

DOI: 10.7511/jslx20220311001

# 基于物理界面的双重介质有限裂隙渗流模型

吴璇<sup>1,2</sup>, 沈文豪<sup>\*1,2</sup>, 王志华<sup>1,2</sup>, 黄隆州<sup>1,2</sup>

(1. 太原理工大学 应用力学研究所, 太原 030024; 2. 太原理工大学 机械与运载工程学院, 太原 030024)

**摘要:** 基于连续介质或者离散裂隙假设, 含裂隙的多孔介质渗流问题有多种数学力学模型。受物理界面的启发, 提出一种新的有限裂隙连续介质力学模型, 可以为宏观裂隙-多孔介质内的流体输运问题等提供近似计算方案。该模型属于一类双重介质模型, 将曲面上低维度的流场转化为三维空间的流场, 并且与连续的多孔介质的流场耦合, 在数学上表示为统一的输运控制方程和初始边界条件。这个近似模型为不方便实施高维度-低维度耦合求解的数值计算方法提供新的模拟思路, 如光滑粒子流体力学等无网格粒子类方法。

**关键词:** 有限裂隙; 渗流模型; 物理界面; 裂隙岩体; 连续介质力学

中图分类号: O357.3

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2023)05-0787-08

## 1 引言

含裂隙多孔材料的渗流可以在很多工程领域中遇到, 目前常见的模型有经典连续介质模型<sup>[1]</sup>、双重孔隙度和双重渗透率模型<sup>[2,3]</sup>以及离散裂隙模型<sup>[4,5]</sup>等。连续介质模型根据裂隙面的开度和方位修正了 Darcy 定律的渗透率, 能够描述裂隙面导致的各向异性渗流, 在包含多裂隙的问题中只需要逐个将各裂隙面引起的渗透率的增量线性叠加<sup>[1]</sup>, 即

$$\kappa_c = \frac{\Delta_{ni}^2}{12} \sum_{i=1}^N (\mathbf{I} - \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) \quad (1)$$

式中  $\mathbf{n}_i$  为第  $i$  条裂隙的单位法向矢量,  $\Delta_{ni}$  为第  $i$  条裂隙的开度,  $\mathbf{I}$  为二阶单位张量。在描述跨尺度的渗流问题中需要考虑更多的细节, 如裂隙的边界、裂隙面的曲率和裂隙面的粗糙度等, 需要使用各种办法考虑这些细节以提升计算精度<sup>[6-9]</sup>。

离散裂隙模型<sup>[4,5]</sup>解决了多个裂隙面内流体输运问题。该模型将渗流空间分割并抽象为裂隙面网络, 忽略固体内部的渗流流量, 仅考虑网络内部的流体流动。一些流-固耦合问题中多孔介质和裂隙面耦合在一起, 如油气开采、地热利用和碳封存中水力裂隙扩展问题<sup>[10-12]</sup>, 需要同时处理多孔介质块体和裂隙面内的流体输运。离散裂隙网络是二维空间, 而多孔介质是三维空间, 要将二者联系在一起, 需要将裂隙面当作三维空间的边界, 通过

守恒关系建立两个空间上运动学和动力学量的联系。这种方法具有很好的精度<sup>[13,14]</sup>, 然而对于一些不能方便处理二维和三维流场耦合的计算方法, 如纯 Lagrange 型无网格粒子类方法<sup>[15,16]</sup>, 大规模的裂隙面会使计算变得繁重。

裂隙是一个二维曲面, 将其置于三维的多孔连续介质中需要定义一个三维的裂隙体的概念, 也就是需要根据裂隙内流体的量构建一个有限厚度的界面。在这个有限厚度的界面上, 流体信息需要等效于原始裂隙内的物理量信息。在表界面力学中区分物理界面和数学界面<sup>[17]</sup>, 如图 1 所示, 宏观上看界面两侧的物理量间断, 在数学上为不连续的零

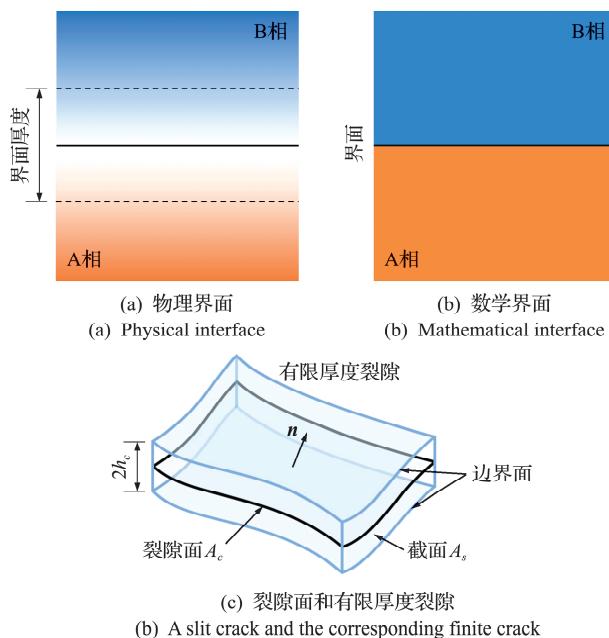


图 1 界面和有限厚度裂隙

Fig. 1 Schematics of interface and finite crack

收稿日期: 2022-03-11; 修改稿收到日期: 2022-07-18.

基金项目: 国家自然科学基金青年基金(11902213)资助项目.

作者简介: 沈文豪\*(1992-), 男, 博士, 讲师

(E-mail: shenwenhao@tyut.edu.cn).

