

考虑参数不确定性的非线性梁随机振动分析

吴鹏辉¹, 肖进², 王纪磊¹, 赵岩^{*1,3}

(1. 大连理工大学 工程力学系, 大连 116023; 2. 北京宇航系统工程研究所, 北京 100076;

3. 大连理工大学宁波研究院, 宁波 315016)

摘要:非线性系统的随机振动分析一直是结构动力学领域中的难点,已有一些研究表明基于矩等效的线性化方法在功率谱预测上会得到不恰当的分析结果;另一方面,由于不确定性在实际工程中普遍存在,如果同时考虑非线性和不确定性,更是显著增加了问题难度。本文以具有非线性非理想边界梁为研究对象,基于梁模型的动力学微分方程推导了对应的广义频响函数,并应用 Volterra 级数理论建立了非线性系统随机振动的谱分析方法,最后,结合蒙特卡洛抽样方法计算了具有参数不确定性非线性梁响应功率谱的均值和方差,讨论了不确定性对结构随机振动响应统计特征的影响。

关键词:随机振动;不确定性;非线性;Volterra 级数;功率谱分析

中图分类号: O324

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2023)05-0718-06

1 引言

在工程问题研究中,机械结构和系统的振动响应分析一般采用线性模型和线性求解方法。线性模型的模态分析、谐波响应分析和随机振动分析已得到广泛使用,且均在商业软件中得到实现。然而,在很多实际情况下,线性分析方法无法对一些实验结果进行解释,必须采用非线性模型来描述。为了能够更准确地对非线性系统进行建模和分析,并解决相关的问题,科研人员发展了各种理论和方法。Volterra 级数法是其中应用较为广泛的方法之一,其广泛应用于机械工程、电子工程、通信工程和生物医学工程等诸多工程领域的非线性系统建模和辨识^[1,2]。非线性系统通常表现出更加复杂的力学行为,如在简谐载荷作用下,非线性系统在频域响应结果中会表现出超谐波、次谐波和互调干扰等现象;而在随机载荷激励下也有刚度硬化和刚度软化等现象。与系统受宽带激励相比,实际系统更多时候受到的激励为窄带随机激励,研究发现非线性系统在窄带激励作用下会产生更多令人感兴

趣的现象^[3]。

对于非线性系统的随机振动分析,应用较为广泛的是基于矩等效的线性化方法,但矩等效方法只能保证积分等效,在功率谱响应预测上会给出不恰当的分析结果^[4]。在实际应用上,从频域直接进行非线性系统的谱分析具有极大的吸引力,线性系统的随机振动谱分析理论框架已经十分完善,相比之下,由于非线性系统的本质困难,直接针对非线性系统的频域响应研究还不是很多。针对上述研究背景,本文基于 Volterra 级数理论和蒙特卡洛抽样方法开展了具有不确定参数非线性梁随机振动功率谱分析方法研究。

2 结构动力学方程和广义频响函数

2.1 结构模型描述与动力学微分方程

梁是工程结构中比较常用的一类典型结构件。以受随机惯性加速度载荷作用的具有弹性边界条件几何非线性非理想边界梁为研究对象,开展结果随机振动功率谱密度分析。采用 Nayfeh^[5]提出的梁模型方程,如图 1 所示,动力学微分方程为

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial w}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + T(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \rho A a_f(t) \quad (1)$$

式中 ρ 为材料的密度, A 为梁的横截面积, w 为梁的竖向位移, μ 为粘性阻尼系数, E 为弹性模量, I 为横截面惯性矩, $a_f(t)$ 为梁两端的基础加速度激励, t 为时间, x 为横坐标, $T(t)$ 为梁所受的张力

收稿日期:2023-05-25;修改稿收到日期:2023-07-20.

基金项目:国家自然科学基金(11772084;U1906233);国家重点研发计划(2017YFC0307203);山东省重点研发计划(2019JZZY010801);中央高校基础研究经费(DUT22ZD209)资助项目。

作者简介:赵岩*(1974-),男,博士,教授

(E-mail:yzhao@dlut.edu.cn).

