

式中

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}, t) = \left[\sum_{i=1}^s (\sin(\omega_i t) \mathbf{D}_i + \cos(\omega_i t) \mathbf{B}_i) \right] \mathbf{v} \quad (83)$$

将一个周期 $[t_0, t_0 + T]$ 的时间长度均匀划分为 M 份, 一系列等间距时刻为

$$t_k = t_0 + k\eta \quad (k=0, 1, 2, \dots, M) \quad (84)$$

在区段 $[t_k, t_{k+1}]$ 内对 $\mathbf{v}(t)$ 采用 p 阶多项式近似

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_k + \tau) \simeq \tilde{\mathbf{v}}_{0,k} + \tau \tilde{\mathbf{v}}_{1,k} + \tau^2 \tilde{\mathbf{v}}_{2,k} + \dots + \tau^p \tilde{\mathbf{v}}_{p,k} \quad (85)$$

将式(85)代入式(83), 得到

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}, t_k + \tau) = \left[\sum_{i=1}^s (\sin(\omega_i \tau) \tilde{\mathbf{D}}_{i,k} + \cos(\omega_i \tau) \tilde{\mathbf{B}}_{i,k}) \right] \times (\tilde{\mathbf{v}}_{0,k} + \tau \tilde{\mathbf{v}}_{1,k} + \tau^2 \tilde{\mathbf{v}}_{2,k} + \dots + \tau^p \tilde{\mathbf{v}}_{p,k}) \quad (86)$$

式中

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{D}}_{i,k} = \cos(\omega_i t_k) \mathbf{D}_i - \sin(\omega_i t_k) \mathbf{B}_i \\ \tilde{\mathbf{B}}_{i,k} = \sin(\omega_i t_k) \mathbf{D}_i + \cos(\omega_i t_k) \mathbf{B}_i \end{cases} \quad (87)$$

在区段 $[t_k, t_{k+1}]$ 上利用 Duhamel 积分, 可以得到区段内的递推列式

$$\mathbf{v}_{k+1} = \Phi(\eta) \mathbf{v}_k + \sum_{j=0}^p \mathbf{E}_{j,k}(\eta) \tilde{\mathbf{v}}_{j,k} \quad (88)$$

式中 $\Phi(\eta) = e^{\mathbf{A}_0 \eta}$ 为与 \mathbf{A}_0 相对应的传递矩阵, 而

$$\mathbf{E}_{j,k}(\eta) = \sum_{i=1}^s (\mathbf{E}_{si,j}(\eta) \tilde{\mathbf{D}}_{i,k} + \mathbf{E}_{ci,j}(\eta) \tilde{\mathbf{B}}_{i,k}) \quad (89)$$

式中

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{si,j}(\eta) = \int_0^\eta \tau^j \sin(\omega_i \tau) \cdot e^{\mathbf{A}_0(\eta-\tau)} d\tau \\ \mathbf{E}_{ci,j}(\eta) = \int_0^\eta \tau^j \cos(\omega_i \tau) \cdot e^{\mathbf{A}_0(\eta-\tau)} d\tau \end{cases} \quad (90)$$

可见, $\mathbf{E}_{si,j}(\eta)$ 和 $\mathbf{E}_{ci,j}(\eta)$ 正是基函数为多项式与正/余弦函数组合形式的响应矩阵, 且只与区段长度 η 有关, 对于等区段长度的划分, 只需计算一次, 而且可采用扩展精细积分方法高效精确求解。

下面讨论区段内 $\mathbf{v}(t)$ 的多项式近似系数 $\tilde{\mathbf{v}}_{0,k}, \tilde{\mathbf{v}}_{1,k}, \tilde{\mathbf{v}}_{2,k}, \dots, \tilde{\mathbf{v}}_{p,k}$ 。显然, 可以采用 Taylor 级数展开或 Lagrange 插值等方法将多项式近似系数表示成两端状态高阶导数、两端状态 \mathbf{v}_k 和 \mathbf{v}_{k+1} 以及内部插值点状态的函数。然后利用状态微分方程式(64)或预估校正, 可以将多项式近似系数都完全表示成两端状态 \mathbf{v}_k 和 \mathbf{v}_{k+1} 函数, 具体的描述形式参见文献[43]。由于当前的系统是线性系统, 因此近似系数 $\tilde{\mathbf{v}}_{0,k}, \tilde{\mathbf{v}}_{1,k}, \tilde{\mathbf{v}}_{2,k}, \dots, \tilde{\mathbf{v}}_{p,k}$ 都一定是关于 \mathbf{v}_k 和

在 t_k 处通常采用多项式函数近似。文献[46]给出了基于一次多项式近似并结合解析积分公式导出的精细积分算法。进一步,文献[47]将其扩展到采用 m 次多项式近似的精细积分算法构造。

将 Duhamel 积分中非齐次项 $\tilde{f}(\mathbf{v}, t_k + \tau)$ 在区间 $[t_k, t_{k+1}]$ 上采用 m 次多项式近似为

$$\tilde{f}(\mathbf{v}, t_k + \tau) = \tilde{f}_{0,k} + \dots + \tilde{f}_{j,k} \tau^j + \dots + \tilde{f}_{m,k} \tau^m \quad (105)$$

式中 $\tilde{f}_{j,k}$ 为对第 k 区段近似的 j 阶多项式系数。将式(105)代入式(104)整理得

$$\mathbf{v}_{k+1} = \Phi(\eta) \mathbf{v}_k + \sum_{j=0}^m \int_0^\eta \tau^j e^{A_0(\eta-\tau)} d\tau \cdot \tilde{f}_{j,k} \quad (106)$$

多项式函数的 Duhamel 积分可以给出解析表达式,其递推式如下

$$\mathbf{v}_{k+1} = \Phi(\eta) \left(\mathbf{v}_k + \sum_{j=0}^m \mathbf{A}_0^{-(j+1)} \tilde{f}_{j,k} \right) - \sum_{j=0}^m \sum_{i=1}^{j+1} \frac{\eta^{j+1-i}}{(j+1-i)!} \mathbf{A}_0^{-i} \tilde{f}_{j,k} \quad (107)$$

如果 $\tilde{f}(\mathbf{v}, t)$ 充分光滑,可以用 Taylor 级数展开来计算 $\tilde{f}_{j,k}$ 。显然采用 t_k 时刻的高阶导数计算,是一种典型的自启动型算法。为避免使用 $\tilde{f}(\mathbf{v}, t)$ 的导数,则可用 Lagrange 插值等来近似。此时,需要用到 $\mathbf{v}_{k+j/m}$ 等待求的值,在实际计算中可利用当前时刻的值 \mathbf{v}_k 来进行预估。

上述多项式近似的求解框架下,文献[48]在区间 $[t_k, t_{k+1}]$ 给出了 Duhamel 积分中对矩阵指数采用 q 阶 Taylor 级数近似,且对非齐次项 $\tilde{f}(\mathbf{v}, t_k + \tau)$ 采用 m 次 Lagrange 插值多项式近似的非线性微分方程的递推公式,即

$$\mathbf{v}_{k+1} = \Phi(\eta) \left[\mathbf{v}_k + \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^q \frac{(-1)^i \eta^{i+j+1}}{i!(i+j+1)} \mathbf{A}_0^i \tilde{f}_{j,k} \right] \quad (108)$$

避免了解析积分格式(107)的矩阵求逆运算,但是以损失精度为代价。

实际上,第3节中面向时不变线性微分方程求解介绍的直接数值积分方法、增维精细积分方法和扩展精细积分方法等避免矩阵求逆运算的方法都可用于式(106)的求解。下面介绍文献[32,33]基于扩展精细积分和外插法构造的更为简洁的非线性微分方程的精细算法。

基于扩展精细积分方法^[32],当基函数取为多项式函数时,多项式响应函数表示为

$$\Phi_j(\eta) = \int_0^\eta \tau^j e^{A_0(\eta-\tau)} d\tau \quad (j=0,1,\dots,m) \quad (109)$$

则式(106)的递推公式变为

$$\mathbf{v}_{k+1} = \Phi(\eta) \mathbf{v}_k + \sum_{j=0}^m \Phi_j(\eta) \tilde{f}_{j,k} \quad (110)$$

式中 $\Phi(\eta)$ 和响应矩阵 $\Phi_j(\eta)$ 可通过扩展精细积分方法给出。显然该递推公式更为简洁,既避免矩阵求逆运算,又保持精细积分方法的高精度。

递推式(110)唯一的近似是多项式近似,其与不同数值近似方法结合将导出不同的非线性微分方程数值算法。文献[43,33]进一步导出了几种单步法/多步法的显式/隐式计算格式。以 Adams 线性多步法为例,如果利用 $t_{k-m}, t_{k-m+1}, \dots, t_{k-1}, t_k$ 作为 Lagrange 插值节点,可导出基于扩展精细积分方法的显式 Adams 的 m 步法计算格式,统一描述为

$$\mathbf{v}_{k+1} = \Phi(\eta) \mathbf{v}_k + \sum_{j=-m}^0 \bar{\Phi}_j(\eta) \tilde{f}_{k+j} \quad (111)$$

式中 $\tilde{f}_k, \tilde{f}_{k-1}, \dots, \tilde{f}_{k-m}$ 表示 $\tilde{f}(\mathbf{v}, t)$ 在 $t_k, t_{k-1}, \dots, t_{k-m}$ 时刻的值; $\bar{\Phi}_j(\eta)$ 由基函数响应矩阵 $\Phi_0(\eta), \Phi_1(\eta), \dots, \Phi_m(\eta)$ 的组合确定,可以表示为

$$\bar{\Phi}_j(\eta) = \sum_{l=0}^m \alpha_{j,l} \frac{\Phi_l(\eta)}{\eta^l} \quad (112)$$

式中 $\alpha_{j,l}$ 为显式 Adams 的 m 步法中基函数响应矩阵的组合系数,表1给出了 $m=1,2,3$ 步法时的组合系数。

表1 显式 Adams 的 m 步法的 $\alpha_{j,l}$

Tab. 1 $\alpha_{j,l}$ in explicit Adams m -step method

		$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$
$m=1$	$j=-1$	0	-1		
	$j=0$	1	1		
$m=2$	$j=-2$	0	1/2	1/2	
	$j=-1$	0	-2	-1	
	$j=0$	1	3/2	1/2	
$m=3$	$j=-3$	0	-1/3	-1/2	-1/6
	$j=-2$	0	3/2	2	1/2
	$j=-1$	0	-3	-5/2	-1/2
	$j=0$	1	11/6	1	1/6

利用 $t_{k-m+1}, \dots, t_{k-1}, t_k, t_{k+1}$ (插值点包含未知的 t_{k+1}) 作为 Lagrange 插值节点,可导出基于扩展精细积分方法的隐式 Adams 的 m 步法,统一描述为

$$\mathbf{v}_{k+1} = \Phi(\eta) \mathbf{v}_k + \sum_{j=-m+1}^1 \bar{\Phi}_j(\eta) \tilde{f}_{k+j} \quad (113)$$

式中 $\tilde{f}_{k+1}, \tilde{f}_k, \tilde{f}_{k-1}, \dots, \tilde{f}_{k-m+1}$ 表示 $\tilde{f}(\mathbf{v}, t)$ 在 $t_{k+1}, t_k, t_{k-1}, \dots, t_{k-m+1}$ 时刻的值; $\bar{\Phi}_j(\eta)$ 由 Duhamel 积分矩阵 $\Phi_0(\eta), \Phi_1(\eta), \dots, \Phi_m(\eta)$ 的组合确定

$$\bar{\Phi}_j(\eta) = \sum_{l=0}^m \alpha_{j,l} \frac{\Phi_l(\eta)}{\eta^l} \quad (114)$$

式中 $\alpha_{j,l}$ 为隐式 Adams 的 m 步法中基函数响应

矩阵的组合系数,表2给出了 $m=1,2,3$ 步法时的组合系数。

表2 隐式 Adams 的 m 步法的 $\alpha_{j,l}$
Tab. 2 $\alpha_{j,l}$ in implicit Adams m -step method

		$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$
$m=1$	$j=0$	1	-1		
	$j=1$	0	1		
$m=2$	$j=-1$	0	-1/2	1/2	
	$j=0$	1	0	-1	
	$j=1$	0	1/2	1/2	
$m=3$	$j=-2$	0	1/6	0	-1/6
	$j=-1$	0	-1	1/2	1/2
	$j=0$	1	1/2	-1	-1/2
	$j=1$	0	1/3	1/2	1/6