厚度的面,而在微观上看界面具有一定厚度,和两相材料的物性以及受力条件相关。

受物理界面的启发,提出一个有限厚度的裂隙模型,如图1(c)所示,有限裂隙厚度为 $h_c$ ,距离裂隙面越近的流体微团的性质越接近裂隙内的流体微团的性质,在边界面上退化到多孔介质内流体微团的性质。该模型将二维的裂隙面和三维的多孔介质联系在一起,把裂隙面微元看作是多孔介质体微团的一部分。

## 2 双重介质有限裂隙模型

构造一个不需要修正控制方程的统一模型,将一个二维-三维混合问题简化为纯三维的问题。建立该模型主要分为三步骤。

(1) 将二维裂隙内的物理量通过对应广延量守恒等效的办法转化为三维空间内的物理量。

(2) 等效的流场和多孔介质的流场耦合,形成统一的控制方程和初始-边界条件。

(3) 将计算结果通过步骤(1)的逆过程传回裂隙。

### 2.1 裂隙流场在三维空间的等效流场

将裂隙面当作多孔介质的一部分可以有效地避免处理二维和三维流场的耦合。如在使用损伤力学处理含裂隙的问题时,将渗透率定义为损伤变量的函数<sup>[18,19]</sup>;使用相场动力学模拟时,流体输运的性质由相参数间接确定<sup>[20]</sup>。这些方法首先要解决的问题是将基质和裂隙面内的流体流速统一起来,流经某个含裂隙的多孔介质微团的总流量为

$$q_f = v_{fp} \cdot \phi_{fp} \delta A + v_{cn} \Delta_n \delta l \quad (2)$$

式中 $\phi_{fp}$ 为孔隙度, $\Delta_n$ 为裂隙面开度, $\delta A$ 和 $\delta l$ 为微团的特征面积和尺寸,对于正方体微团,二者分别为一个面的面积和边长, $v_{cn}$ 为垂直于微团边界的裂隙流体流速。下标 $f$ 为流体整体, $fp$ 为多孔介质内的流体。流经该微团的平均流速为

$$v_f = v_{fp} + v_{cn} \Delta_n / \delta l \quad (3)$$

下标 $c$ 为裂隙流体。式(3)和微团尺寸相关,在数值计算中体现为和网格尺寸相关,这由裂隙面和多孔介质的维度不同导致,需要解决广延量守恒性的问题。

裂隙面上各类物理量的定义域需要拓展至整个有限厚度裂隙。物理界面的性质并非间断,而是从一种材料逐渐过渡到另一种材料<sup>[17]</sup>,所以需要讨论物理量的定义域的拓展方法。已知某个曲面上某一物理量 $\varphi$ 的信息,在三维空间内 $\varphi$ 可以定义为

$$\varphi_{fc}(\mathbf{x}) = \iint_{A_c} \varphi_c(\mathbf{x}_c) \Delta_c(\mathbf{x}_c) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) dA_c \quad (4)$$

$\varphi_{fc}$ 为通过定义域拓展之后定义在三维空间上的物理量, $\mathbf{x}_c$ 为裂隙面上某点; $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)$ 为Dirac函数。本文使用的是三维空间的Dirac函数,所以量纲为 $L^{-3}$ ,同时裂隙上的微元体积转化为厚度和面积的乘积,量纲为 $L^3$ 。当待求点在裂隙面上时, $\varphi$ 为自身值,否则为0。将Dirac函数定义为有限区域内非零的函数,并用权函数 $W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c; h)$ 表示

$$\varphi(\mathbf{x}) = \iint_{A_c} \varphi_c(\mathbf{x}_c) \Delta_c(\mathbf{x}_c) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c; h) dA_c \quad (5)$$

这种表示方法类似SPH的核近似<sup>[15]</sup>,选用SPH核函数为权函数 $W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c; h)$ 。权函数需要满足一些附加条件,如归一性、紧致性、非负性、单调递减、对称性、光滑性和在 $h \rightarrow 0$ 时趋近于Dirac函数的性质。所以权函数满足在裂隙面上取值最大,随着与裂隙面距离的增加取值逐渐减小,并且其积分值为1(图2)。

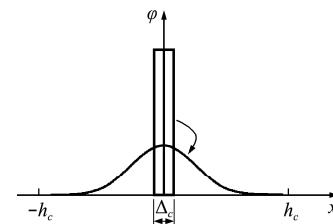


图2 物理量 $\varphi$ 从裂隙面到对应有限裂隙的定义域拓展  
Fig. 2 Extended domain of definition of quantity  $\varphi$  from a slit crack to the corresponding finite crack

式(5)能够保证各广延量的守恒性。以 $\eta$ 代表单位体积流体的质量、总压力、动量或者能量,那么原始裂隙面内的总量为 $\iint_{A_c} \eta_c(\mathbf{x}_c) \Delta_c(\mathbf{x}_c) dA_c$ ,通过有限裂隙内的总量为 $\iiint_V \phi_{fc}(\mathbf{x}) \eta_{fc}(\mathbf{x}) dV$ ,将式(5)代入并交换积分次序,则 $\eta$ 守恒的条件为 $\iiint_V \eta_{fc}(\mathbf{x}) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c; h) dV = \eta_c(\mathbf{x})$ ,当 $h \rightarrow 0$ 时,函数 $W$ 趋近于Dirac函数,上述等式成立。说明为了保证各广延量的守恒,只需要使用式(5)定义有限厚度裂隙的孔隙度。