且满足

$$T(t) = -EA \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (\forall x \in [0, l]) \quad (2)$$

式中 u 为梁的轴向位移。由于本文的梁结构和其所受激励均为对称布置,因此梁的竖向位移 w 也是对称的,为了简化计算,可以只研究梁的一半。

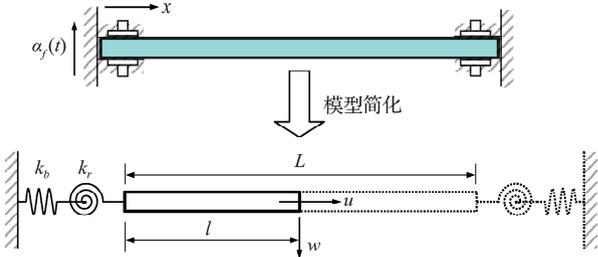


图1 具有弹性边界非线性梁模型
Fig. 1 Nonlinear beam model

对式(1)引入边界条件并变换到模态坐标下,定义模态集合为 N ,可以得到梁的中部竖向位移 $w(l)$ 在模态坐标下的表达形式 $w(l) = \sum \omega_i$,详细的理论推导可以参见文献[6]。

$$\frac{d^2 \omega_i}{dt^2} + \frac{\mu}{\rho A} \frac{d \omega_i}{dt} + \Omega_i^2 \omega_i + \sum_{(j,k,m) \in N^3} \Gamma_{ijkm} \cdot \omega_j \omega_k \omega_m = \Gamma_i a_f(t) \quad (\forall i \in N) \quad (3)$$

式中

$$\left\{ \begin{aligned} \Gamma_{ijkm} &= \frac{E Y_i(l)}{2 \rho l^2 Y_j(l) Y_k(l) Y_m(l)} \left(1 + \frac{EA}{l k_b} \right)^{-1} \times \\ &\quad \left(\int_0^l \frac{dY_j}{dx} \frac{dY_k}{dx} dx \right) \left(\int_0^l \frac{dY_m}{dx} \frac{dY_i}{dx} dx \right) \\ \omega_i(t) &= \frac{Y_i(l)}{l} \int_0^l w(x, t) Y_i(x) dx \\ \Omega_i &= \sqrt{EI / (\rho A)} \lambda_i^2 / l^2 \\ \Gamma_i &= \frac{Y_i(l)}{l} \int_0^l Y_i(x) dx \end{aligned} \right. \quad (4)$$

式中 λ_i^2 为式(5)的第 i 个解,

$$(1 - EI \lambda_i^2 / k_r^2) \cos(\lambda_i) \sinh(\lambda_i) + [1 + EI \lambda_i^2 / (k_r l^2)] \sin(\lambda_i) \cosh(\lambda_i) = 0 \quad (5)$$

式(4)中, Y_i 可以写为

$$Y_i(x) = -\tan(\lambda_i) \sin\left(\frac{\lambda_i x}{l}\right) - \cos\left(\frac{\lambda_i x}{l}\right) - \tanh(\lambda_i) \sinh\left(\frac{\lambda_i x}{l}\right) + \cosh\left(\frac{\lambda_i x}{l}\right) \quad (6)$$

本文研究的频率范围在 200 Hz 之内,梁结构的一阶模态起主要作用,即 $N = \{1\}$,则梁的动力学方程(3)最终可以简化为

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \frac{\mu}{\rho A} \frac{dw}{dt} + \left(\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \frac{\lambda_1^2}{l^2} \right)^2 w - \frac{E}{2 \rho l^2 Y_1(l)^2} \times \left(1 + \frac{EA}{l k_b} \right)^{-1} \left[\int_0^l \left(\frac{dY_1}{dx} \right)^2 dx \right]^2 w^3 = \frac{Y_1(l)}{l} \int_0^l Y_1(x) dx \cdot a_f(t) \quad (7)$$

2.2 广义频响函数

广义频响函数 GFRF (Generalized frequency response function) 是 Volterra 级数理论中的一个重要概念,其可以像线性系统的频响函数一样表征非线性系统的频响特性。广义频响函数的求解方法可以大致分为两类,一类是解析方法,即通过非线性系统的解析表达直接求解;另一类则是辨识方法,即通过系统的输入输出数据辨识系统的广义频响函数。针对本文系统的动力学模型,可以采用解析方法求解广义频响函数。