文献[33]指出,基于扩展精细积分方法的显式 Adams 的 m 步法具有 $O(\eta^{m+2})$ 的精度。文献[32]进一步采用扩展精细积分方法构造了一类非线性周期变系数系统的求解算法。

文献[34,49]在扩展精细积分方法基础上,将结构动力学方程中的刚度阵项看作非齐次项,改写为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{K}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) \quad (115)$$

然后引入状态变量 $\mathbf{v} = [\mathbf{x}^T, \dot{\mathbf{x}}^T]^T$, 得到如式(102)描述的状态方程,其中

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (116)$$

对于上述 \mathbf{A}_0 的特殊结构,相应的矩阵指数 $\Phi(\eta)$ 和基函数响应矩阵 $\Phi_j(\eta)$ 则具有如下特点

$$\Phi(\eta) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \Phi_{12} \\ \mathbf{0} & \Phi_{22} \end{bmatrix}, \quad \Phi_j(\eta) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \Phi_{j,12} \\ \mathbf{0} & \Phi_{j,22} \end{bmatrix} \quad (117)$$

显然,利用上述结构特点和分块矩阵运算,矩阵指数和响应矩阵只有一半的元素需要计算,同时状态空间的递推式(110)也可以利用分块矩阵运算进一步简化,从而降低计算量。

文献[50]还采用四阶 Runge-Kutta 法来计算式(104)右端的非齐次项的 Duhamel 积分,而采用精细积分方法来计算齐次部分,提出了精细 Runge-Kutta 法的计算列式为

$$\mathbf{v}_{k+1} = \Phi(\eta) \mathbf{v}_k + \eta \left(\frac{1}{6} \mathbf{k}_1 + \frac{1}{3} \mathbf{k}_2 + \frac{1}{3} \mathbf{k}_3 + \frac{1}{6} \mathbf{k}_4 \right) \quad (118)$$

式中

$$\begin{cases} \mathbf{k}_1 = \Phi(\eta) \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{v}_k, t_k) \\ \mathbf{k}_2 = \Phi(\eta) \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{v}_k + \mathbf{k}_1/2, t_k + \eta/2) \\ \mathbf{k}_3 = \Phi(\eta) \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{v}_k + \mathbf{k}_2/2, t_k + \eta/2) \\ \mathbf{k}_4 = \Phi(\eta) \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{v}_k + \mathbf{k}_3, t_k + \eta) \end{cases} \quad (119)$$

基于式(102)的算法, \mathbf{A}_0 的选择会影响到算法的精度和稳定性。然而,如何选择最优的线性系统矩阵 \mathbf{A}_0 , 尚未找到严格的方法。文献[46]指出,为了后续算法的构造,可以通过在 \mathbf{A}_0 中填充元素的方式使其满秩。这似乎说明这些方法更适用于弱非线性问题,而对于强非线性问题,如何利用精细积分方法的优点还是值得研究的问题。

5.2 基于同伦摄动的精细积分方法

同伦摄动方法是近年来一种求解非线性问题的渐近数值方法,具有固定的计算格式和推导方法。文献[51]将精细积分技术和同伦摄动方法相结合,提出了基于精细积分技术的非线性动力学方程的同伦摄动法,具有较高的计算精度和效率。

针对非线性微分方程(102),构造以下线性同伦函数,即

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{A}_0 \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{f}}_0(\bar{\mathbf{v}}, t) + \epsilon [\tilde{\mathbf{f}}_0(\bar{\mathbf{v}}, t) - \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{v}, t)] &= 0 \\ \mathbf{v}(t_0) &= \mathbf{v}_0 \end{aligned} \quad (120)$$

式中 $\bar{\mathbf{v}}$ 为已知的状态变量,如可取 $\bar{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{v}_0; \epsilon \in [0, 1]$ 为同伦参数。根据摄动理论,将式(120)的解表示摄动参数 ϵ 的级数形式,

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}_0 + \epsilon \bar{\mathbf{v}}_1 + \epsilon^2 \bar{\mathbf{v}}_2 + \dots \quad (121)$$

将式(121)代入式(120),并令方程 ϵ 同次幂的系数相等,得

$$\begin{cases} \epsilon^0: \dot{\bar{\mathbf{v}}}_0 = \mathbf{A}_0 \bar{\mathbf{v}}_0 + \tilde{\mathbf{f}}_0(\bar{\mathbf{v}}, t), \quad \bar{\mathbf{v}}_0(t_0) = \mathbf{v}_0 \\ \epsilon^1: \dot{\bar{\mathbf{v}}}_1 = \mathbf{A}_0 \bar{\mathbf{v}}_1 - \tilde{\mathbf{f}}_0(\bar{\mathbf{v}}, t) + \tilde{\mathbf{f}}_1, \quad \bar{\mathbf{v}}_1(t_0) = 0 \\ \epsilon^2: \dot{\bar{\mathbf{v}}}_2 = \mathbf{A}_0 \bar{\mathbf{v}}_2 + \tilde{\mathbf{f}}_2, \quad \bar{\mathbf{v}}_2(t_0) = 0 \\ \dots \end{cases} \quad (122)$$

式中 $\tilde{\mathbf{f}}_1, \tilde{\mathbf{f}}_2, \dots$ 分别为 $\epsilon \tilde{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{v}}_0 + \epsilon \bar{\mathbf{v}}_1 + \epsilon^2 \bar{\mathbf{v}}_2 + \dots, t)$ 的展开式中 $\epsilon^1, \epsilon^2, \dots$ 的系数项。

显然上述构造的同伦函数的每一个摄动方程都是时不变线性微分方程,可用第3节介绍的精细积分方法求解。得到这一组摄动解之后,代入式(121)并令 $\epsilon=1$, 即得到原非线性微分方程的解答。

5.3 增维为齐次时变系统的方法

张素英等[52]提出了非线性微分方程的增维齐次化方法,通过将非线性微分方程转化为增维的齐次时变微分方程进行求解。引入新变量 $\mathbf{v}_{n+1} \equiv 1$, 即 $\dot{\mathbf{v}}_{n+1} \equiv 0$, 并构造增维状态变量如下

$$\bar{\mathbf{v}} = [\mathbf{v}^T, \mathbf{v}_{n+1}]^T \quad (123)$$

则非线性微分方程(100)转化为齐次方程形式,即

$$\dot{\bar{\mathbf{v}}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{v}}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\mathbf{v}, t) & \mathbf{f} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{v}_{n+1} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{v}, t) \bar{\mathbf{v}} \quad (124)$$

注意式(124)只是形式上表现为线性齐次方程,但 $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{v}, t)$ 仍然是非定常和非线性的。如果在较小的

区段 $[t_k, t_{k+1}]$ 内认为 $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{v}, t)$ 变化很小, 可近似看作常数矩阵, 即 $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{v}, t) \approx \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{v}_k, t_k)$, 那么该区段就可以采用线性定常系统的精细积分方法求解。当然结合预估校正技术会进一步提高精度。

文献[53]提出了一种在 Minkowski 空间中齐次化非线性系统的增维方法。对一般非线性系统

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}(\mathbf{v}, t) \quad (125)$$

构造增维状态变量 $\tilde{\mathbf{v}} = [\mathbf{v}^T, \|\mathbf{v}\|]^T$, 其中 $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}$ 为欧氏范数, 可以导出齐次化形式

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}} = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{v}, t) \tilde{\mathbf{v}} \quad (126)$$

式中

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{v}, t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{f}(\mathbf{v}, t)/\|\mathbf{v}\| \\ \mathbf{f}^T(\mathbf{v}, t)/\|\mathbf{v}\| & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (127)$$

需要说明的是, 此方法得到的 $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{v}, t)$ 是 Lorentz 正交的 Lie 代数群, 满足

$$\tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{G} + \mathbf{G} \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{0} \quad (128)$$

式中 \mathbf{G} 为一个 Minkowski 矩阵

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_{n \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times n} & -1 \end{bmatrix} \quad (129)$$

这样, 原非线性动态系统就转化为一个增维的 Lie 型动态系统, 可采用精细积分方法求解。文献[54]则进一步采用 Runge-Kutta Munthe-Kaas 方法和精细积分方法构造了简洁的保群结构积分算法。

6 大规模问题的精细积分方法

大规模工程问题的瞬态响应分析, 其相应的系数矩阵通常具有很高的维度, 若直接采用精细积分方法进行计算, 需要计算高维度矩阵的相乘并破坏原始系数矩阵的稀疏性, 从而导致消耗大量的计算时间和存储空间。

6.1 子域精细积分法

为降低精细积分方法的计算量, 钟万勰等^[55-57]提出了子域精细积分方法。主要思想是利用系数矩阵具有窄带宽的特点将结构分为若干个子域, 将计算转化为一些子域上的精细积分计算。在此基础上, 陈飙松等^[58]提出了子结构精细积分方法, 该方法将物理域划分子结构, 更适用于有限元法及并行计算。考虑瞬态热传导问题的一阶常微分方程组

$$\mathbf{C} \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{K} \mathbf{T} = \mathbf{F} \quad (130)$$

式中 \mathbf{C} 和 \mathbf{K} 分别为热容矩阵和热传导矩阵, \mathbf{T} 和 \mathbf{F} 分别为节点温度和热载荷向量。假设结构可以分为 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 两个子结构, 则式(130)可改写为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_A & \\ & \mathbf{C}_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{T}}_A \\ \dot{\mathbf{T}}_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_A & \mathbf{K}_{AB} \\ \mathbf{K}_{BA} & \mathbf{K}_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_A \\ \mathbf{T}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_A \\ \mathbf{F}_B \end{bmatrix} \quad (131)$$

令

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_A &= \mathbf{C}_A^{-1} (\mathbf{F}_A - \mathbf{K}_{AB} \mathbf{T}_B) \\ \mathbf{Q}_B &= \mathbf{C}_B^{-1} (\mathbf{F}_B - \mathbf{K}_{BA} \mathbf{T}_A) \end{aligned} \quad (132)$$

则式(131)可以进一步改写为

$$\dot{\mathbf{T}}_A = -\mathbf{C}_A^{-1} \mathbf{K}_A \mathbf{T}_A + \mathbf{Q}_A, \quad \dot{\mathbf{T}}_B = -\mathbf{C}_B^{-1} \mathbf{K}_B \mathbf{T}_B + \mathbf{Q}_B \quad (133)$$

根据精细积分方法, 式(133)的解可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_A^{k+1} &= e^{\mathbf{H}_A \eta} \mathbf{T}_A^k + \int_0^\eta e^{\mathbf{H}_A(\eta-\xi)} \mathbf{Q}_A(t_k + \xi) d\xi \\ \mathbf{T}_B^{k+1} &= e^{\mathbf{H}_B \eta} \mathbf{T}_B^k + \int_0^\eta e^{\mathbf{H}_B(\eta-\xi)} \mathbf{Q}_B(t_k + \xi) d\xi \end{aligned} \quad (134)$$

式中 $\mathbf{H}_A = -\mathbf{C}_A^{-1} \mathbf{K}_A$, $\mathbf{H}_B = -\mathbf{C}_B^{-1} \mathbf{K}_B$ 。式(134)为式(133)的精确解, 但由于右端被积函数含有 \mathbf{Q}_A 和 \mathbf{Q}_B , 其为非线性方程。对 \mathbf{Q}_A 和 \mathbf{Q}_B 的 \mathbf{T}_A 和 \mathbf{T}_B 作不同近似可得出多种方法, 下面以预测-校正法为例进行说明。

在时间段 $[t_k, t_{k+1}]$ 内, 做如下近似

$$\mathbf{T}_p = \mathbf{T}_p^k \quad (p=A, B) \quad (135)$$

将式(135)代入式(134)可算得 \mathbf{T}_A 和 \mathbf{T}_B 在时刻 t_{k+1} 的预测值 $\tilde{\mathbf{T}}_A^{k+1}$ 和 $\tilde{\mathbf{T}}_B^{k+1}$, 用该值再做如下近似

$$\mathbf{T}_p = \mathbf{T}_p^k + (\tilde{\mathbf{T}}_p^{k+1} - \mathbf{T}_p^k) \xi / \eta \quad (0 \leq \xi \leq \eta) \quad (136)$$

再将式(136)代入式(132, 134), 可算得 \mathbf{T}_A^{k+1} 和 \mathbf{T}_B^{k+1} 。式(136)也可采用迭代法求解。