并非所有的物理量都可以使用式(5)拓展其定义域。一些同时出现的多个物理量的组合不能简单地用式(5),如使用压强和速度计算流体做功功率,物理量拓展之后的乘积与物理量乘积的拓展并不相同。解决办法是判断各物理量在裂隙内和多孔介质内的差异,认为差异不大的物理量在有限裂隙和多孔介质内保持相同值,如弱可压缩流体的密

度变化不大。这些缓变量  $\Psi$  可定义为

$$\Psi(\mathbf{x}) = \frac{\iint_{A_c} \Psi_c(\mathbf{x}_c) \Delta_c(\mathbf{x}_c) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c; h) dA_c}{\iint_{A_c} \Delta_c(\mathbf{x}_c) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c; h) dA_c} \quad (6)$$

与式(5)对比可知,当待求点远离裂隙面时,或者积分区域截断时,抑或选取有限裂隙面的半厚度  $h_c$  与网格尺寸相比过小时,物理量  $\Psi$  都可以有效地趋近于原始裂隙面上的物理量。

## 2.2 有限裂隙和多孔介质原有物理量的耦合

建立一个统一的控制方程,将裂隙面内的流体输运方程延拓至三维空间,并与多孔介质本身的物理规律结合起来,物理量定义域的延拓按照不修改三维空间中控制方程形式的原则。在二维和三维空间中流体输运方程具有相似形式,都可以表示为流速和压强梯度之间的关系,在 Darcy 定律和 Darcy-Forchheimer 方程等表现为不同渗透率。本文模型以 Darcy 定律为例。多孔介质内和裂隙内的控制方程分别为

$$\phi_{fp}(\mathbf{x}) \mathbf{v}_{fp}(\mathbf{x}) = -\kappa_{fp}(\mathbf{x}) / \mu \cdot \nabla p_{fp}(\mathbf{x}) \quad (7)$$

$$\phi_c(\mathbf{x}_c) \mathbf{v}_c(\mathbf{x}_c) = -\kappa_c(\mathbf{x}_c) / \mu \cdot \nabla_c p_c(\mathbf{x}_c) \quad (8)$$

下标  $fp$  为多孔介质本身的信息,  $\mu$  为动力粘度,  $\mathbf{v}_{fp}$  为多孔介质的微通道内流体的实际流速,  $\nabla_c$  为定义在裂隙面上的梯度算符。在密度、速度和压强均已按照式(6)延拓的情况下,孔隙度  $\phi_c$  使用式(5)延拓定义域,为保持方程形式不变,将渗透率  $\kappa_c$  代入定义式(5)得到三维空间的渗透率  $\kappa_{fc}$ ,假设有限裂隙的流动满足下列形式,即

$$\phi_{fc}(\mathbf{x}) \mathbf{v}_{fc}(\mathbf{x}) = -\kappa_{fc}(\mathbf{x}) / \mu \cdot \nabla p_{fc}(\mathbf{x}) \quad (9)$$

则多孔介质内和有限裂隙内的流体输运控制方程满足相同的形式,即式(7,9),以此为基础构建统一的流动控制方程。为了保持物理概念描述清晰且不失有效性,假设骨架不随流体流动发生变形或者运动,所以诸如孔隙度和渗透率等物性参数不随时间发生变化。

本模型基于物理界面认为多孔介质内的流体和有限裂隙内的流体完全混合,形成一个新流体的流动。类比两物体的完全非弹性碰撞可知,这种耦合导致各部分流体的流动细节信息丢失,混合后动能有损失,如果讨论热力学和传热学过程,两种流体的混合导致内部存在热量交换,系统熵增加。由混合引入的差异在两流场参数相差较大时可以忽略。

假设裂隙体积远小于孔隙体积,裂隙流量远大于多孔介质内的流量,则在计算含水量时可以认为

$\phi_f \approx \phi_{fp}$ , 在计算流量时认为  $\phi_f \mathbf{v}_f \approx \phi_{fc} \mathbf{v}_{fc}$ 。表 1 列举了混合流体各部分的体积、质量和动量等的表达式。假设孔隙度满足线性叠加,其他广延量的总量在叠加前后相等。

$$\phi_f(\mathbf{x}) = \phi_{fc}(\mathbf{x}) + \phi_{fp}(\mathbf{x}) \quad (10)$$

$$\phi_f \Psi_f = \phi_{fc} \Psi_{fc} + \phi_{fp} \Psi_{fp} \quad (11)$$

下标  $f$  为混合之后统一模型的物理量,当  $\Psi$  分别取密度、速度和压强时,分别对应质量、动量和总压力在两种流体耦合前后相等。为了获得统一的控制方程,假设裂隙面附近流体密度变化不大,也就是说  $\rho_f = \rho_{fc} = \rho_{fp}$ , 无论对于可压缩的正压流体还是不可压缩流体,这个假设和  $p_f = p_{fc} = p_{fp}$  等效。将式(10,11)代入式(7,9)得

$$\phi_f(\mathbf{x}) \mathbf{v}_f(\mathbf{x}) = -\kappa_f(\mathbf{x}) / \mu \cdot \nabla p_f(\mathbf{x}) \quad (12)$$

式中  $\phi_f \mathbf{v}_f = \phi_{fc} \mathbf{v}_{fc} + \phi_{fp} \mathbf{v}_{fp}$ , 渗透率满足

$$\kappa_f(\mathbf{x}) = \kappa_{fc}(\mathbf{x}) + \kappa_{fp}(\mathbf{x}) \quad (13)$$