在广义频响函数的解析方法中,增长指数法^[7]是一种形式简洁的方法,该方法可以根据系统方程的奇偶性简化运算。增长指数法的核心原理是假设输入信号是指定数目的不同增长指数之和;通过对系统进行动力学响应求解,再将求解得到的输出信号进行同指数的归类,最终可得到欲求的各阶广义频响函数。与传统完全基于时域分析的直接积分方法相比,该方法可在保证计算精度的前提下显著提高计算效率。

用输入函数和输出函数的幂级数替换原函数,假设输入为

$$x(t) = \sum_n e^{\lambda_i t} \quad (8)$$

并假设输出为

$$y(t) = \sum_m G_{m_1, \dots, m_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) e^{(m_1 \lambda_1 + \dots + m_n \lambda_n) t} \quad (9)$$

将式(8,9)代入动力学微分方程,求解各阶 G 函数,

$$\left\{ \begin{aligned} &G_{1,0,\dots,0}(\lambda_1) \\ &G_{1,1,0,\dots,0}(\lambda_1, \lambda_2) \\ &\vdots \\ &G_{1,\dots,1}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \end{aligned} \right. \quad (10)$$

通过使相同的指数系数相等,并令 $\lambda_n = i \omega_n$,即可得到待求对称广义频响函数的线性方程组,

$$\left\{ \begin{aligned} H_1(\omega) &= G_{1,0,\dots,0}(\omega) \\ H_2(\omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{2!} G_{1,1,0,\dots,0}(\omega_1, \omega_2) \\ &\vdots \\ H_n(\omega_1, \dots, \omega_n) &= \frac{1}{n!} G_{1,\dots,1}(\omega_1, \dots, \omega_n) \end{aligned} \right. \quad (11)$$

应用增长指数法,推导方程(7)的前 3 阶广义

频响函数,得到

$$\begin{cases} H_1(\omega) = \left(\frac{Y_1(l)}{l} \int_0^l Y_1(x) dx \right) / \left[-\frac{i\mu\omega^3}{\rho A} + \left(\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \frac{\lambda_1^2}{l^2} \right)^2 \right] \\ H_2(\omega_1, \omega_2) = 0 \\ H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{-E}{2\rho l^2 Y_1(l)^2} \left(1 + \frac{EA}{lk_b} \right)^{-1} \left[\int_0^l \left(\frac{dY_1}{dx} \right)^2 dx \right]^2 \prod_{i=1}^3 H_1(\omega_i) \\ \frac{i\mu}{\rho A} \left(\sum_{i=1}^3 \omega_i \right) - \sum_{i=1}^3 \omega_i^2 - 2\omega_1\omega_2 - 2\omega_2\omega_3 - 2\omega_1\omega_3 + \left(\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \frac{\lambda_1^2}{l^2} \right)^2 \end{cases} \quad (12)$$

3 基于 Volterra 级数非线性梁随机振动响应功率谱分析

3.1 基于 Volterra 级数的功率谱分析

在任意的 t 时刻下,线性系统受输入 $x(t)$ 产生的响应 $y(t)$ 可以用杜哈梅积分表示

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \quad (13)$$

式中 $h(\tau)$ 为描述系统受到单位脉冲产生响应的函数,称为脉冲响应函数。脉冲响应函数 $h(\tau)$ 和频响函数 $H(\omega)$ 构成傅里叶变换对,即

$$\begin{cases} h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \\ H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \end{cases} \quad (14)$$

式(14)广泛用于线性系统的动力学响应分析中。

Volterra 将式(13)进行了扩展^[8],上述思想应用于非线性系统。此时,非线性系统响应表示为无穷级数,即

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \cdots, \tau_n) \times x(t-\tau_1) \cdots x(t-\tau_n) d\tau_1 \cdots d\tau_n \quad (15)$$

式中 $h_n(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ 称为 Volterra 核,是脉冲响应函数的广义化函数;频域上的 Volterra 核函数称为广义频响函数^[7],对应的频域表达为

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= Y_1(\omega) + Y_2(\omega) + Y_3(\omega) + \cdots = H_1(\omega)X(\omega) + \\ &\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_2(\omega_1, \omega - \omega_1) X(\omega_1) X(\omega - \omega_1) d\omega_1 + \\ &\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H_3(\omega_1, \omega_2, \omega - \omega_1 - \omega_2) \times \\ &X(\omega_1) X(\omega_2) X(\omega - \omega_1 - \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \end{aligned} \quad (16)$$