子域精细积分方法提出后, 针对子域精细积分方法的改进和应用做了大量工作。蔡志勤等^[59]对子域精细积分方法的稳定性进行了分析, 证明了单点、两点和三点子域精细积分及单点子域精细积分的蛙跳格式都是无条件稳定的。曾文平等^[60, 61]分别对二维和三维扩散方程提出了单点子域精细积分方法。金承日等^[62, 63]利用子域精细积分方法思想, 针对对流方程初边值问题, 构造出一组无条件稳定的三层显格式(蛙跳格式)和一组无条件稳定的二层隐式格式, 进而设计出求解该隐式格式的显式迭代算法。赖永星等^[64]基于单点子域精细积分思想, 针对抛物线型热传导方程初边值问题, 提出多点子域积分的概念, 推出一种多点子域积分的 FTCS (Forward for Time, Center for Space) 格式, 并且说明了多点子域积分的 FTCS 格式具有比单点子域积分的 FTCS 格式收敛速度快的特点。Wu 等^[65]针对由相同结构单元组成的周期结构动力响应问题, 基于精细积分方法、子域格式和周期结构的可重复性提出了一种子域精细积分方法, 此方法特别适用于周期结构动力响应的求解。

6.2 Krylov 子空间精细积分方法

Fung 等^[66]首先将 Krylov 子空间方法和精细积分方法相结合, 提出了一种求解大规模瞬态问题

的高效精细积分算法。对一个给定的 n 维方阵 \mathbf{A} 以及非零向量 \mathbf{v} , 定义 m 维 Krylov 子空间为

$$\mathbf{K}_m \equiv \text{span}\{\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{A}^2\mathbf{v}, \dots, \mathbf{A}^{m-1}\mathbf{v}\} \quad (137)$$

Krylov 子空间方法的核心思想是从该子空间中寻找矩阵指数-向量乘积 $e^{\mathbf{A}\eta}\mathbf{v}$ 的近似解。 m 维 Krylov 子空间 \mathbf{K}_m 的基底 $\mathbf{V}_m = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_m]$ 和矩阵 \mathbf{A} 在该 Krylov 子空间内的投影矩阵 $\mathbf{H}_m = [h_{i,j}]$ 可以通过以下 Arnoldi 过程计算。

(1) 初始化

$$\beta = \|\mathbf{v}\|_2, \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}/\beta \quad (138)$$

(2) 迭代过程

Do $j = 1, 2, \dots, m-1$

① $\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{v}_j$

② Do $i = 1, 2, \dots, j$

$$h_{i,j} = \mathbf{w}^T \mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{w} - h_{i,j} \mathbf{v}_i$$

③ $h_{j+1,i} = \|\mathbf{w}\|_2, \quad \mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{w}/h_{j+1,i}$

在获得 m 维 Krylov 子空间 \mathbf{K}_m 的正交基底 \mathbf{V}_m 和投影矩阵 \mathbf{H}_m 后, 矩阵指数-向量乘积 $e^{\mathbf{A}\eta}\mathbf{v}$ 可以通过下式进行近似计算, 即

$$e^{\mathbf{A}\eta}\mathbf{v} \approx \beta \mathbf{V}_m e^{\mathbf{H}_m \eta} \mathbf{e}_1 \quad (139)$$

式中 向量 \mathbf{e}_1 的第一个元素为 1, 其余元素均为 0。

从以上过程可以看出, Krylov 子空间方法将原始规模的矩阵指数-向量乘积转化为 m 维矩阵指数-向量乘积, 进而利用精细积分方法计算该 m 维矩阵指数 $e^{\mathbf{H}_m \eta}$ 。由于利用 Arnoldi 过程构造 Krylov 子空间基底中只需要执行矩阵-向量乘积计算, 并且 Krylov 子空间维度 m 通常要比原始规模小得多, 该方法能够显著降低原始问题的计算规模。

在此基础上, 陈臻林^[67]提出了一种结合 Krylov 子空间方法的精细时程积分法求解大型动力系统, 该方法利用增维技术避免了非齐次方程特解的求解, 可处理任意形式载荷。Wang^[68]在利用分段插值多项式模拟外载荷基础上, 提出了一种使用 Ritz 矢量的精细积分方法和一种改进的 Krylov 精细积分方法。Chen^[69]针对具有任意激励的二阶微分方程, 提出了一种改进的 Krylov 精细积分算法, 该方法通过精确确定迭代子空间大小以解决复杂激励问题。

6.3 基于物理特性的快速精细积分方法

高强等^[70,71]根据结构动力响应的物理特点, 从物理上说明了大规模动力系统对应的小时间段矩阵指数应该具有稀疏性, 并基于该性质提出了一种改进的快速精细积分方法。

空间离散后的结构动力学方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t) \quad (140)$$

式(140)可以写为状态空间形式, 即

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \end{Bmatrix} \quad (141)$$

其中

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}^{-1} \\ -\mathbf{K} & -\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \quad (142)$$

式中 $\mathbf{p} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}$ 为动量。式(141)的解可以表示为

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{T}\mathbf{v}_k + \int_0^\eta e^{\mathbf{A}(\eta-\xi)} \mathbf{f}(t_k + \xi) d\xi \quad (143)$$

式中

$$\mathbf{T} = e^{\mathbf{A}\eta} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} \end{bmatrix} \quad (144)$$

离散结构动力学响应的传递速度是有限的, 下面利用这个性质说明其对矩阵指数结构的影响。根据式(143), 如果外力为零, 则式(143)可以改写为

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{T}_{11}\mathbf{q}_k + \mathbf{T}_{12}\mathbf{p}_k, \quad \mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{T}_{21}\mathbf{q}_k + \mathbf{T}_{22}\mathbf{p}_k \quad (145)$$

由上述方程可得到矩阵指数元素的物理意义, 如 \mathbf{T}_{11} 的第 i 行第 j 列元素表示第 j 个自由度上给定单位位移, 而其他自由度位移为零且所有自由度动量为零时, 经过一个步长 η 后, 第 i 个自由度的位移响应。 \mathbf{T}_{12} , \mathbf{T}_{21} 和 \mathbf{T}_{22} 的物理意义可类似给出。

假设某个自由度上有扰动, 在较小时间内必然只能传播到有限的自由度, 而不是所有自由度。根据矩阵 \mathbf{T}_{11} , \mathbf{T}_{12} , \mathbf{T}_{21} 和 \mathbf{T}_{22} 的物理含义, 则其一定是稀疏矩阵。基于以上分析, 该方法对精细积分方法计算过程进行稀疏化过滤处理, 即在循环计算矩阵指数 \mathbf{T} 的增量部分时, 在每一循环结束前都对矩阵指数内由于计算误差产生的小于容差的数进行过滤(即其值设为 0), 来提高矩阵指数的稀疏性, 从而提高计算效率。根据类似思想, 吴锋等^[72]针对双曲热传导问题的物理特点, 提出了一种求解大规模双曲热传导问题的快速精细积分方法。

6.4 基于切比雪夫展开的高效率精细积分方法

考虑如下—类特殊形式的一阶常微分方程组

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{v}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (146)$$

式中 矩阵 \mathbf{C} 为对称正定稀疏矩阵, 矩阵 \mathbf{K} 为对称半正定稀疏矩阵。如有限元离散化后的瞬态热传导问题的一阶常微分方程组即满足式(146)。

针对于这类特殊的常微分方程组问题, 高强等^[73]提出了切比雪夫展开高效数值方法。该方法基于矩阵指数的切比雪夫矩阵多项式展开, 将矩阵指数-向量的乘积转化为计算一系列切比雪夫矩阵多项式与向量的乘积, 从而显著提高了计算效率。

对矩阵 \mathbf{C} 进行 Cholesky 分解 $\mathbf{C} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$, 则式

(146)可改写为

$$\dot{\bar{\mathbf{v}}}(t) = -\mathbf{A}\bar{\mathbf{v}}(t) + \bar{\mathbf{f}}(t) \quad (147)$$

式中 $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{L}^T \mathbf{v}(t)$, $\mathbf{A} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{L}^{-T}$, $\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{f}(t)$ 。式(147)的解可以表示为

$$\bar{\mathbf{v}}(t_{k+1}) = e^{-\mathbf{A}\eta} \bar{\mathbf{v}}(t_k) + \int_0^\eta e^{-\mathbf{A}(\eta-\tau)} \bar{\mathbf{f}}(t_k + \tau) d\tau \quad (148)$$

然后采用以下切比雪夫展开法计算式(148)的矩阵指数-向量乘积

$$e^{-\mathbf{A}\eta} \bar{\mathbf{v}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(\eta) \mathbf{T}_n(-\mathbf{A}_{\text{norm}}) \bar{\mathbf{v}} \quad (149)$$

式中

$$\alpha_n(\eta) = (2 - \delta_{n,0}) e^{-\lambda_{\max} \eta/2} I_n(\lambda_{\max} \eta/2) \quad (150)$$

$$\mathbf{A}_{\text{norm}} = (2\mathbf{A} - \lambda_{\max} \mathbf{I}) / \lambda_{\max} \quad (151)$$

式中 $\delta_{n,0}$ 满足当 $n=0$ 时 $\delta_{n,0} = 1$, 而当 $n > 0$ 时 $\delta_{n,0} = 0$; λ_{\max} 为矩阵 \mathbf{A} 的最大特征值; $I_n(x)$ 为 n 阶第一类修正贝塞尔函数; $\mathbf{T}_n(\mathbf{X})$ 为 n 阶第一类切比雪夫矩阵多项式, 可按以下递归过程计算

$$\begin{cases} \mathbf{T}_0(\mathbf{X}) = \mathbf{I} \\ \mathbf{T}_1(\mathbf{X}) = \mathbf{X} \\ \mathbf{T}_{n+1}(\mathbf{X}) = 2\mathbf{X}\mathbf{T}_n(\mathbf{X}) - \mathbf{T}_{n-1}(\mathbf{X}) \end{cases} \quad (152)$$

对式(148)中关于非齐次载荷 $\bar{\mathbf{f}}$ 的积分, 同样利用切比雪夫展开法近似矩阵指数, 则其积分为

$$\int_0^\eta e^{-\mathbf{A}(\eta-\tau)} \bar{\mathbf{f}}(t_k + \tau) d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{T}_n(-\mathbf{A}_{\text{norm}}) \mathbf{u}_n \quad (153)$$

式中

$$\mathbf{u}_n = \int_0^\eta \alpha_n(\eta-\tau) \bar{\mathbf{f}}(t_k + \tau) d\tau \quad (154)$$

由式(154)可知, 由于向量 \mathbf{u}_n 和 n 有关, 计算式(153)右端级数的每一项都需要计算一次向量积分, 根据实际问题中外载荷随时间变化特点, 文献[73]给出了高效计算式(153)的方法。

稳定性分析表明, 对于任意时间步长, 该方法近似算子的谱半径均小于 1, 因此该方法具有无条件稳定的特性。同时, 其计算过程中只涉及矩阵-向量乘积计算并只需储存少数向量, 因此针对大规模瞬态热传导问题, 该方法在计算效率和内存消耗上都具有很大的优势。

6.5 周期结构的高效率精细积分方法

基于周期结构动力响应的物理特点, 高强等^[74-76]提出了周期结构动力响应分析的高效率精细积分方法。

假设周期结构的一个单胞自由度数为 d , 并将矩阵指数 \mathbf{T} 按照方程(144)分块, 则周期结构对应的矩阵指数具有以下特点

$$\begin{cases} \mathbf{T}_{11}(j, i) = \mathbf{T}_{11}(d+j, d+i) \\ \mathbf{T}_{12}(j, i) = \mathbf{T}_{12}(d+j, d+i) \\ \mathbf{T}_{21}(j, i) = \mathbf{T}_{21}(d+j, d+i) \\ \mathbf{T}_{22}(j, i) = \mathbf{T}_{22}(d+j, d+i) \end{cases} \quad (155)$$

由式(155)可知, 周期结构对应的矩阵指数中有很多相同的矩阵元素, 为提高计算效率, 这些相同的元素不应该全部计算和存储。另一个影响因素是能量在结构中的传递速度是有限的。假设某个自由度上有扰动, 在较小步长内, 必然只能传播到有限的自由度, 而不可能传播到所有自由度。

综合以上两个性质, 则矩阵块 \mathbf{T}_{11} , \mathbf{T}_{12} , \mathbf{T}_{21} 和 \mathbf{T}_{22} 都具有如下的带状结构, 即

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ddots & \mathbf{b}_1 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ddots & a_1 & \mathbf{b}_2 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{c}_1 & a_2 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{c}_2 & \ddots & \mathbf{b}_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \mathbf{c}_d & a_1 & \mathbf{b}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \mathbf{c}_1 & a_2 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \mathbf{c}_2 & \ddots & \mathbf{b}_d \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \ddots & a_d \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{c}_d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (156)$$