注意  $\mathbf{v}_f$  为流体真实的速度,并且真实速度本身并不满足叠加,平均速度  $\phi \mathbf{v}$  满足叠加。如果使用非线性输运方程,如 Darcy-Forchheimer 方程<sup>[21]</sup>,各渗透率和自身的流速相关,不能简单地线性相加,此时输运方程成为速度的隐式方程。

表 1 单位体积多孔介质内各物理量的组成部分  
Tab. 1 Components of the physical quantities  
in the porous media per unit volume

| 单位体积多孔介质的物理量 | 整个系统                         | 多孔介质内的流体                              | 有限裂隙内的流体                              |
|--------------|------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 体积           | $\phi_f$                     | $\phi_{fp}$                           | $\phi_{fc}$                           |
| 质量           | $\phi_f \rho_f$              | $\phi_{fp} \rho_{fp}$                 | $\phi_{fc} \rho_{fc}$                 |
| 动量           | $\phi_f \rho_f \mathbf{v}_f$ | $\phi_{fp} \rho_{fp} \mathbf{v}_{fp}$ | $\phi_{fc} \rho_{fc} \mathbf{v}_{fc}$ |

为了使方程封闭,需要补充连续性方程、描述流体密度改变的本构方程及初始和边界条件。对于弱可压缩流体的流动

$$\partial(\phi_f \rho_f) / \partial t + \nabla \cdot (\phi_f \rho_f \mathbf{v}_f) = 0 \quad (14)$$

$$\rho_f = K_f (\rho_f / \rho_{f0} - 1) \quad (15)$$

式中  $\rho_{f0}$  和  $K_f$  分别为流体的参考密度和在该密度下的体积模量。注意如果忽略了孔隙度在空间中的变化,也就是说孔隙度处处相等,则孔隙度和流体真实流速的乘积  $\phi_f \mathbf{v}_f$  组成平均流速  $\bar{\mathbf{v}}_f$ 。对于不可压缩流体在孔隙度不变的多孔介质中流动,连续性方程简化为  $\nabla \cdot \mathbf{v}_f = 0$ , 而且体积模量为无穷大,而方程(15)没有意义。为了保证和控制方程的形式相同,需要使用式(6)把初始和边界条件中裂隙面上的物理量拓展到三维空间;而流量和总压力等

广延量作为边界条件时无法直接在方程组中施加,需要通过裂隙宽度转化为速度和压强,再通过定义式延拓到三维空间。

### 2.3 有限裂隙物理量向裂隙和多孔介质内的转换

在一些实际问题中,通过有限裂隙近似模型计算的结果需要重新转化为裂隙内流体的流动信息。根据假设  $\rho_f = \rho_{fc} = \rho_{fp}$ , 裂隙面上的密度和压强可以由计算结果直接插值获得

$$\rho_c(\mathbf{x}_c) = \rho_f(\mathbf{x}_c), p_c(\mathbf{x}_c) = p_f(\mathbf{x}_c) \quad (16)$$

而速度在转化的过程中需要保持流量相等的条件,由于假设了  $\phi_f v_f \approx \phi_{fc} v_{fc}$ , 裂隙内的流速为

$$\mathbf{v}_c(\mathbf{x}_c) = \lim_{l_s \rightarrow 0} \frac{\iint_{A_s} \phi_{fc}(\mathbf{x}) v_{fc}(\mathbf{x}) dA_s}{\int_{l_s} \Delta_n(\mathbf{x}_c) dl_s} \quad (17)$$

积分区域  $A_s$  和  $l_s$  分别为有限厚度裂隙的截面和该截面沿裂隙面方向的长度,如图 1 所示。式(17)代表着变换前后裂隙流体流量相等,虽然物理意义明确,但是计算时需要合理选取有限厚度裂隙截面  $A_s$ ,不容易直接应用。考虑到任意物理量都是基于式(5,6)将定义域延拓到更高维空间,所以可以取这两式的近似逆函数,得到

$$\mathbf{v}_c(\mathbf{x}_c) = k \mathbf{v}_f(\mathbf{x}_c), k = 1 / \left[ \Delta_c(\mathbf{x}_c) \iint_{A_c} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c; h) dA_c \right] \quad (18)$$

式中  $\mathbf{v}_f(\mathbf{x}_c)$  为计算结果通过插值得到三维空间内点  $\mathbf{x}_c$  处的速度。对于平直的裂隙面,系数  $k$  为常数,不同核函数  $W$  对应不同的系数  $k$ ,一般可以直接手动积分获得。式(18)的优势在于计算简便,并且可以不通过数值积分直接得到裂隙内的流速。

将压强计算结果直接代入式(19)获得多孔介质内的物理量信息

$$\phi_{fp}(\mathbf{x}) v_{fp}(\mathbf{x}) = -\boldsymbol{\kappa}_{fp}(\mathbf{x}) / \mu \cdot \nabla p_f(\mathbf{x}) \quad (19)$$

式(19)利用了假设  $p_{fp} = p_f$ 。由于在计算裂隙内流速时假设了  $\phi_f v_f \approx \phi_{fc} v_{fc}$ , 流过多孔介质-裂隙的总流量需要直接由  $\phi_f v_f$  积分得到。

## 3 数值方法

选取 SPH 的指型核函数作为插值函数,将物性参数定义域从裂隙面上拓展到整个实体空间,

$$W(r; h) = \begin{cases} \frac{1}{\pi^{3/2} h^3} \exp\left[-\left(\frac{r}{h}\right)^2\right] & (3D) \\ \frac{1}{\pi h^2} \exp\left[-\left(\frac{r}{h}\right)^2\right] & (2D) \end{cases} \quad (20)$$

式中  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_c|$  为裂隙面上一点  $\mathbf{x}_c$  到待求点  $\mathbf{x}$  的