式中 H_2 和 H_3 为广义频响函数,是与线性系统类似的理论框架描述, n 阶脉冲响应函数 $h_n(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ 和 n 阶广义频响函数 $H_n(\omega_1, \cdots, \omega_n)$ 构成多维傅里叶变换对,即

$$\begin{cases} h_n(\tau_1, \cdots, \tau_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\omega_1, \cdots, \omega_n) \times \\ e^{i\sum_{j=1}^n \omega_j \tau_j} d\omega_1 \cdots d\omega_n \\ H_n(\omega_1, \cdots, \omega_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \cdots, \tau_n) \times \\ e^{-i\sum_{j=1}^n \omega_j \tau_j} d\tau_1 \cdots d\tau_n \end{cases}$$

将 $y(t_1)$ 和 $y(t_2)$ 分别按照式(15)进行 Volterra 级数展开,则响应 $y(t)$ 的自相关函数可表示为

$$R_{yy}(t_1, t_2) = E \left\{ \left[\sum_{m=1}^{\infty} y_m(t_1) \right] \left[\sum_{n=1}^{\infty} y_n(t_2) \right] \right\} = \sum_{m,n=1}^{\infty} R_{y_m y_n}(t_1, t_2) \quad (18)$$

式中 $R_{y_m y_n}(t_1, t_2)$ 称为部分自相关函数,本文引入多维部分自相关函数 $R_{y_m y_n}^{(m+n)}(t_1, \cdots, t_{m+n})$,显然有^[7]

$$R_{y_m y_n}^{(m+n)}(t_1, t_2) = R_{y_m y_n}^{(m+n)}(t_1, \cdots, t_{m+n})_{t_1=\cdots=t_m=t_1, t_{m+1}=\cdots=t_{m+n}=t_2} \quad (19)$$

借助于广义脉冲响应函数,响应的多维部分自相关函数可以表示为

$$R_{y_m y_n}^{(m+n)}(t_1, \cdots, t_{m+n}) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{m+n} h_m(\tau_1, \cdots, \tau_m) \times R_{xx}^{(m+n)}(t_1 - \tau_1, \cdots, t_m - \tau_m) \times h_n(\tau_{m+1}, \cdots, \tau_{m+n}) d\tau_1 \cdots d\tau_{m+n} \quad (20)$$

则多维部分自功率谱密度函数 $S_{Y_m Y_n}^{(m+n)}$ 和多维部分自相关函数 $R_{Y_m Y_n}^{(m+n)}$ 有维纳-辛钦关系^[7]为

$$\begin{cases} S_{Y_m Y_n}^{(m+n)}(\omega_1, \cdots, \omega_{m+n}) = \mathcal{F}_n [R_{Y_m Y_n}^{(m+n)}(t_1, \cdots, t_{m+n})] \\ R_{Y_m Y_n}^{(m+n)}(t_1, \cdots, t_{m+n}) = \mathcal{F}_n^{-1} [S_{Y_m Y_n}^{(m+n)}(\omega_1, \cdots, \omega_{m+n})] \end{cases} \quad (21)$$

对式(20)进行傅里叶变换,得到多维部分自功率谱密度函数,即

$$S_{Y_m Y_n}^{(m+n)}(\omega_1, \cdots, \omega_{m+n}) = H_m(\omega_1, \cdots, \omega_m) \times S_{XX}^{(m+n)}(\omega_1, \cdots, \omega_{m+n}) H_n(\omega_{m+1}, \cdots, \omega_{m+n}) \quad (22)$$

当输入载荷为零均值高斯随机过程时,多维部分自功率谱密度函数 $S_{XX}^{(m+n)}(\omega_1, \cdots, \omega_{m+n})$ 具有如下性质,

$$S_{XX}^{(m+n)}(\omega_1, \cdots, \omega_m, \cdots, \omega_{m+n}) = \begin{cases} 0 & (m+n \text{ 为奇数}) \\ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{m+n} S_{XX}^{(2)}(\omega_i, \omega_j) & (m+n \text{ 为偶数}) \end{cases} \quad (23)$$