式中 标量 $a_i (i=1, 2, \dots, d)$ 对应于矩阵的对角线元素, 向量 $\mathbf{b}_i (i=1, 2, \dots, d)$ 的第一个元素不为零, 而向量 $\mathbf{c}_i (i=1, 2, \dots, d)$ 的最后一个元素不为零。因此, 要计算周期结构矩阵指数, 只需要计算和存储 a_i , \mathbf{b}_i 和 $\mathbf{c}_i (i=1, 2, \dots, d)$ 即可。

下面以图 1(a)所示的含有 N 个单胞的一维周期结构来说明 a_i , \mathbf{b}_i 和 $\mathbf{c}_i (i=1, 2, \dots, d)$ 的计算方法。假设在一个积分步长内, 能量传播的速度不超过 m 个单胞, 则可构造如图 1(b)所示的由 $2m+1$ 个单胞组成的代表单胞结构。这两个结构的边界都不会对第 $m+1$ 个单胞上的位移和动量响应产生影响, 所以两个结构对应节点的响应相同, 而结构(a)中第 $2m+2$ 到第 N 个单胞对应的响应为零。

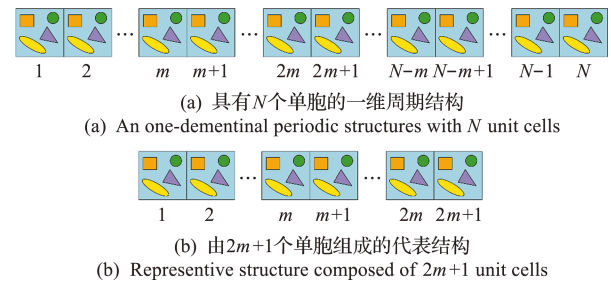


图 1

Fig. 1 一维周期结构及其代表结构

Fig. 1 An one-dimensional periodic structure and its representative structure

因此,基于以上周期结构动力响应矩阵指数的代数结构分析,计算结构(b)的矩阵指数,并从恰当的位置提取数据即可得到式(156)的 a_i, b_i 和 $c_i (i = 1, 2, \dots, d)$ 。从而大大降低了矩阵指数的计算量和储存量。

基于类似思想,高强等^[77,78]提出了求解一维和二维周期结构瞬态热传导问题的高效率数值方法。在此基础上,高强等^[79,80]针对含有移动热源的周期结构和缺陷周期结构瞬态热传导问题提出了高效数值方法。

7 精细积分思想的扩展应用

精细积分方法的要点在于 2^N 类算法和增量存储。基于这两个要点,精细积分方法也扩展用于许多其他问题,解决了传统方法在计算这些问题时精度低的困境。

7.1 两点边值问题

基于计算结构力学和最优控制之间的模拟理论,钟万勰等^[3,81,82]进一步将精细积分方法扩展至两点边值问题。

设整个两端边值问题的求解域为 $[z_a, z_b]$, 两端边值问题的一阶 $2n$ 维齐次方程可描述为

$$dv/dz = Av, \quad v = [q^T, p^T]^T \quad (157)$$

式中 A 为 $2n$ 维的系统矩阵, v 为 $2n$ 维的待求状态向量。在边界 z_a 和 z_b 处各有 n 个已知量,不失一般性,本文设为 $q_a = q(z_a)$ 和 $p_b = p(z_b)$ 。对于两端边值问题精细积分法虽然不能直接使用,但是其增量存储和基于加法定理的 2^N 类算法的思想仍然适用。式(157)通常可以采用矩阵指数方法或区段混合能方法进行求解。

(1) 矩阵指数方法

设两端边值问题的求解域为 $[z_a, z_b]$, 即求解域长度为 $L = z_b - z_a$, 则方程(157)的解可表示为

$$\begin{bmatrix} q_b \\ p_b \end{bmatrix} = \Phi(L) \begin{bmatrix} q_a \\ p_a \end{bmatrix} \quad (158)$$

式中 $\Phi(L) = e^{AL}$ 可采用精细积分求解。将 $\Phi(L)$ 写成分块矩阵形式,则有

$$\begin{bmatrix} q_b \\ p_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_a \\ p_a \end{bmatrix} \quad (159)$$

式(159)将两端的的状态向量联系起来。由于已知 q_a 和 p_b , 则重新整理式(159)可得

$$\begin{bmatrix} q_b \\ p_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & G \\ -Q & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_a \\ p_b \end{bmatrix} \quad (160)$$

式中 矩阵 $F = \Phi_{11} - \Phi_{12} \Phi_{22}^{-1} \Phi_{21}, G = \Phi_{12} \Phi_{22}^{-1}, Q =$

$\Phi_{22}^{-1} \Phi_{21}, N = \Phi_{22}^{-1}$ 。即首先采用精细积分方法算出 $\Phi(L)$, 然后再根据式(160)求解,这一做法具有较广泛的适用性。然而当 L 较大时, Φ_{22} 可能是病态,其逆 Φ_{22}^{-1} 的精确计算非常困难。为此,钟万勰^[83]基于区段混合能提出了直接求解(160)中矩阵 F, G, Q 和 N 的精细积分方法。

(2) 区段混合能方法

区段混合能方法常用于最优控制^[84],钟万勰^[83]提出了用区段混合能求解非对称 Riccati 方程的方法,这一方法也可用到求解两端边值问题(157)。

考虑到力学问题中, A 为 Hamilton 矩阵的情况比较常见,本文以 Hamilton 矩阵为例进行介绍。将式(157)写成分块矩阵形式,即

$$\frac{dv}{dz} = Av = \begin{bmatrix} C & D \\ B & -C^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} \quad (161)$$

式中 B 和 D 为对称矩阵。此时式(160)具有如下形式

$$\begin{bmatrix} q_b \\ p_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & G \\ -Q & F^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_a \\ p_b \end{bmatrix} \quad (162)$$

式中 F, G 和 Q 是区段长度 $L = z_b - z_a$ 的矩阵函数。参考精细积分方法的思想,首先将求解区域分为 2^N 个小区段,在每个小区段 $\tau = 2^{-N}L$ 上, F, G 和 Q 可用 M 项 Taylor 级数近似展开为

$$\begin{cases} Q(\tau) \approx \sum_{k=1}^M \theta_k \tau^k \\ G(\tau) \approx \sum_{k=1}^M \gamma_k \tau^k \\ F(\tau) \approx I + \sum_{k=1}^M \varphi_k \tau^k = I + \bar{F}(\tau) \end{cases} \quad (163)$$

式中 θ_k, γ_k 和 φ_k 为 Taylor 展开的系数矩阵

$$\theta_1 = B, \quad \gamma_1 = D, \quad \varphi_1 = C \quad (164)$$

而 $k = 2, 3, \dots, M$ 时

$$\begin{cases} \theta_k = B \varphi_{k-1} + \varphi_{k-1}^T B + \sum_{m=1}^{k-2} \varphi_m^T B \varphi_{k-m-1} \\ \gamma_k = C \gamma_{k-1} + \gamma_{k-1} C^T - \sum_{m=1}^{k-2} \gamma_m^T B \gamma_{k-m-1} \\ \varphi_k = C \varphi_{k-1} - \gamma_{k-1} B - \sum_{m=1}^{k-2} \gamma_m^T B \varphi_{k-m-1} \end{cases} \quad (165)$$

同时,还存在增量加法定理

$$G(2\tau) = G(\tau) + [I + \bar{F}(\tau)][G^{-1}(\tau) + Q(\tau)]^{-1} \times [I + \bar{F}^T(\tau)]$$

$$Q(2\tau) = Q(\tau) + [I + \bar{F}^T(\tau)][Q^{-1}(\tau) + G(\tau)]^{-1} \times [I + \bar{F}(\tau)]$$

$$\bar{F}(2\tau) = [\bar{F}(\tau) - G(\tau)Q(\tau)/2][I + G(\tau)Q(\tau)]^{-1} + [I + G(\tau)Q(\tau)]^{-1}[\bar{F}(\tau) - G(\tau)Q(\tau)/2] + \bar{F}(\tau)[I + G(\tau)Q(\tau)]^{-1}\bar{F}(\tau) \quad (166)$$

因此,首先利用式(163)计算 $\bar{\mathbf{F}}(\tau), \mathbf{G}(\tau)$ 和 $\mathbf{Q}(\tau)$, 然后根据方程(166)循环计算 N 次,可以得到整个区段的矩阵 $\bar{\mathbf{F}}, \mathbf{G}, \mathbf{Q}$ 以及矩阵 \mathbf{F} 。于是两端边值问题也可以给出计算机意义上的精确解。随后,钟万勰等^[85]还将精细积分方法与本征值计数方法结合,建立了基于混合变量精细积分的扩展 W-W 算法,实现了应用两点边值问题精细积分方法进行结构振动和波传播问题的频散分析。文献[86-88]进一步对两点边值问题精细积分方法进行了改进。

两点边值问题的精细积分方法提出后,首先在 LQ 控制^[89,90]、Riccati 方程^[82]、卡尔曼-布西滤波^[91]和 H_∞ 控制系统^[92,93]等方面得到广泛应用,文献[84,94]等对这些应用作了详细介绍。两点边值问题的精细积分方法还广泛用于波传播问题^[95-100]、分层地基动力响应问题^[101,102]、电磁波反射和投射问题^[103]和奇异摄动边值问题^[104,105]等方面。

7.2 椭圆函数

椭圆函数是由椭圆积分定义的一类函数,广泛应用于工程问题。椭圆函数的直接计算一般比较困难,但可进行幂级数展开,且也有加法定理的重要性质,因此可采用精细积分方法思想进行求解^[106]。

以 Jacobi 椭圆函数为例,介绍椭圆函数的精细积分方法。Jacobi 椭圆函数的定义可从第二类 Legendre 椭圆积分引出,该积分为

$$u(z, m_0) = \int_0^z \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-m_0^2\xi^2)}} \quad (167)$$

式中 参数 m_0 称为模数。Jacobi 椭圆函数 $\text{sn}(u, m_0) = z$ 定义为上述第二类 Legendre 椭圆积分的反函数。而另外两个基本 Jacobi 椭圆函数可分别定义为

$$\begin{cases} \text{cn}(u) = \sqrt{1 - \text{sn}^2(u)} = \sqrt{1 - z^2} \\ \text{dn}(u) = \sqrt{1 - m_0^2 \text{sn}^2(u)} = \sqrt{1 - m_0^2 z^2} \end{cases} \quad (168)$$

式中 省略了参数 m_0 , 这是文献常用写法。

这三个 Jacobi 椭圆函数有如下的幂级数展开

$$\begin{cases} \text{sn}(u) = u - (1 + m_0^2)u^3/3! + \\ \quad (1 + 14m_0^2 + m_0^4)u^5/5! - \dots \\ \text{cn}(u) = 1 - u^2/2 + (1 + 4m_0^2)u^4/4! - \\ \quad (1 + 44m_0^2 + 16m_0^4)u^6/6! - \dots \\ \text{dn}(u) = 1 - m_0^2 u^2/2 + (4m_0^2 + m_0^4)u^4/4! - \\ \quad (16m_0^2 + 44m_0^4 + m_0^6)u^6/6! - \dots \end{cases} \quad (169)$$

和如下加法定理

$$\begin{cases} \text{sn}(2u) = \frac{2\text{sn}(u) \cdot \text{cn}(u) \cdot \text{dn}(u)}{1 - m_0^2 \text{sn}^4(u)} \\ \text{cn}(2u) = \frac{\text{cn}^2(u) - \text{sn}^2(u) \cdot \text{dn}^2(u)}{1 - m_0^2 \text{sn}^4(u)} \\ \text{dn}(2u) = \frac{\text{dn}^2(u) - m_0^2 \text{sn}^2(u) \cdot \text{cn}^2(u)}{1 - m_0^2 \text{sn}^4(u)} \end{cases} \quad (170)$$

如果计算 Jacobi 椭圆函数在 u 点的值,可令 $\tau = u/2^N$, 此时 τ 将为非常小的数值,采用较少项数的幂级数展开即可较为精确地近似

$$\begin{cases} \text{sn}(\tau) \approx \tau - (1 + m_0^2)\tau^3/3! + \\ \quad (1 + 14m_0^2 + m_0^4)\tau^5/5! = S_1 \\ \text{cn}(\tau) \approx 1 - \tau^2/2 + (1 + 4m_0^2)\tau^4/4! - \\ \quad (1 + 44m_0^2 + 16m_0^4)\tau^6/6! = 1 + C_1 \\ \text{dn}(\tau) \approx 1 - m_0^2\tau^2/2 + (4m_0^2 + m_0^4)\tau^4/4! - \\ \quad (16m_0^2 + 44m_0^4 + m_0^6)\tau^6/6! = 1 + D_1 \end{cases} \quad (171)$$