距离;  $h$  为光滑长度,数值越小代表物理量分布集中在中心位置的程度越高; 指型核函数的定义域为  $[0, \infty)$ , 所以有限裂隙半厚  $h_c$  应取完整流场,但是实际计算中可以根据结点间距或者光滑长度选取,如  $h_c = 3\Delta l$ 。改变  $h_c$  和  $h$  可以控制有限裂隙厚度和插值函数的紧致性,如图 3 所示。

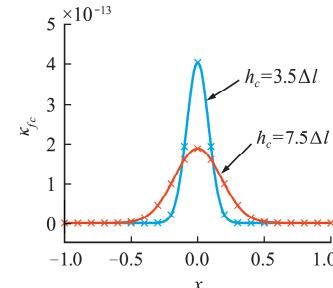


图 3 平面裂隙在三维空间的等效渗透率( $\Delta l = 0.1, h_c = 3h$ )

Fig. 3 Equivalent permeability in the three-dimension space corresponding to a planar crack ( $\Delta l = 0.1, h_c = 3h$ )

裂隙面是一个空间曲面,合理选取结点间距的情况下,面上的每个局部区域都可以离散为若干空间结点,可以分别将三维空间内任意一点  $i$  上的物性参数  $\varphi$  和压强  $p$  定义为

$$\varphi_{fc}(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^N \varphi_c(\mathbf{x}_{cj}) \Delta_N(\mathbf{x}_{cj}) W(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{cj}|; h) \delta A_{cj} \quad (21)$$

$$p_{fc}(\mathbf{x}_i) = \frac{\sum_{j=1}^N \Psi_c(\mathbf{x}_{cj}) \Delta_N(\mathbf{x}_{cj}) W(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{cj}|; h) \delta A_{cj}}{\sum_{j=1}^N \Delta_N(\mathbf{x}_{cj}) W(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{cj}|; h) \delta A_{cj}} \quad (22)$$

式中 材料参数  $\varphi$  分别取孔隙度和渗透率,  $\Psi$  取密度、速度和压强。以三维空间内的裂隙曲面为例,在离散三维空间和裂隙面过程中,分别选用三维实体单元和面单元,其离散方式可以不同,如可以分别使用网格结点和无网格结点。为了令有限厚度的裂隙内的物理量更光滑,原始裂隙面的结点和三维空间上的结点分布间距一致或者更密集。

控制方程的求解可以使用各类经典方法,本文对三维空间的求解采用有限差分方法,使用等间距的六面体网格离散,并选取 19 点差分格式;对于二维平面问题和轴对称问题使用四边形网格离散,并选取 9 点差分格式。动态问题的时间积分使用四阶龙格-库塔公式。

式(18)的系数  $k$  通过手动积分获得。假设平面裂隙上存在均匀分布的物理量  $\varphi_c$ ,与平面距离为  $z$  的点上的等效物理量  $\varphi_{fc}$  为

$$\varphi_{fc}(z) = \frac{\varphi_c \Delta_c}{\sqrt{\pi} h} \begin{cases} \exp\left(-\frac{z^2}{h^2}\right) - \exp\left(-\frac{h_c^2}{h^2}\right) & (3D) \\ \exp\left(-\frac{z^2}{h^2}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{h_c^2-z^2}}{h}\right) & (2D) \end{cases} \quad (23)$$

当  $z=0$  时, 等式右端的计算值和空间维度无关

$$\varphi_{fc}(0) \approx 0.56419 (\Delta_c/h) \varphi_c \quad (24)$$

将之和式(18)对比可得

$$k = 1.77245 (h/\Delta_c) \quad (25)$$

式(25)对二维和三维问题均适用。对于正方形或正方体网格, 当  $h_c = 3h = 3.5\Delta l$  时, 通过式(25)计算结果的相对误差为  $2.4 \times 10^{-4}$ 。

使用有限裂隙模型求解裂隙-多孔介质耦合渗流问题的具体步骤如下。

(1) 使用式(26)计算裂隙面的渗透率

$$\kappa_c(x_c) = \frac{\Delta_n^2}{12} (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \quad (26)$$

(2) 使用式(5)延拓裂隙孔隙度和渗透率, 使用式(6)延拓初始-边界条件中的密度、速度和压强。

(3) 使用式(10, 11, 13)耦合有限裂隙和多孔介质内的孔隙度、渗透率、密度、速度和压强。

(4) 使用统一的控制方程(12, 14, 15)计算整体的流动参数场, 对于不可压缩流体, 式(14)中密度为常数, 并且忽略式(15)。

(5) 使用式(16)计算裂隙内的密度和压强, 使用式(17)或式(18)计算流速, 使用式(19)计算多孔介质内的流速。

## 4 数值案例

以典型实例的形式分别对平面问题、三维问题和轴对称问题介绍有限厚度裂隙模型的应用方法, 并验证模型的有效性。各验证算例中使用的参数列入表 2。当  $\Delta l = 0.1$  m,  $h_c = 3h = 3.5\Delta l$  时, 多孔介质孔隙度是有限裂隙等效孔隙度的 414 倍; 有限裂隙内等效裂隙流量是多孔介质自身流量的 97.5 倍, 满足有限裂隙模型的假设。