式中 $\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{m+n} S_{XX}^{(2)}(\omega_i, \omega_j)$ 为对 $S_{XX}^{(2)}(\omega_i, \omega_j)$ 先求积再求和, (ω_i, ω_j) 为 $\omega_1 \cdots \omega_{m+n}$ 中任意两个组合,共有 $(2\xi)! / [(\xi)! 2^\xi]$ ($\xi = (m+n)/2$) 种排列方法。

当 $m+n$ 为偶数时,式(22)可进一步转化为

$$S_{Y_m Y_n}^{(m+n)}(\omega_1, \dots, \omega_{m+n}) = \sum_{(2\xi)!/[(\xi)! 2^\xi]} H_m(\omega_1, \dots, \omega_m) \times \left[\sum_{i,j=1}^{m+n} \prod_{i \neq j} S_{XX}^{(2)}(\omega_i, \omega_j) \right] H_n(\omega_{m+1}, \dots, \omega_{m+n}) \quad (24)$$

对于二维谱,若为平稳随机过程,可以令 $t_j = t_i + \tau$, $R_{xx}^{(2)}(t_i, t_j) = R_{xx}(\tau)$, 有

$$S_{XX}^{(2)}(\omega_i, \omega_j) = \mathcal{F}[R_{xx}^{(2)}(t_i, t_j)] = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} R_{xx}^{(2)}(t_i, t_j) e^{-i[\omega_i t_i + \omega_j (t_i + \tau)]} dt_i dt_j = S_{XX}(\omega_i) \delta(\omega_i + \omega_j) \quad (25)$$

则式(24)可进一步转化为

$$S_{Y_m Y_n}^{(m+n)}(\omega_1, \dots, \omega_{m+n}) = \sum_{(2\xi)!/[(\xi)! 2^\xi]} H_m(\omega_1, \dots, \omega_m) \times \left[\sum_{i,j=1}^{m+n} \prod_{i \neq j} S_{XX}(\omega_i) \delta(\omega_i + \omega_j) \right] H_n(\omega_{m+1}, \dots, \omega_{m+n}) \quad (26)$$

最后,通过积分可以将多维谱转换为物理功率谱,

$$S_{Y_m Y_n}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} S_{Y_m Y_n}^{(m+n)}(\omega_1, \dots, \omega_{m+n}) \times \delta(\omega - \omega_{m+1} - \dots - \omega_{m+n}) d\omega_1 \dots d\omega_{m+n} \quad (27)$$

Volterra 是无穷级数,其收敛性判别是一个亟待解决的问题,仍然较难回答^[10]。本文暂不对此问题进行研究,仅用截断的 Volterra 级数近似表示。则功率谱密度的 Volterra 级数表达为

$$S_{YY}(\omega) = S_{Y_1 Y_1}(\omega) + S_{Y_2 Y_2}(\omega) + S_{Y_3 Y_3}(\omega) + S_{Y_3 Y_1}(\omega) + S_{Y_1 Y_3}(\omega) + o(\omega) \quad (28)$$

式中 $S_{Y_2 Y_2}(\omega), S_{Y_3 Y_3}(\omega)$ 以及更高阶项可以采用留数定理或数值积分进行计算求解,本文采用数值积分方法进行计算^[11]。

3.2 考虑参数认知不确定性的非线性梁响应分析

当非线性系统的某些系统参数包含认知不确定性时,可以使用随机方法研究模型参数不确定性的传播。随机不确定度量化通常采用概率相关的方法,蒙特卡洛方法 MC(Monte Carlo)是一种简单通用的抽样方法。该方法通过构造随机参数并从已知的空间中进行抽样,得到大量抽样结果,之后对抽样结果进行计算分析,最终获取随机变量的统计信息。

考虑到结构的加工制造常受到加工装备与人为因素的影响,实际生产出的各种产品,其材料属性和尺寸参数都存在不确定性,本文考虑非线性梁的弹性模量 E 和梁的长度 L 服从有界高斯随机分布,即

$$\begin{cases} \eta_E \sim N(\mu_E, \sigma_E^2) \\ \eta_L \sim N(\mu_L, \sigma_L^2) \end{cases} \quad (29)$$