再根据式(170,171)可得

$$\begin{cases} \text{sn}(2\tau) = S_2 \approx 2S_1(1 + C_1)(1 + D_1)/(1 - m_0^2 S_1^4) \\ \text{cn}(2\tau) = 1 + C_2 \approx 1 + [m_0^2 S_1^4 + 2C_1 + C_1^2 - \\ \quad S_1^2(1 + D_1)^2]/(1 - m_0^2 S_1^4) \\ \text{dn}(2\tau) = 1 + D_2 \approx 1 + [m_0^2 S_1^4 + 2D_1 + D_1^2 - \\ \quad m_0^2 S_1^2(1 + C_1)^2]/(1 - m_0^2 S_1^4) \end{cases} \quad (172)$$

利用式(172)迭代 N 次,可以得到

$$\text{sn}(u) = S_N, \text{cn}(u) = 1 + C_N, \text{dn}(u) = 1 + D_N \quad (173)$$

实际的数值实验表明,精细积分方法对于 m_0 取任意值均可给出极高精度的计算结果。目前,椭圆函数的精细积分方法已成功应用在海床动态响应^[107]、Schwarz-Christoffel 变换模型求解^[108]和浅水波方程求解^[109]等问题上。

7.3 矩阵正/余弦

矩阵正/余弦也是工程中经常用到的一种矩阵函数。对于较小规模问题,一般可以采用 Jordan 标准型及级数展开法精确地求解。但当矩阵维度较大时, Jordan 方法并不合适。精细积分法也可用于矩阵正/余弦的计算,并具有十分出色的表现^[110]。

取适当的正整数 N , 则矩阵 \mathbf{A} 的正/余弦化为

$$\sin \mathbf{A} = \sin(2^N \mathbf{B}), \cos \mathbf{A} = \cos(2^N \mathbf{B}) \quad (174)$$

式中 $\mathbf{B} = \mathbf{A}/2^N$ 。记

$$\sin(2^i \mathbf{B}) = \mathbf{S}_i, \cos(2^i \mathbf{B}) = \mathbf{I} + \mathbf{C}_i \quad (175)$$

因 \mathbf{B} 的数值非常小,因此根据 Taylor 级数展开有

$$\sin \mathbf{B} \approx \mathbf{B} - \mathbf{B}^3/3! + \mathbf{B}^5/5! = \mathbf{S}_0$$

$$\cos \mathbf{B} \approx \mathbf{I} - \mathbf{B}^2/2! + \mathbf{B}^4/4! = \mathbf{I} + \mathbf{C}_0 \quad (176)$$

式中 \mathbf{I} 为单位矩阵。然后利用矩阵正/余弦的 2 倍角公式,可得到如下的递推关系

$$\mathbf{S}_i = 2\mathbf{S}_{i-1} + 2\mathbf{S}_{i-1}\mathbf{C}_{i-1}, \mathbf{C}_i = 4\mathbf{C}_{i-1} + 2\mathbf{C}_{i-1}^2 \quad (177)$$

通过式(177)对增量进行 N 次的计算后,最终可获得

$$\sin \mathbf{A} = \mathbf{S}_N, \cos \mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{C}_N \quad (178)$$

此时计算得到的增量 \mathbf{C}_N 已经不再是一个很小的量,当其与单位矩阵相加时,计算机的舍入误差已经可以忽略不计,能够保证计算的精度。

矩阵正/余弦的精细积分方法无需计算矩阵的特征值和特征向量,而且对实复数矩阵均适用,并可以给出计算机意义上的精确解,非常适合大规模矩阵的计算。

7.4 分数阶微分方程

一些复杂力学物理过程往往具有明显的记忆、遗传和路径依赖性质^[111],由于分数阶微积分具有良好的时间记忆性^[112],已经广泛应用于这些复杂力学物理过程中^[113,114]。然而,求解分数阶微分方程十分困难,常用的方法包括多项式法^[115,116]、模型降阶法^[117]和龙格-库塔法^[118]等,但这些方法的精度均不够理想。众多学者也尝试将精细积分方法用于分数阶微分方程,以期提高求解精度。一类是将分数阶微分动力方程近似转化为整数阶微分方程,之后再利用精细积分方法求解对应的近似整数阶微分方程^[119,120];另一类是直接对分数阶微分方程构建精细积分方法^[121]。本节对第二类研究进行介绍。

分数阶常微分方程的一般形式为

$$D^{(\alpha)} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (0 < \alpha < 1) \quad (179)$$

式中 $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$, D 为导数算子, $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 。

利用拉氏变换及逆变换可得到式(179)的解为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{E}_{\alpha,1}(\mathbf{A}t^\alpha) \mathbf{x}(0) \quad (180)$$

式中 $\mathbf{E}_{\alpha,\beta}(\mathbf{X})$ 为双变量 Mittag-Leffler 函数(简称 ML 函数)

$$\mathbf{E}_{\alpha,\beta}(\mathbf{X}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{X}^k / \Gamma(\alpha k + \beta) \quad (181)$$

式中 α 和 β 为两个变量, $\Gamma(\cdot)$ 表示伽马函数。记

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{E}_{\alpha,1}(\mathbf{X}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbf{X}^k = \mathbf{I} + \mathbf{Q}_1(\mathbf{X}) \quad (182)$$

式中

$$a_k = 1/\Gamma(1 + k\alpha) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (183)$$

$$\mathbf{Q}_1(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mathbf{X}^k \quad (184)$$

于是有

$$\mathbf{F}(2\mathbf{X}) = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (2\mathbf{X})^k = \mathbf{I} + \mathbf{Q}_2(2\mathbf{X}) \quad (185)$$

$$\text{式中} \quad \mathbf{Q}_2(2\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (2\mathbf{X})^k \quad (186)$$

显然 ML 函数不满足加法定理,因此建立 $\mathbf{F}(2\mathbf{X})$ 和 $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ 的关系时,需要引入修正项 $\mathbf{R}(\mathbf{X})$ 。记

$$\mathbf{Q}_2(2\mathbf{X}) = 2\mathbf{Q}_1(\mathbf{X}) + \mathbf{Q}_1^2(\mathbf{X}) + \mathbf{R}(\mathbf{X}) \quad (187)$$

将式(184,186)代入式(187)即可给出修正项函数 $\mathbf{R}(\mathbf{X})$,显然其可以表示为

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}) = \sum_{k=2}^{\infty} b_k \mathbf{X}^k \quad (188)$$

式中系数 b_k 可用 $a_k (k = 2, 3, \dots, \infty)$ 表示。实际数值计算时,函数 $\mathbf{R}(\mathbf{X})$ 的表达式可近似地取为有限项。当 \mathbf{Q}_1 和 \mathbf{Q}_2 的多项式定义式分别截取 m_1 和 m_2 项,所得函数 $\mathbf{R}(\mathbf{X})$ 的多项式次数为 $\max(m_2, 2m_1)$,为提高精度,一般取 $m_2 \geq m_1$ 。

于是可得到如下递推关系式 ($i = 1, 2, \dots$)

$$\mathbf{F}(2^i \mathbf{X}) = \mathbf{I} + \mathbf{Q}_{i+1}(2^i \mathbf{X}) \quad (189)$$

$$\mathbf{Q}_{i+1}(2^i \mathbf{X}) = 2\mathbf{Q}_i(2^{i-1} \mathbf{X}) + \mathbf{Q}_i^2(2^{i-1} \mathbf{X}) + \mathbf{R}(2^{i-1} \mathbf{X}) \quad (190)$$

根据式(180),欲求 $t = \eta$ 时的响应,需求 $\mathbf{F}(\mathbf{A}\eta^\alpha)$ 的值。参考精细积分方法,将 η^α 分割 $m = 2^N$ 次,由于 η 是不大的时间区段,所以 $\tau = \eta^\alpha/m$ 是较小的值,因此有

$$\mathbf{F}(\mathbf{A}\tau) = \mathbf{I} + \mathbf{Q}_1(\mathbf{A}\tau) \quad (191)$$

$$\mathbf{Q}_1(\mathbf{A}\tau) \approx \mathbf{A}\tau/\Gamma(1 + \alpha) + (\mathbf{A}\tau)^2/\Gamma(1 + 2\alpha) + (\mathbf{A}\tau)^3/\Gamma(1 + 3\alpha) + \dots + (\mathbf{A}\tau)^s/\Gamma(1 + s\alpha) \quad (192)$$

式中 s 为整数,类比精细积分方法,可取 $s = [4/\alpha]$, $[\cdot]$ 表示 Gauss 函数, \mathbf{Q}_1 是一个小量矩阵。

然后应用递推关系式(189,190),最终可得到 ML 方程(181)的精细积分方法的求解表达式,即

$$\mathbf{E}_{\alpha,1}(\mathbf{A}\eta^\alpha) = \mathbf{F}(2^N \mathbf{A}\tau) = \mathbf{I} + \mathbf{Q}_{N+1}(2^N \mathbf{A}\tau) \quad (193)$$

再结合式(180,193)即可解分数阶常微分方程(179)。

由于分数阶常微分方程解析解中的 ML 函数与常规的矩阵指数不同,不满足加法定理,因此分数阶微分方程的精细积分方法需要在迭代关系中加入修正项,同时因为修正项的存在,导致分数阶微分方程的计算量增加,其计算量为普通整数阶精细积分方法的 p 倍,其中 p 为多项式 $\mathbf{R}(\mathbf{X})$ 的次数。

7.5 病态代数方程

富明慧等^[122]将病态代数方程归结于一个常微分方程初值问题的极限形式,并结合精细积分方法,提出了一种基于精细积分思想的求解病态方程组的高效方法。

对于正定的系数矩阵 \mathbf{A} , 由于

$$\int_0^{\infty} e^{-At} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^{-At} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} (-\mathbf{A})^{-1} e^{-At} \Big|_0^{\tau} = \mathbf{A}^{-1} \quad (194)$$

所以 $\int_0^{\infty} e^{-At} dt$ 即为矩阵 \mathbf{A} 的逆阵 \mathbf{A}^{-1} 。

定义函数

$$\mathbf{F}(\tau) = \int_0^{\tau} e^{-At} dt \quad (195)$$

因为

$$\mathbf{F}(2\tau) = \int_0^{2\tau} e^{-At} dt = \int_0^{\tau} e^{-At} dt + \int_{\tau}^{2\tau} e^{-At} dt = [\mathbf{I} + e^{-A\tau}] \mathbf{F}(\tau) \quad (196)$$

重复上述过程 k 次, 可得

$$\mathbf{F}(2^{k+1}\tau) = \prod_{s=1}^k [\mathbf{I} + (e^{-A\tau})^{2^s}] \mathbf{F}(\tau) \quad (197)$$

由方程(197)可知, 随着迭代次数的不断增加, 积分的上限以指数形式增加, 因此该迭代方程可以高效地逼近逆阵 \mathbf{A}^{-1} 。实际计算时, 迭代的初始值 τ 取为一非常小的数值, 则 $\mathbf{F}(\tau)$ 可用 Taylor 展开的前几项近似计算, 如可取

$$\mathbf{F}(\tau) \approx \mathbf{I}\tau - \mathbf{A}\tau^2/2 + \mathbf{A}^2\tau^3/6 - \mathbf{A}^3\tau^4/24 \quad (198)$$

同时 $e^{-A\tau}$ 也只保留 Taylor 展开前几项进行近似计算

$$e^{-A\tau} \approx \mathbf{I} - \mathbf{A}\tau + (\mathbf{A}\tau)^2/2 - (\mathbf{A}\tau)^3/6 = \mathbf{I} + \mathbf{T}_0 \quad (199)$$

将式(198, 199)代入式(197), 并注意对 $s=1, 2, \dots$ 有如下迭代格式,

$$(e^{-A\tau})^{2^s} = \mathbf{I} + \mathbf{T}_s, \mathbf{T}_s = \mathbf{T}_{s-1}^2 + 2\mathbf{T}_{s-1} \quad (200)$$