表 2 数值算例中的重要参数

Tab. 2 Some major variables in the numerical tests

| 物理量  | 数值                  |
|--|---------------------|
| 多孔介质的孔隙度 $\phi_{fp}$                         | 0.2                 |
| 多孔介质的渗透率(各向同性) $\kappa_{fp}$ /m <sup>2</sup> | $1 \times 10^{-16}$ |
| 裂隙宽度 $\Delta_n$ /m                           | $1 \times 10^{-4}$  |
| 动力粘度 $\mu$ /Pa·s                             | $1 \times 10^{-2}$  |
| 参考密度 $\rho_{f0}$ /kg·m <sup>-3</sup>         | $1 \times 10^3$     |
| 体积模量 $K_f$ /Pa                               | $2 \times 10^9$     |

### 4.1 平面裂隙

首先使用一维流动来验证模型的有效性。在边长为 2 m 的正方体内存在一水平方向的平面裂隙, 弱可压缩流体在压强驱动下在多孔介质和裂隙内流动。压强边界条件满足

$$p(-L, y, z, t) = 1 \times 10^6 \text{ Pa}, p(L, y, z, t) = 0 \quad (27)$$

流体沿  $x$  轴方向流动, 该流场可以看作三维或者二维。计算过程需要合理设定时间步长, 由控制方程易知等效的非均质材料的特征时间为

$$\tau = \frac{\varphi_f \mu \Delta l^2}{K_f \kappa_f} \quad (28)$$

特征时间随不同位置的渗透率变化, 为了保证计算稳定, 时间步长小于较短的特征时间。本文使用增加裂隙面的方式, 将裂隙面向边界外延拓  $h_c$  的距离, 消除了边界引入的截断误差。

分别通过式(17, 18)计算流动达到平衡状态时裂隙面上的总流量, 二维和三维计算结果的最大相对误差分别不高于 0.23% 和 0.02%, 证明在一定精度范围内式(18)满足计算要求。图 4 绘制了裂隙面内压强分布和解析解的对比, 说明有限裂隙模型对于动态问题有很高的精度。

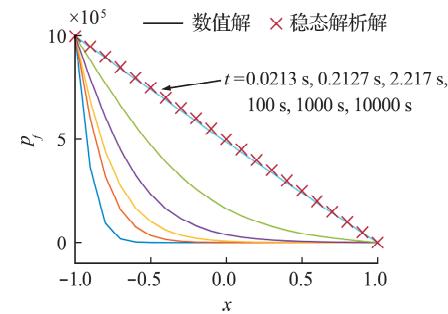


图 4 压强沿流动方向的分布  
Fig. 4 Distribution of the pressure in the fluid flow direction

### 4.2 弯曲裂隙

本算例为  $Oxy$  平面内弯曲裂隙内部压力驱动的流动问题, 沿  $x$  和  $y$  方向的流场边界分别为 4 m 和 2 m, 裂隙面的参数方程为

$$x = [2 + \cos(\pi s)]R \quad (0 \leqslant s \leqslant 1) \\ y = \begin{cases} [2 - \sin(\pi s)]R & (0 \leqslant s \leqslant 0.5) \\ R \sin(\pi s) & (0.5 \leqslant s \leqslant 1) \end{cases} \quad (29)$$

裂隙面上各离散的结点间距为  $\Delta l = \pi R \Delta s$ , 各结点的自然坐标为  $s_i = (i + 1/2)/(N + 1)$ ,  $N$  为裂隙离散的单元个数,  $R = 1$  m。边界条件为

$$p(r, 2H) = 0, p(r, 0) = 1 \times 10^6 \text{ Pa} \\ \partial p(0, y)/\partial x = \partial p(4R, y)/\partial x = 0 \quad (30)$$

渗透率通过方程(26)计算。

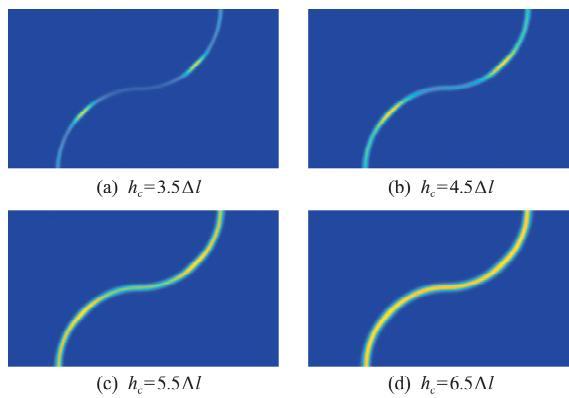


图 5 不同厚度有限裂隙的流速大小分布  
Fig. 5 Velocity magnitude distributions for various widths of the finite crack

弯曲的裂隙面增加了求解难度, 主要体现在材料物性参数随空间的不规律变化, 以及计算结果向裂隙的转化。当裂隙面曲率较大时, 式(12, 14)联立时需要谨慎处理渗透率  $\kappa_f$ , 因为渗透率的左散度影响较大, 材料的非均质性不能忽略不计。

从图 5 的算例证实有限裂隙的厚度越大, 渗透率非均质性引入的误差越小, 所以在等效渗透率  $\kappa_{fc}$  远大于多孔介质本身渗透率  $\kappa_{fp}$  的情况下, 应尽量增加有限裂隙的厚度。合理增加网格数量和裂隙面厚度可以减小误差(图 6)。然而裂隙厚度增加相当于曲面相对曲率增加, 式(18)的系数  $k$  随着曲率增加计算误差逐渐增大。综合图 5 和图 6 可以看出, 网格尺寸越小, 有关微分运算的精度越高; 在相对有限裂隙厚度 ( $h_c/\Delta l$ ) 不变的情况下, 有限裂隙厚度越大, 物性参数变化越大, 非均质性引起的计算误差升高; 相对有限裂隙厚度越大, 在网格尺寸不变的情况下, 物性参数非均质性引入的误差降低, 但是在裂隙面曲率的约束下, 不能无限制地增加有限裂隙的厚度。