则随机变量参数 η_E 和 η_L 对应的变异系数分别为

$$\begin{cases} c_{vE} = \sigma_E / \mu_E \\ c_{vL} = \sigma_L / \mu_L \end{cases} \quad (30)$$

则可以定义一个随机变量集合 $\eta_{E,L} = (\eta_E, \eta_L)$, 那么非线性梁的响应功率谱也将转换为服从一定分布的随机函数。

$$S_{YY}(\omega | \eta_{E,L}) = S_{Y_1 Y_1}(\omega | \eta_{E,L}) + S_{Y_2 Y_2}(\omega | \eta_{E,L}) + S_{Y_3 Y_3}(\omega | \eta_{E,L}) + \dots \quad (31)$$

基于 MC 方法,非线性梁响应功率谱的期望可以表达为

$$\mu_{S_{YY}}(\omega | \eta_{E,L}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N S_{YY}^j(\omega | \eta_{E,L}) \quad (32)$$

式中 S_{YY}^j 为第 j 个样本的响应功率谱。进一步,非线性梁响应功率谱标准差的计算公式为

$$\sigma_{S_{YY}}(\omega | \eta_{E,L}) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N [S_{YY}^j(\omega | \eta_{E,L}) - \mu_{S_{YY}}(\omega | \eta_{E,L})]^2} \quad (33)$$

4 数值算例

研究对象为本文描述的梁模型(图 1),相关物理参数列入表 1。梁受的加速度功率谱如图 2 所示,该功率谱分别位于 50 Hz 和 100 Hz 处的两个峰。其中,位于 50 Hz 处的峰值更大一些,这是由于 50 Hz 处接近非线性梁的一阶固有频率,如此构造是为了更好地激起结构的非线性特性。而在 100 Hz 设计峰则是为了表明本文方法适合于任意形状的输入功率谱。

表 1 非线性梁的物理和几何参数

Tab. 1 Physical and geometric parameters of nonlinear beam

参数	符号	单位	值
密度	ρ	kg/m ³	2.70×10^3
横截面积	A	m ²	1.80×10^{-4}
弹性模量	E	Pa	7.30×10^{10}
截面惯性矩	I	m ⁴	1.22×10^{-9}
纵向刚度	K_b	N/m	1.00×10^8
弯曲刚度	K_r	N/rad	1.20×10^5
阻尼系数	μ	kg/(m ² ·s)	3
梁的长度	L	m	1
梁的半长	l	m	0.5

为了验证本文方法的正确性并体现该方法在非线性随机振动分析上的优势,计算了弹性模量 E 和梁长 L 的变异系数均为 5% 时单个样本下的分析结果,并将 Volterra 级数的计算结果与龙格库塔计算 50 个样本响应曲线再利用周期图法做功率谱估计方法 RK(Runge-Kutta method)进行了对比,结果如图 3 所示。

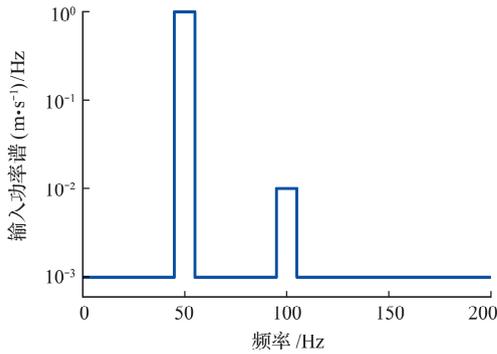


图2 输入功率谱

Fig. 2 Input power spectral density

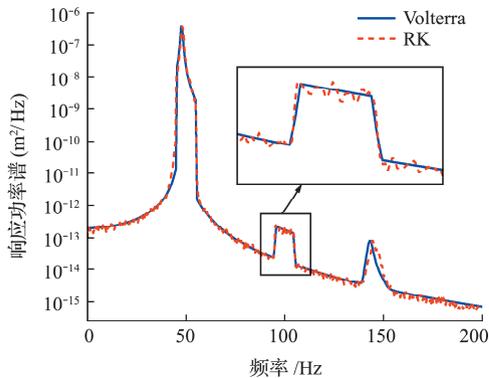


图3 两种方法计算响应功率谱比较

Fig. 3 Comparison of PSD response using different methods

图3中Volterra级数的计算时间为1.89 s, RK方法的计算时间为20.78 s,对于功率谱分析,本文方法在计算效率上具有极大的优势。Volterra级数作为一种解析方法得到的功率谱比RK方法更光滑,也可称为理论功率谱的直接分析方法。