即可得到病态系数矩阵 \mathbf{A} 的逆 \mathbf{A}^{-1} 的高精度解。

理论上, 随着迭代次数的不断增加, 精细积分法的结果应该不断逼近理论解。然而矩阵乘积引起的计算误差会随着迭代的进行而积累, 进而导致精度迅速下降甚至出现溢出。为此, 富明慧等^[123]针对该问题提出了相应的迭代收敛准则。郝强等^[124]引入了主元加权的思想, 提高了精细积分的计算精度。王慧蓉等^[125]将病态系数矩阵 \mathbf{A} 进行分裂, 以减小病态系数矩阵的条件数。此后, 一些学者又对病态代数方程的精细积分方法的计算效率进行了一定程度的优化, 如张文志等^[126]改进了迭代的格式, 进一步降低了采用精细积分方法求解病态代数方程的计算量; 富明慧等^[127]利用范数均衡预处理法对病态系数矩阵 \mathbf{A} 进行预处理, 提升了精细积分方法计算效率。

8 结论

矩阵指数的精细积分方法可以给出计算机意义上的精确解, 得益于 2^N 类算法和增量存储两个

核心要点。 2^N 类算法使得精细划分和高效计算成为可能, 而增量存储则保证在执行 2^N 类算法的合并过程中避免计算机舍入误差成为影响精度的主要因素, 这也是矩阵指数精细积分方法成功的关键。

矩阵指数在微分方程的求解中具有重要的地位, 因此在矩阵指数的精细积分方法取得成功之后, 迅速用于线性/非线性微分方程数值算法的构造, 得到了一系列基于精细积分的高精度、高稳定性数值算法, 极大地丰富了微分方程的数值计算方法。同时, 精细积分方法的思想也扩展应用于很多其他问题, 包括两点边值问题、椭圆函数、矩阵正/余弦函数、病态代数方程以及分数阶微分方程等问题高精度求解算法的构造中。这些已有工作很好展现出精细积分方法的特色和优势。

进一步, 精细积分方法可望在下面几个方向得到发展和突破。(1) 保辛数值离散已成为 Hamilton 动力系统数值算法设计的重要原则, 结合精细积分方法, 可望设计出性能更高的保辛算法。(2) 精细积分方法在弱非线性问题求解中表现出了优异的性能, 如何将精细积分方法应用于强非线性问题, 并构造高性能的求解算法是一个挑战。(3) 复杂大规模问题的高效分析是解决工程问题的关键, 在保证精细积分方法精度优势的同时提高计算效率是一个值得关注的问题。

致谢: 谨以此文纪念钟万勰先生九十诞辰!

参考文献(References):

- [1] 钟万勰, 杨再石. 连续时间 LQ 控制主要本征对的算法[J]. 应用数学和力学, 1991, **12**: 45-50. (ZHONG Wan-xie, YANG Zai-shi. On the computation of the main eigen-pairs of the continuous-time linear quadratic control problem[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1991, **12**(1): 45-50. (in Chinese))
- [2] 钟万勰. 结构动力学方程的精细时程积分法[J]. 大连理工大学学报, 1994, **34**(2): 131-136. (ZHONG Wan-xie. On precise time-integration method for structural dynamics[J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 1994, **34**(2): 131-136. (in Chinese))
- [3] 钟万勰, 欧阳华江, 邓子辰. 计算结构力学与最优控制[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1993. (ZHONG Wan-xie, OUYANG Hua-jiang, DENG Zi-chen. *Computational Structural Mechanics and Optimal Control* [M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1993. (in Chinese))
- [4] Zhong W X. On precise integration method[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*,

- 2004, **163**(1):59-78.
- [5] 高 强,谭述君,钟万勰.精细积分方法研究综述[J]. 中国科学(技术科学),2016, **46**(12):1207-1218. (GAO Qiang, TAN Shu-jun, ZHONG Wan-xie. Summary of research on precise integration method[J]. *Scientia Sinica (Technologica)*, 2016, **46**(12):1207-1218. (in Chinese))
- [6] Lambert J D. The initial value problem for ordinary differential equations[J]. *State of the Art in Numerical Analysis*, 1976:451-500.
- [7] Moler C, Van Loan C. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix[J]. *SIAM Review*, 1978, **20**(4):801-836.
- [8] Moler C, Van Loan C. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later[J]. *SIAM Review*, 2003, **45**(1):3-49.
- [9] 钟万勰.暂态历程的精细计算方法[J]. 计算结构力学及其应用,1995, **12**(1):1-6. (ZHONG Wan-xie. Precise computation for transient analysis[J]. *Journal of Computational Structural Mechanics and Applications*, 1995, **12**(1):1-6. (in Chinese))
- [10] 刘 勇,沈为平.精细时程积分中状态转换矩阵的自适应算法[J]. 振动与冲击,1995(2):82-85. (LIU Yong, SHEN Wei-ping. Adaptive algorithm for state-transition matrix in precise time step integration method[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 1995(2):82-85. (in Chinese))
- [11] 曾 进,周 钢,孙薇荣.精细辛算法[J]. 上海交通大学学报,1997, **31**(9):33-35. (ZENG Jin, ZHOU Gang, SUN Wei-rong. Precise symplectic algorithm[J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 1997, **31**(9):33-35. (in Chinese))
- [12] Huang Y A, Deng Z C, Yao L X. An improved symplectic precise integration method for analysis of the rotating rigid-flexible coupled system[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, **299**(1-2):229-246.
- [13] 张洪武.关于动力分析精细积分算法精度的讨论[J]. 力学学报,2001, **33**(6):847-852. (ZHANG Hong-wu. Discussion on the accuracy of precise integration method in dynamic analysis[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2001, **33**(6):847-852. (in Chinese))
- [14] Wang M F, Au F T K. Assessment and improvement of precise time step integration method[J]. *Computers & Structures*, 2006, **84**(12):779-786.
- [15] 徐明毅,张勇传.精细辛几何算法的误差估计[J]. 数学物理学报,2006, **26**(2):314-320. (XU Ming-yi, ZHANG Yong-chuan. Accuracy estimation of precise symplectic integration method[J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2006, **26**(2):314-320. (in Chinese))
- [16] 谭述君,吴志刚,钟万勰.矩阵指数精细积分方法中参数的自适应选择[J]. 力学学报,2009, **41**(6):961-966. (TAN Shu-jun, WU Zhi-gang, ZHONG Wan-xie. Adaptive selection of parameters for precise computation of matrix exponential based on pade approximation[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2009, **41**(6):961-966. (in Chinese))
- [17] 林家浩,沈为平,宋华茂.结构非平稳随机响应的混合型精细积分[J]. 振动工程学报,1995, **8**(2):127-135. (LIN Jia-hao, SHEN Wei-ping, SONG Hua-mao. Hybrid fine integrals for structurally nonsmooth stochastic responses[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 1995, **8**(2):127-135. (in Chinese))
- [18] Lin J H, Shen W P, Williams F W. Accurate high-speed computation of non-stationary random structural response[J]. *Engineering Structures*, 1997, **19**(7):586-593.
- [19] 孙 雁.奇异系统矩阵的精细积分[J]. 上海交通大学学报,2008, **42**(8):1217-1225. (SUN Yan. Precise integration method for singular matrix[J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2008, **42**(8):1217-1225. (in Chinese))
- [20] 孙 雁.奇异 Hamilton 系统矩阵的精细积分法[J]. 计算力学学报,2009, **26**(1):46-51. (SUN Yan. Precise integration method for matrix of singular Hamilton system[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2009, **26**(1):46-51. (in Chinese))
- [21] 张森文,曹开彬.计算结构动力响应的状态方程直接积分法[J]. 计算力学学报,2000, **17**(1):94-97. (ZHANG Sen-wen, CAO Kai-bin. Direct integration of state equation method for dynamic response of structure[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2000, **17**(1):94-97. (in Chinese))
- [22] 汪梦甫,周锡元.结构动力方程的更新精细积分方法[J]. 力学学报,2004, **36**(2):191-195. (WANG Meng-fu, ZHOU Xi-yuan. Renewal precise time step integration method of structural dynamic analysis[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2004, **36**(2):191-195. (in Chinese))
- [23] 储德文,王元丰.精细直接积分法的积分方法选择[J]. 工程力学,2002, **19**(6):115-119. (CHU De-wen, WANG Yuan-feng. Integration formula selection for precise direct integration method[J]. *Engineering Mechanics*, 2002, **19**(6):115-119. (in Chinese))
- [24] 汪梦甫.无条件稳定的更新精细积分方法[J]. 固体力学学报,2006, **27**(3):311-314. (WANG Meng-fu. An unconditional stable precise time step integration method of structural dynamic analysis[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2006, **27**(3):311-314. (in Chinese))
- [25] 顾元宪,陈颀松,张洪武.结构动力方程的增维精细积分法[J]. 力学学报,2000, **32**(4):447-456. (GU Yuan-

- xian, CHEN Biao-song, ZHANG Hong-wu. Precise time-integration with dimension expanding method [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2000, **32**(4): 447-456. (in Chinese))
- [26] 周 钢, 王跃先, 贾国庆, 等. 一种基 Taylor 级数的齐次扩容精细算法 [J]. 上海交通大学学报, 2001, **35**(12): 1916-1919. (ZHOU Gang, WANG Yue-xian, JIA Guo-qing, et al. A homogenized high precise direct integration based on Taylor serials [J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2001, **35**(12): 1916-1919. (in Chinese))
- [27] 向 宇, 黄玉盈, 黄健强. 一种新型齐次扩容精细积分法 [J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2002, **30**(11): 74-76. (XIANG Yu, HUANG Yu-ying, HUANG Jian-qiang. A method of homogenization of high precision direct integration [J]. *Journal of Huazhong University of Science and Technology* (Natural Science Edition), 2002, **30**(11): 74-76. (in Chinese))
- [28] 吴泽艳, 王立峰, 武 哲. 大规模动力系统高精度增维精细积分方法快速算法 [J]. 振动与冲击, 2014, **33**(2): 188-192. (WU Ze-yan, WANG Li-feng, WU Zhe. Fast algorithm for precise integration with high accuracy dimension expanding method with for large-scale dynamic systems [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2014, **33**(2): 188-192. (in Chinese))
- [29] Wang Y X, Tian X D, Zhou G. Homogenized high precision direct integration scheme and its applications in engineering [J]. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2002, **18**(6): 429-439.
- [30] 时小红, 周 钢, 付召华. 基于 Legendre 多项式函数系的齐次扩容精细算法 [J]. 计算力学学报, 2005, **22**(3): 335-338. (SHI Xiao-hong, ZHOU Gang, FU Zhao-hua. A homogeneous high precise direct integration based on Legendre polynomial series [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2005, **22**(3): 335-338. (in Chinese))
- [31] Huang Y Z, Long Y J. On orthogonal polynomial approximation with the dimensional expanding technique for precise time integration in transient analysis [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2007, **12**(8): 1584-1603.
- [32] 谭述君, 钟万勰. 非齐次动力方程 Duhamel 项的精细积分 [J]. 力学学报, 2007, **39**(3): 374-381. (TAN Shu-jun, ZHONG Wan-xie. Precise integration method for Duhamel terms arising from non-homogeneous dynamic systems [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2007, **39**(3): 374-381. (in Chinese))
- [33] 谭述君, 高 强, 钟万勰. Duhamel 项的精细积分方法在非线形微分方程数值求解中的应用 [J]. 计算力学学报, 2010, **27**(5): 752-758. (TAN Shu-jun, GAO Qiang, ZHONG Wan-xie. Application of precise integration method of Duhamel term in numerical solution of nonlinear differential equations [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2010, **27**(5): 752-758. (in Chinese))
- [34] Ding Z X, Du Z L, Su W, et al. An improved explicit-implicit precise integration method for nonlinear dynamic analysis of structures [J]. *Advanced Steel Construction*, 2020, **16**(3): 191-205.
- [35] Yue C, Ren X M, Yang Y F, et al. A modified precise integration method based on Magnus expansion for transient response analysis of time varying dynamical structure [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2016, **89**: 40-46.
- [36] Fu C, Ren X M, Yang Y F, et al. An interval precise integration method for transient unbalance response analysis of rotor system with uncertainty [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2018, **107**: 137-148.
- [37] 钟万勰, 孙 雁. 三类保辛摄动及其数值比较. 动力学与控制学报 [J]. 2005, **3**(2): 1-9. (ZHONG Wan-xie, SUN Yan. Numerical comparison for three different symplectic perturbation methods [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, **3**(2): 1-9. (in Chinese))
- [38] 谭述君, 钟万勰. 变系数微分 Riccati 方程的保辛摄动近似求解 [J]. 大连理工大学学报, 2006, **46**(S1): 7-13. (TAN Shu-jun, ZHONG Wan-xie. Numerical solution of differential Riccati equation with variable coefficients via symplectic conservative perturbation method [J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 2006, **46**(S1): 7-13. (in Chinese))
- [39] 富明慧, 蓝林华, 陆克浪. 时变动力系统的高阶乘法摄动方法 [J]. 中国科学(物理学, 力学, 天文学), 2012, **42**(2): 185-191. (FU Ming-hui, LAN Lin-hua, LU Ke-lang. High-order multiplicative perturbation method for time-varying dynamic systems [J]. *Scientia Sinica (Physica, Mechanica & Astronomica)*, 2012, **42**(2): 185-191. (in Chinese))
- [40] Hsu C S. On approximating a general linear periodic system [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1974, **45**(1): 234-251.
- [41] Gaonkar G H, Simha Prasad D S, Sastry D. On computing floquet transition matrices of rotorcraft [J]. *Journal of the American Helicopter Society*, 1981, **26**(3): 56-61.
- [42] Cai Z Q, Gu Y X, Zhong W X. A new approach of computing floquet transition matrix [J]. *Computers & Structures*, 2001, **79**(6): 631-635.
- [43] 谭述君. 精细积分方法的改进及其在动力学与控制中的应用 [D]. 大连理工大学, 2009. (TAN Shu-jun. Im-