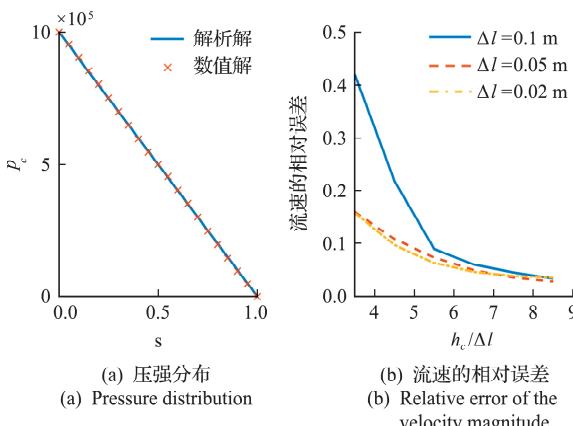


图 6 裂隙内物理量的计算结果  
Fig. 6 Numerical results in the original crack

## 5 讨 论

基于物理界面的概念, 有限裂隙的引入使多孔介质和裂隙的渗流计算统一在三维空间中, 所以该模型属于裂隙-基质双重介质模型的一类。本文模型仍具有局限性, 主要包括 Darcy 定律在裂隙流为低雷诺数( $<10$ )流动时有效, 如果考虑惯性等其他效应, 需要引入非 Darcy 流动的输运方程, 如 Darcy-Forchheimer 方程<sup>[21]</sup>; 对于大规模复杂裂隙网络, 离散裂隙模型更有优势, 因为有限裂隙具有一定宽度, 如果裂隙网络和网格尺寸相比过于密集, 则很难区分有限裂隙中的流体属于哪个裂隙; 有限裂隙等效流场和多孔介质原本存在的流场叠加时假设, (1)  $\phi_{fp} \gg \phi_{fc}$ ; (2)  $\phi_{fp} v_{fp} \ll \phi_{fc} v_{fc}$ ; (3)  $\rho_f = \rho_{fc} = \rho_{fp}$ , 流场叠加造成的偏差可以通过独立求解两个流场消除, 但是需要权衡数值模型的理论复杂程度和计算量。

有限裂隙模型可以推广到多孔介质中含宏观孔隙的问题。由于在宏观上看孔隙本身是一条曲线, 有限厚度的孔隙则成为轴线为曲线和半径为  $h$  的柱体。仿照式(5, 6), 分别对孔隙度和渗透率使用公式

$$\varphi(\mathbf{x}) = \iint_{l_a} \varphi(\mathbf{x}_a) A_a(\mathbf{x}_a) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a; h) dl_a \quad (31)$$

式中  $l_a$  为孔的轴线。如果圆孔中为层流流动, Darcy 定律修改为

$$\mathbf{v}_{fa} = -(\kappa_{fa}/\mu) \cdot \nabla_l p_{fa}, \quad \kappa_{fa} = (D^2/32) \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_l \quad (32)$$

式中  $D$  为圆孔的直径,  $\mathbf{e}_l$  为孔隙轴线的切向单位矢量, 下标  $fa$  为有限孔隙内的流体,  $a$  为原始孔隙内的流体。对速度、密度和压强等其他物理量使用公式

$$\Psi(\mathbf{x}) = \frac{\iint_{A_a} \Psi_a(\mathbf{x}_a) A_a(\mathbf{x}_a) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a; h) dl_a}{\iint_{A_a} \Delta_a(\mathbf{x}_a) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a; h) dl_a} \quad (33)$$

将孔隙内的物理量重新定义在有限厚度的孔隙内。计算完成之后, 仿照式(16, 17)或式(18)可以求出原始孔隙内的压强和速度。

## 6 结 论

本文提出了一种双重介质有限裂隙连续介质渗流力学模型。受数学界面和物理界面的启发, 该模型将零厚度的裂隙通过定义域延拓看作有限厚度和具有高渗透率的连续介质, 并通过质量、动量

和总压力等效和控制方程不变的原则,获得有限裂隙的孔隙率和渗透率物性参数、流速和压强等物理量。在网格满足精度要求情况下,有限裂隙面越薄,结果越准确。该模型的使用包含三个步骤,首先将数学裂隙面的各物理量和物性参数等效为有限裂隙模型的物理量和物性参数;然后将等效流场和多孔介质自身的流场耦合,求解得出总体流场的结果;最后将计算结果映射到裂隙面上,得到裂隙内的流速和压强。

该模型的优点在于将二维的裂隙面看作三维的多孔介质实体,使用统一的输运方程描述裂隙-多孔介质耦合的流动,并且该模型可以方便拓展到孔隙-裂隙-多孔介质耦合的流动。这一模型在三维空间求解低维-高维耦合的流动问题,可以应用于不方便在几何上实施高维度-低维度耦合求解的数值计算方法。