由于功率谱是频域能量分布的描述,为了对比Volterra级数方法和RK方法的相对误差,给出了如下定义,

$$R = \text{abs}(A_{\text{Volterra}} - A_{\text{RK}}) / A_{\text{RK}} \quad (34)$$

式中 A_{Volterra} 和 A_{RK} 分别为两种方法计算得到的功率谱面积。图3对应的相对误差 R 为4.06%。

对随机结构进行分析,利用Volterra级数计算了1000组随机参数下的响应功率谱曲线(弹性模量 E 和梁长 L 的变异系数为5%),如图4所示。可以看出,相比于输入功率谱在50 Hz和100 Hz左右的功率谱峰,在响应功率谱150 Hz左右也出现了一个峰值,这个频率在系统输入中找不到对应的峰值,因此这个峰是由非线性引起的。还可以看出,由非线性梁模型的弹性模量 E 和梁的长度 L 产生的不确定性,会使梁的位移响应功率谱峰值在频率上发生偏移。

基于响应样本数据(图4),利用式(32,33)计算非线性梁位移响应功率谱的均值和标准差。图5为模型参数 $\eta_{E,L}$ 的变异系数为5%,8%和

10%情况下的位移响应功率谱均值和标准差。可以看出,模型参数的变异性会导致响应的统计特性发生显著的变化。结构响应的一阶共振峰(50 Hz附近)和非线性峰(150 Hz附近)不再是确定的频率,而是处在一个频率范围内。

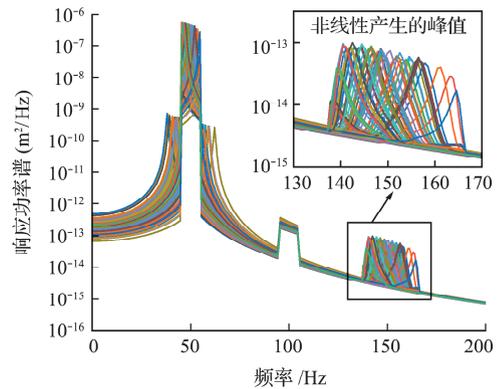


图4 响应功率谱样本曲线

Fig. 4 Curve of the samples of response PSD

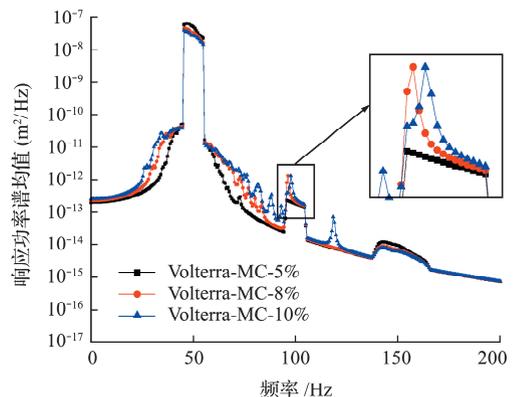
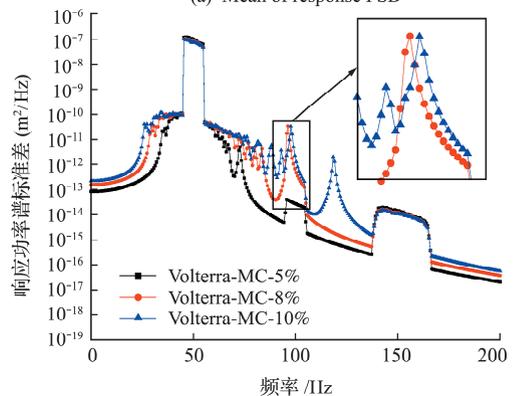
(a) 响应功率谱的均值
(a) Mean of response PSD(b) 响应功率谱的标准差
(b) Standard deviation of response PSD

图5 不同变异条件下响应功率谱的均值和标准差

Fig. 5 Mean and standard deviation of response PSD under different variation conditions