- provement of Precise Integration Method and Its Application in Dynamics and Control [D]. Dalian University of Technology, 2009. (in Chinese))
- [44] Tan S J, Peng H J, Zhou W Y, et al. A novel extended precise integration method based on Fourier series expansion for the H_2 -norm of linear time-varying periodic systems [J]. *International Journal of Control*, 2016, **89**(10): 2083-2095.
- [45] Liu X M, Zhou G, Zhu S, et al. A modified highly precise direct integration method for a class of linear time-varying systems [J]. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, 2014, **57**(7): 1382-1389.
- [46] 吕和祥, 蔡志勤, 裘春航. 非线性动力学问题的一个显式精细积分算法 [J]. *应用力学学报*, 2001, **18**(2): 34-40. (LU He-xiang, CAI Zhi-qin, QIU Chun-hang. An explicit precise integration algorithm for nonlinear dynamics problems [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2001, **18**(2): 34-40. (in Chinese))
- [47] 裘春航, 吕和祥, 钟万勰. 求解非线性动力学方程的分段直接积分法 [J]. *力学学报*, 2002, **34**(3): 369-378. (QIU Chun-hang, LU He-xiang, ZHONG Wan-xie. On segmented-direct-integration method for nonlinear dynamics equations [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2002, **34**(3): 369-378. (in Chinese))
- [48] Li Y Y, Jin X L, Wang Y Q. An implicit series precise integration algorithm for structural nonlinear dynamic equations [J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2005, **18**(1): 70-75.
- [49] Ding Z X, Du Z L, Su W, et al. A refined precise integration method for nonlinear dynamic analysis of structures [J]. *Advanced Steel Construction*, 2020, **16**(2): 124-136.
- [50] Zhang S Y, Deng Z C, Li W C. A precise Runge-Kutta integration and its application for solving nonlinear dynamical systems [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, **184**(2): 496-502.
- [51] Mei S L, Zhang S W. Coupling technique of variational iteration and homotopy perturbation methods for nonlinear matrix differential equations [J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2007, **54**(7-8): 1092-1100.
- [52] 张素英, 邓子辰. 非线性动力方程的增维精细积分法 [J]. *计算力学学报*, 2003, **20**(4): 423-426. (ZHANG Su-ying, DENG Zi-chen. Increment-dimensional precise integration method for nonlinear dynamic equations [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2003, **20**(4): 423-426. (in Chinese))
- [53] Zhang S Y, Deng Z C. An improved precise integration method for nonlinear dynamic system [J]. *Mechanics Research Communications*, 2003, **30**(1): 33-38.
- [54] Zhang S Y, Deng Z C. Group preserving schemes for nonlinear dynamic system based on RKMK methods [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, **175**(1): 497-507.
- [55] 钟万勰. 子域精细积分及偏微分方程数值解 [J]. *计算结构力学及其应用*, 1995, **12**(3): 253-260. (ZHONG Wan-xie. Subdomain precise integration method and numerical solution of partial differential equations [J]. *Computational Structural Mechanics and Applications*, 1995, **12**(3): 253-260. (in Chinese))
- [56] 钟万勰. 单点子域积分与差分 [J]. *力学学报*, 1996, **28**(2): 159-163. (ZHONG Wan-xie. Single point subdomain precise integration and finite difference [J]. *ACTA Mechanica Sinica*, 1996, **28**(2): 159-163. (in Chinese))
- [57] Zhong W X, Z J N, Zhong X X. On a new time integration method for solving time dependent partial differential equations [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, **130**(1-2): 163-178.
- [58] 陈彪松, 顾元宪. 瞬态热传导方程的子结构精细积分方法 [J]. *应用力学学报*, 2001, **18**(1): 14-18. (CHEN Biao-song, GU Yuan-xian. Substructures precise time integration method for transient heat conduction [J]. *Chinese Journal of Applied mechanics*, 2001, **18**(1): 14-18. (in Chinese))
- [59] 蔡志勤, 钟万勰. 子域精细积分的稳定性分析 [J]. *水动力学研究与进展 (A 辑)*, 1995, **10**(6): 588-593. (CAI Zhi-qin, ZHONG Wan-xie. Stability analysis of subdomain precise integration method [J]. *Journal of Hydrodynamics (Series A)*, 1995, **10**(6): 588-593. (in Chinese))
- [60] 曾文平. 二维扩散方程的单点子域精细积分法 [J]. *计算力学学报*, 2000, **17**(4): 492-496. (ZENG Wen-ping. One-point subdomain high precise integration method for two-dimensional diffusion equations [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2000, **17**(4): 492-496. (in Chinese))
- [61] 曾文平. 三维扩散方程的单点子域精细积分法 [J]. *华侨大学学报 (自然科学版)*, 2000, **21**(4): 349-353. (ZENG Wen-ping. Meticulous integration of one-point subdomain for solving three-dimensional diffusion equation [J]. *Journal of Huaqiao University (Natural Science)*, 2000, **21**(4): 349-353. (in Chinese))
- [62] 金承日. 解对流方程的子域精细积分并行算法 [J]. *计算力学学报*, 2002, **19**(4): 423-426. (JIN Cheng-ri. Subdomain precise integration parallel method for solving convection equation [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2002, **19**(4): 423-426. (in Chinese))

- [63] 金承日,刘明珠. 解对流扩散方程的子域精细积分 AGEI 方法[J]. 高等学校计算数学学报,2002,**24**(4): 307-312. (JIN Cheng-ri, LIU Ming-zhu. Subdomain precise integration AGEI method for convection-diffusion equation[J]. *Numerical Mathematics A Journal of Chinese Universities*,2002,**24**(4):307-312. (in Chinese))
- [64] 赖永星,刘敏珊,董其伍. 多点子域积分及计算格式研究[J]. 机械强度,2006,**28**(6):853-856. (LAI Yong-xing, LIU Min-shan, DONG Qi-wu. Study on multi-point subdomain precise integration and calculation scheme[J]. *Journal of Mechanical Strength*,2006,**28**(6):853-856. (in Chinese))
- [65] Wu F, Gao Q, Zhong W X. Subdomain precise integration method for periodic structures[J]. *Shock and Vibration*,2014,**2014**:1-11.
- [66] Fung T C, Chen Z L. Krylov precise time-step integration method[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*,2006,**68**(11):1115-1136.
- [67] 陈臻林. 大型结构动力响应的状态方程的 Krylov 精细时程积分法[J]. 力学与实践,2010,**32**(2):76-81. (CHEN Zhen-lin. Krylov precise time-step integration algorithm for large-scale structure dynamic equations[J]. *Mechanics in Engineering*,2010,**32**(2):76-81. (in Chinese))
- [68] Wang M F. Reduced-order precise integration methods for structural dynamic equations[J]. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*,2011,**27**(10):1569-1582.
- [69] Chen Z L. Improved Krylov precise time integration algorithm for structural dynamic equations[J]. *AIAA Journal*,2019,**57**(8):3548-3555.
- [70] 高 强,吴 锋,张洪武,等. 大规模动力系统改进的快速精细积分方法[J]. 计算力学学报,2011,**28**(4):493-498. (GAO Qiang, WU Feng, ZHANG Hong-wu, et al. A fast precise integration method for large-scale dynamic structures[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*,2011,**28**(4):493-498. (in Chinese))
- [71] Gao Q, Wu F, Zhang H W, et al. A fast precise integration method for structural dynamics problems[J]. *Structural Engineering and Mechanics*,2012,**43**(1):1-13.
- [72] Wu F, Gao Q, Zhong W X. Fast precise integration method for hyperbolic heat conduction problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics* (English Edition),2013,**34**(7):791-800.
- [73] Gao Q, Nie C B. An accurate and efficient chebyshev expansion method for large-scale transient heat conduction problems[J]. *Computers & Structures*,2021,**249**:106513.
- [74] 高 强,姚伟岸,吴 锋,等. 周期结构动力响应的高效数值方法[J]. 力学学报,2011,**43**(6):1181-1185. (GAO Qiang, YAO Wei-an, WU Feng, et al. An efficient algorithm for dynamic response of periodic structures[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*,2011,**43**(6):1181-1185. (in Chinese))
- [75] Gao Q, Yao W A, Wu F, et al. An efficient algorithm for computing the dynamic responses of one-dimensional periodic structures and periodic structures with defects[J]. *Computational Mechanics*,2013,**52**(3):525-534.
- [76] Gao Q, Zhang H W, Zhong W X, et al. An accurate and efficient method for dynamic analysis of two-dimensional periodic structures [J]. *International Journal of Applied Mechanics*,2016,**8**(2):1650013.
- [77] Gao Q, Cui H. An efficient and accurate method for transient heat conduction in 1D periodic structures [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*,2017,**108**:1535-1550.
- [78] Gao Q, Cui H C. Efficient and accurate method for 2D periodic structures based on the physical features of the transient heat conduction[J]. *International Journal of Thermal Sciences*,2018,**127**:213-231.
- [79] Cui H C, Gao Q, Li X L, et al. An efficient and accurate method for transient heat conduction in a periodic structure with moving heat sources[J]. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*,2020,**30**(3):1318-1344.
- [80] Cui H C, Gao Q, Li X L, et al. A novel method for transient heat conduction in a quasi-periodic structure with nonlinear defects[J]. *Journal of Heat Transfer*,2020,**142**(12):1-8.
- [81] Zhong W X, Cheung Y K, Li Y. The precise finite strip method[J]. *Computers & Structures*,1998,**69**(6):773-783.
- [82] 钟万勰. 矩阵黎卡提方程的精细积分法[J]. 计算结构力学及其应用,1994,**11**(2):113-119. (ZHONG Wan-xie. The precise integration for matrix Riccati equations[J]. *Computational Structural Mechanics and Applications*,1994,**11**(2):113-119. (in Chinese))
- [83] Zhong W X. Combined method for the solution of asymmetric Riccati differential equations [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,2001,**191**(1-2):93-102.
- [84] 钟万勰,吴志刚,谭述君. 状态空间控制理论与计算中的几个问题—分析结构力学的观点[J]. 航天控制,2007,**25**(6):3-12. (ZHONG Wan-xie, WU Zhi-gang, TAN Shu-jun. Some issues in theory and computation