## 参考文献(References)：

- [1] Snow D T. Anisotropic permeability of fractured media[J]. *Water Resources Research*, 1969, **5**(6): 1273-1289.
- [2] Warren J E, Root P J. The behavior of naturally fractured reservoirs[J]. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 1963, **3**: 245-255.
- [3] Šimánek J, Jarvis N J, van Genuchten M T, et al. Review and comparison of models for describing non-equilibrium and preferential flow and transport in the vadose zone[J]. *Journal of Hydrology*, 2003, **272**(1-4): 14-35.
- [4] de Dreuzy J R, Méheust Y, Pichot G. Influence of fracture scale heterogeneity on the flow properties of three-dimensional discrete fracture networks (DFN) [J]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 2012, DOI: 10.1029/2012JB009461.
- [5] 张奇华, 邬爱清. 三维任意裂隙网络渗流模型及其解法[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, **29**(4): 720-730. (ZHANG Qi-hua, WU Ai-qing. Three-dimensional arbitrary fracture network seepage model and its solution[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2010, **29**(4): 720-730. (in Chinese))
- [6] Wang K, Sun W. A multiscale multi-permeability-poroplasticity model linked by recursive homogenizations and deep learning[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, **334**: 337-380.
- [7] Zhang H L, Yu H, Yuan X H, et al. Permeability prediction of low-resolution porous media images using autoencoder-based convolutional neural network[J]. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2022, **208**: 109589
- [8] 孙海, 姚军, Efendiev Y. 基于均匀化理论的页岩基岩运移机制尺度升级研究[J]. 中国科学(物理学、力学、天文学), 2017, **47**(11): 119-128. (SUN Hai, YAO Jun, Efendiev Y. Upscaling of gas transport in shale matrix based on homogenization theory[J]. *Scientia Sinica (Physica, Mechanica & Astronomica)*, 2017, **47**(11): 119-128. (in Chinese))
- [9] 张庆福, 黄朝琴, 姚军, 等. 缝洞型介质流动模拟的多尺度分解法[J]. 物理学报, 2019, **68**(6): 064701. (ZHANG Qing-fu, HUANG Zhao-qin, YAO Jun, et al. Numerical simulation of fractured-vuggy porous media based on gamblets[J]. *Acta Physica Sinica*, 2019, **68**(6): 064701. (in Chinese))
- [10] Shen W H, Yang F Q, Zhao Y P. Unstable crack growth in hydraulic fracturing: The combined effects of pressure and shear stress for a power-law fluid[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2020, **225**: 106245.
- [11] Shen W H. Toughness heterogeneity induced shielding effect of a bi-wing hydraulic crack in plane strain state[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2021, **242**: 107475.
- [12] Wang Z Q, Detournay E. Force on a moving liquid blister[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2021, **918**: A15.
- [13] Yan C Z, Fan H W, Zheng Y C, et al. Simulation of the thermal shock of brittle materials using the finite-discrete element method [J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2020, **115**: 142-155.
- [14] Zhu H Y, Tang X H, Li Y, et al. A coupled flow-stress-damage explicit integration numerical model of wellbore fracturing based on finite-discrete element method in natural fractured shale gas reservoir[A]. 54<sup>th</sup> US Rock Mechanics/Geomechanics Symposium, 2020.
- [15] Liu G R, Liu M B. *Smoothed Particle Hydrodynamics—A Mesh-free Particle Method* [M]. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2003.
- [16] Liu M B, Liu G R. *Particle Methods for Multi-Scale and Multi-Physics* [M]. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2013.
- [17] 赵亚溥. 表面与界面物理力学[M]. 北京: 科学出版社, 2012. (ZHAO Ya-pu. *Physical Mechanics of Surface and Interface* [M]. Beijing: Science Press, 2012. (in Chinese))
- [18] Wang Y L, Liu Z L, Yang H L, et al. Finite element analysis for wellbore stability of transversely isotropic rock with hydraulic-mechanical-damage coupling[J].

- Science China-Technological Sciences*, 2017, **60**(1): 133-145.
- [19] Li T J, Li L C, Tang C A, et al. A coupled hydraulic-mechanical-damage geotechnical model for simulation of fracture propagation in geological media during hydraulic fracturing[J]. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2019, **173**:1390-1416.
- [20] Yi L P, Waisman H, Yang Z Z, et al. A consistent phase field model for hydraulic fracture propagation in poroelastic media[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, **372**:113396.
- [21] 赵亚溥. 近代连续介质力学[M]. 北京: 科学出版社, 2016. (ZHAO Ya-pu. *Modern Continuum Mechanics* [M]. Beijing: Science Press, 2016. (in Chinese))

## A finite crack seepage model for dual media based on the physical interface

WU Xuan<sup>1,2</sup>, SHEN Wen-hao<sup>\*1,2</sup>, WANG Zhi-hua<sup>1,2</sup>, HUANG Long-zhou<sup>1,2</sup>

(1. Institute of Applied Mechanics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China;

2. College of Mechanical and Vehicle Engineering, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China)

**Abstract:** There are various mathematical and mechanical models, based on the continuum mechanics or discrete cracks, for the flow through fractured porous media. Inspired by the physical interface, a new finite crack continuum mechanics model is proposed, which can be used for macroscopic pore-fracture-porous media. As a dual porosity/permeability model, this model converts the low-dimensional fluid flow on curves and surfaces into a three-dimensional flow field. The three-dimensional flow field is coupled with that of the porous media, and a universal mathematical model is built, including governing transport equations and initial and boundary conditions. This approximate model provides a novel idea for numerical calculation methods, such as meshless particle-based methods (e.g., smoothed particle hydrodynamics), that are inconvenient to solve multiple-dimension problems.

**Key words:** finite crack; seepage model; physical interface; fractured rock; continuum mechanics

引用本文/Cite this paper:

吴璇, 沈文豪, 王志华, 等. 基于物理界面的双重介质有限裂隙渗流模型[J]. 计算力学学报, 2023, **40**(5):787-794.

WU Xuan, SHEN Wen-hao, WANG Zhi-hua, et al. A finite crack seepage model for dual media based on the physical interface[J].

*Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2023, **40**(5):787-794.