5 结论

本文在考虑模型参数认知不确定性的前提下,基于Volterra级数理论和MC抽样方法,对非线性

性梁模型的随机振动响应功率谱进行了分析,计算了结构响应功率谱的均值和方差。Volterra 级数作为频域内的计算方法,其计算速度较时域积分的 RK 方法具有更好的效率。本文方法为研究参数不确定性对结构响应功率谱的影响提供一定的依据。

参考文献(References):

- [1] 沃顿,汤姆林森. 结构动力学中的非线性问题[M]. 陈前,高雪,译. 北京:机械工业出版社,2012. (Worden K, Tomlinson G R. *Nonlinearity in Structural Dynamics*[M]. CHEN Qian, GAO Xue, translated. Beijing: China Machine Press, 2012. (in Chinese))
- [2] 彭志科,程长明. Volterra 级数理论研究进展与展望[J]. 科学通报, 2015, **60**(20):1874-88. (PENG Zhike, CHENG Chang-ming. Volterra series theory: A state-of-the-art review[J]. *Chinese Science Bulletin*, 2015, **60**(20):1874-1888. (in Chinese))
- [3] Soize C. Stochastic linearization method with random parameters for SDOF nonlinear dynamical systems: Prediction and identification procedures [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1995, **10**(3):143-152.
- [4] Boussaa D, Bouc R. Elastic perfectly plastic oscillator under random loads: Linearization and response power spectral density [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2019, **440**:113-128.
- [5] Nayfeh A H. Nonlinear transverse vibrations of beams with properties that vary along the length [J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1973, **53**(3):766-770.
- [6] Roncen T, Lambelin J P, Sinou J J. Nonlinear vibrations of a beam with non-ideal boundary conditions and stochastic excitations-experiments, modeling and simulations [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019, **74**:14-29.
- [7] Rugh W J. *Nonlinear System Theory — The Volterra/Wiener Approach* [M]. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1981.
- [8] Volterra V, In F L, Long M. *Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations* [M]. London: Blackie & Son, 1930.
- [9] Laning J H, Battin R H. *Random Processes in Automatic Control* [M]. New York: McGraw-Hill, 1956.
- [10] Worden K, Tomlinson G R. *Nonlinearity in Structural Dynamics: Detection, Identification and Modelling* [M]. Bristol: Institute of Physics Publish, 2001.
- [11] Wu P H, Zhao Y, Xu X H. Power spectral density analysis for nonlinear systems based on Volterra series [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(12):1743-1758.

Random vibration analysis of non-linear beams with parameter uncertainties

WU Peng-hui¹, XIAO Jin², WANG Ji-lei¹, ZHAO Yan^{*1,3}

(1. Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China;

2. Beijing Aerospace System Engineering Institute, Beijing 100076, China;

3. Ningbo Research Institute of Dalian University of Technology, Ningbo 315016, China)

Abstract: The analysis of random vibration of nonlinear systems has been a difficult area in the field of structural dynamics. Some studies have shown that linearization methods based on moment equivalence give inappropriate analytical results of power spectral density (PSD). On the other hand, since uncertainty is prevalent in practical engineering, it increases the problem difficulty significantly if both nonlinearity and uncertainty are considered. In this paper, beams with a nonlinear nonideal boundary are studied. The corresponding generalized frequency response function is derived based on the differential equation of the beam model. And the spectral analysis method of the nonlinear system with random vibration is established by the Volterra series theory. Finally, the mean and variance of the response PSD of the nonlinear beam with parametric uncertainty are calculated by combining the Monte Carlo method. The influence of uncertainty on the statistical characteristics of the random vibration response of the structure is discussed. The work in this paper is a reference for the prediction and control of stochastic vibration of practical nonlinear systems.

Key words: random vibration; uncertainty; nonlinearity; Volterra series; PSD Analysis

引用本文/Cite this paper:

吴鹏辉,肖进,王纪磊,等. 考虑参数不确定性的非线性梁随机振动分析[J]. 计算力学学报, 2023, **40**(5):718-723.

WU Peng-hui, XIAO Jin, WANG Ji-lei, et al. Random vibration analysis of non-linear beams with parameter uncertainties [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2023, **40**(5):718-723.