- of state-space control—An analytical structural mechanics viewpoint[J]. *Aerospace Control*, 2007, **25**(6): 3-12. (in Chinese))
- [85] Zhong W X, Williams F W, Bennett P N. Extension of the Wittrick-Williams algorithm to mixed variable systems [J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 1997, **119**(3): 334-340.
- [86] Chen B S, Tong L Y, Gu Y X. Precise time integration for linear two-point boundary value problems [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, **175**(1): 182-211.
- [87] 张文志, 富明慧, 蓝林华. 两端边值问题的通用精细积分法[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2010, **49**(6): 15-19. (ZHANG Wen-zhi, FU Ming-hui, LAN Lin-hua. General precise integration method for two-point boundary value problems [J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni* (Natural Science Edition), 2010, **49**(6): 15-19. (in Chinese))
- [88] Gao Q, Tan S J, Zhong W X, et al. Improved precise integration method for differential Riccati equation [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(1): 1-14.
- [89] 钟万颢, 钟翔翔. LQ 控制区段混合能矩阵的微分方程及其应用 [J]. 自动化学报, 1992, **18**(3): 325-332. (ZHONG Wan-xie, ZHONG Xiang-xiang. On differential equation of the interval mixed energy submatrices of LQ control and its application [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1992, **18**(3): 325-332. (in Chinese))
- [90] 钟万颢, 蔡志勤. LQG 量测反馈最优控制的精细积分 [J]. 应用数学和力学, 2000, **21**(12): 1279-1284. (ZHONG Wan-xie, CAI Zhi-qin. Precise integration method for LQG optimal measurement feedback control problem [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2000, **21**(12): 1279-1284. (in Chinese))
- [91] 钟万颢. 卡尔曼-布西滤波的精细积分 [J]. 大连理工大学学报, 1999, **39**(2): 191-200. (ZHONG Wan-xie. Precise integration of Kalman-Buoy filtering problems [J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 1999, **39**(2): 191-200. (in Chinese))
- [92] 钟万颢. H_∞ 控制状态反馈与瑞利商精细积分 [J]. 计算力学学报, 1999, **16**(1): 1-7. (ZHONG Wan-xie. H_∞ control state feedback and Rayleigh quotient precise integration [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 1999, **16**(1): 1-7. (in Chinese))
- [93] 吴志刚, 钟万颢. 有限时间 H_∞ 控制系统设计的精细积分方法 [J]. 控制理论与应用, 2002, **19**(2): 291-296. (WU Zhi-gang, ZHONG Wan-xie. The precise integration method for finite horizon H_∞ control system synthesis [J]. *Control Theory & Applications*, 2002, **19**(2): 291-296. (in Chinese))
- [94] 吴志刚. 线性鲁棒控制的理论与计算 [M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2003. (WU Zhi-gang. *Theory and Computation of Linear Robust Control* [M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2003. (in Chinese))
- [95] Gao Q, Zhong W X, Howson W P. A precise method for solving wave propagation problems in layered anisotropic media [J]. *Wave Motion*, 2004, **40**(3): 191-207.
- [96] Chen L. Green's function for a transversely isotropic multi-layered half-space; An application of the precise integration method [J]. *Acta Mechanica*, 2015, **226**(11): 3881-3904.
- [97] Gao Q, Zhang Y H. Stable and accurate computation of dispersion relations for layered waveguides, semi-infinite spaces and infinite spaces [J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2019, **141**(3): 031012.
- [98] Zhong W X, Howson W P, Williams F W. Precise solutions for surface wave propagation in stratified material [J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2001, **123**(2): 198-204.
- [99] Gao Q, Lin J H, Zhong W X, et al. Random wave propagation in a viscoelastic layered half space [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, **43**(21): 6453-6471.
- [100] Gao Q, Lin J H, Zhong W X, et al. Isotropic layered soil-structure interaction caused by stationary random excitations [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2009, **46**(3-4): 455-463.
- [101] 林 皋, 韩泽军, 李伟东, 等. 多层地基条带基础动力刚度矩阵的精细积分算法 [J]. 力学学报, 2012, **44**(3): 557-567. (LIN Gao, HAN Ze-jun, LI Wei-dong, et al. Precise integration algorithm for dynamic-stiffness matrix of strip foundation on multi-layer foundation [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2012, **44**(3): 557-567. (in Chinese))
- [102] Lin G, Han Z, Zhong H, et al. A precise integration approach for dynamic impedance of rigid strip footing on arbitrary anisotropic layered half-space [J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2013, **49**: 96-108.
- [103] 方宏远, 林 皋, 张 蓓. 求解电磁波在层状有耗介质中反射和透射的精细积分方法 [J]. 大连理工大学学报, 2012, **52**(5): 707-712. (FANG Hong-yuan, LIN Gao, ZHANG Bei. Precise integration method for solving the reflection and transmission of electromagnetic waves in layered lossy media [J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 2012, **52**(5): 707-712. (in Chinese))
- [104] 富明慧, 张文志, SHESHENIN Sergey V. 求解奇异

- 摄动边值问题的精细积分法[J]. *应用数学和力学*, 2010, **31**(11): 1382-1392. (FU Ming-hui, ZHANG Wen-zhi, SHESHENIN Sergey V. Precise integration method for solving singular perturbation problems [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2010, **31**(11): 1382-1392. (in Chinese))
- [105] 张文志, 黄培彦. 求解变系数奇异摄动问题的精细积分法[J]. *华中科技大学学报(自然科学版)*, 2012(S2): 48-51. (ZHANG Wen-zhi, HUANG Pei-yan. Precise integration method for variable coefficient singular perturbation problems [J]. *Journal of Huazhong University of Science and Technology*(Natural Science Edition), 2012(S2): 48-51. (in Chinese))
- [106] 姚 征, 钟万勰. 椭圆函数的精细积分改进算法[J]. *数值计算与计算机应用*, 2008, **29**(4): 251-260. (YAO Zheng, ZHONG Wan-xie. The improved precise integration method for elliptic functions [J]. *Journal on Numerical Methods and Computer Applications*, 2008, **29**(4): 251-260. (in Chinese))
- [107] 张 军, 周香莲, 王建华. 椭圆余弦波作用下 seabed 动态响应及液化分析[J]. *哈尔滨工程大学学报*, 2016, **37**(1): 53-58. (ZHANG Jun, ZHOU Xiang-lian, WANG Jian-hua. Numerical study of the cnoidal wave-induced dynamic response of the seabed and liquefaction analysis [J]. *Journal of Harbin Engineering University*, 2016, **37**(1): 53-58. (in Chinese))
- [108] 王玉凤, 姬安召, 崔建斌. 矩形到任意多边形区域的 Schwarz-Christoffel 变换数值解法[J]. *应用数学和力学*, 2019, **40**(1): 75-88. (WANG Yu-feng, JI An-zhao, CUI Jian-bin. Numerical solution of Schwarz-Christoffel transformation from rectangles to arbitrary polygonal domains [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(1): 75-88. (in Chinese))
- [109] 姚 征, 钟万勰. 位移法浅水波方程的解及其特性[J]. *计算机辅助工程*, 2016, **25**(2): 1-4, 13. (YAO Zheng, ZHONG Wan-xie. Solutions and characteristics of shallow water equation based on displacement method [J]. *Computer Aided Engineering*, 2016, **25**(2): 1-4, 13. (in Chinese))
- [110] 陆 静, 韦笑梅, 齐 辉. 正余弦矩阵函数的精细积分算法[J]. *广西工学院学报*, 2006, **17**(4): 89-91. (LU Jing, WEI Xiao-mei, QI Hui. A high precision direct integration method to solve sine and cosine matrix functions [J]. *Journal of Guangxi University of Technology*, 2006, **17**(4): 89-91. (in Chinese))
- [111] Abou-Kassem J H, Ali S M F, Islam M R. *Petroleum Reservoir Simulations* [M]. America: Elsevier Science, 2013.
- [112] Tarasov V E, Tarasova V V. Time-dependent fractional dynamics with memory in quantum and economic physics [J]. *Annals of Physics*, 2017, **383**: 579-599.
- [113] Xu H Y, Jiang X Y. Creep constitutive models for viscoelastic materials based on fractional derivatives [J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2017, **73**(6): 1377-1384.
- [114] Mainardi F. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity* [M]. Singapore: World Scientific, 2010.
- [115] Meng Z J, Yi M X, Huang J, et al. Numerical solutions of nonlinear fractional differential equations by alternative Legendre polynomials [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2018, **336**: 454-464.
- [116] Chen Y M, Liu L Q, Liu D, et al. Numerical study of a class of variable order nonlinear fractional differential equation in terms of Bernstein polynomials [J]. *Ain Shams Engineering Journal*, 2018, **9**(4): 1235-1241.
- [117] Van de Wouw N, Michiels W, Besselink B. Model reduction for delay differential equations with guaranteed stability and error bound [J]. *Automatica*, 2015, **55**: 132-139.
- [118] Wang W S. High order stable Runge-Kutta methods for nonlinear generalized pantograph equations on the geometric mesh [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2015, **39**(1): 270-283.
- [119] 银 花, 陈 宁, 赵 尘, 等. 分数阶导数型粘弹性结构动力学方程的数值算法[J]. *南京林业大学学报(自然科学版)*, 2010, **34**(2): 115-118. (YIN Hua, CHEN Ning, ZHAO Chen, et al. A numerical algorithm for the dynamics equation of the fractional derivative viscoelasticity structure [J]. *Journal of Nanjing Forestry University*(Natural Science Edition), 2010, **34**(2): 115-118. (in Chinese))
- [120] 薛齐文, 魏 伟. 含分数阶导数微分方程的数值求解[J]. *大连交通大学学报*, 2009, **30**(5): 88-92. (XUE Qi-wen, WEI Wei. Numerical solution for differential equations of fractional order [J]. *Journal of Dalian Jiaotong University*, 2009, **30**(5): 88-92. (in Chinese))
- [121] 鲍四元, 沈 峰. 分数阶常微分方程的改进精细积分法[J]. *应用数学和力学*, 2019, **40**(12): 1309-1320. (BAO Si-yuan, SHEN Feng. An improved precise integration method for fractional ordinary differential equations [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(12): 1309-1320. (in Chinese))
- [122] 富明慧, 张文志. 病态代数方程的精细积分解法[J]. *计算力学学报*, 2011, **28**(4): 530-534. (FU Ming-hui, ZHANG Wen-zhi. Precise integral solution of ill-conditioned algebraic equations [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2011, **28**(4): 530-534. (in Chinese))
- [123] 富明慧, 李勇息, 张文志. 求解病态线性方程的一种精

- 细格式及迭代终止准则[J]. 应用力学学报, 2018, **35**(2): 346-350. (FU Ming-hui, LI Yong-xi, ZHANG Wen-zhi. A fine scheme and iteration termination criterion for solving ill-conditioned linear equations[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2018, **35**(2): 346-350. (in Chinese))
- [124] 郝强, 王慧蓉, 常金勇. 求解病态线性方程组的精细积分新主元加权迭代法[J]. 安徽大学学报(自然科学版), 2022, **46**(3): 63-67. (HAO Qiang, WANG Hui-rong, CHANG Jin-yong. A precise integration and new principal element weighted iterative method for solving ill-conditioned linear equations[J]. *Journal of Anhui University*(Natural Science Edition), 2022, **46**(3): 63-67. (in Chinese))
- [125] 王慧蓉, 郝强, 贾武艳. 求解病态线性方程组的精细积分单参数迭代法[J]. 山西师范大学学报(自然科学版), 2022, **36**(3): 16-19. (WANG Hui-rong, HAO Qiang, JIA Wu-yan. Precise integration single parameter iterative method for solving ill-conditioned linear equations[J]. *Journal of Shanxi Normal University*(Natural Science Edition), 2022, **36**(3): 16-19. (in Chinese))
- [126] 张文志, 黄培彦. 病态代数方程求解的一种改进精细积分法[J]. 应用数学和力学, 2013, **34**(3): 235-239. (ZHANG Wen-zhi, HUANG Pei-yan. An improved precise integration method for ill-conditioned algebraic equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(3): 235-239. (in Chinese))
- [127] 富明慧, 李勇息. 求解病态线性方程组的预处理精细积分法[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(4): 462-469. (FU Ming-hui, LI Yong-xi. A preconditioned precise integration method for solving ill-conditioned linear equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(4): 462-469. (in Chinese))

The development and extended applications of precise integration method

YAO Wei-an*, GAO Qiang, TAN Shu-jun, WU Feng

(State Key Laboratory of Structural Analysis, Optimization and CAE Software for Industrial Equipment, School of Mechanics and Aerospace Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: In 1991, ZHONG Wanxie first proposed the Precise Integration Method (PIM) for calculating matrix exponential, the main points of which are a 2^N algorithm and increment storage. The PIM can give the precise solution of the matrix exponential in the computer sense and provide a high-precision stable algorithm for the numerical calculation of ordinary differential equations, and it has been successfully applied in many fields such as structural dynamics response, random vibration, heat conduction, optimal control. This paper first introduces the proposal, basic idea and development of PIM for matrix exponential calculation. Then various PIMs for solving time-invariant and time-varying linear differential equations, nonlinear differential equations and large-scale problems are presented, and their advantages, disadvantages and the range of application are also analyzed. Finally, the extended application of the basic idea of PIM for two-point boundary value problems, elliptic functions, ill-conditioned algebraic equations and other problems is described, which further demonstrates the characteristics of PIM.

Key words: precise integration method; matrix exponential; ordinary differential equations; time integration

引用本文/Cite this paper:

姚伟岸, 高 强, 谭述君, 等. 精细积分方法的发展与扩展应用[J]. 计算力学学报, 2024, **41**(1): 2-25.

YAO Wei-an, GAO Qiang, TAN Shu-jun, et al. The development and extended applications of precise integration method[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2024, **41**(1): 25-25.