

## 一种结构响应预测策略与新可靠度分析方法

周锦<sup>1</sup>, 李杰<sup>\*1,2</sup>

(1. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092; 2. 上海市防灾救灾研究所, 上海 200092)

**摘要:**工程结构在服役期不可避免地遭受各种不确定因素的侵害,为客观科学地描述不确定因素的影响,可靠度理论得以产生和发展。但传统的可靠度分析方法囿于精度和效率等原因,难以应用于实际工程结构。近年来基于概率守恒原理,概率密度演化理论提出并得到发展。但对复杂的工程结构,效率低下等问题依然有待解决。鉴于此,本文提出两级剖分概率空间的概念,以粗剖分获得的少量代表样本构成训练集,训练 Kriging 模型;然后细剖分概率空间,通过训练的 Kriging 模型预测加密样本响应提高分析效率。基于此,结合以概率密度演化理论为基础的物理综合法,提出了一种新的可靠度分析方法。通过对一解析系统和一幢钢筋混凝土框架结构的响应预测与可靠度分析,证明了新提出方法的精度和效率。

**关键词:**可靠度分析;概率密度演化理论;Kriging 模型;时程预测

**中图分类号:** TU375.4; O213.2

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1007-4708(2023)05-0686-07

## 1 引言

工程结构在服役期不可避免地会遭受各种不确定性因素的作用,这些因素可大致分为结构参数不确定性和外部激励不确定性。为科学地评估不确定性因素对结构响应的影响,经系统地发展形成了随机结构分析和随机振动<sup>[1]</sup>两大分支学科。前者研究结构初始条件和结构参数等不确定性对结构响应的影响,后者则着眼于外部激励的随机性,如地震和风等动力灾害。实际工程结构往往两者兼而有之,考虑各种不确定因素的结构响应分析称为复合随机振动分析问题。精细地考量系统各个随机因素的影响,是保证结构安全服役的关键。

为度量各种不确定性因素的影响,人们往往通过设置某关注量功能函数及其阈值,定量地考察结构在既定的设计条件下安全服役的可能性。这种可能性以概率来表示,称为可靠度,即

$$R = \int_{\Omega_s} G(\Theta) d\Theta \quad (1)$$

式中  $R$  为系统可靠度,  $\Theta = [\Theta_1, \dots, \Theta_n]^T$  为系统基本随机变量构成的列向量,  $n$  为基本随机变量的个数,  $G(\Theta)$  为功能函数,  $\Omega_s$  为安全域。通常,式(1)以失效概率表示

$$P_f = 1 - R = \int_{\Omega_f} G(\Theta) d\Theta \quad (2)$$

式中  $P_f$  为失效概率,  $\Omega_f$  为失效域,  $\Omega = \Omega_s \cup \Omega_f$ ,  $\emptyset = \Omega_s \cap \Omega_f$ 。

直接求解式(1)或式(2)不易,主要困难包括,(1)由于实际问题中随机变量  $\Theta$  的数目  $n$  并不唯一,因此  $G(\Theta)$  往往是一高维函数,求解式(1)或式(2)涉及高维积分问题,且功能函数难以获得解析解。(2)难以解析地确定式(1)或式(2)的积分域  $\Omega_f$  或  $\Omega_s$ 。上述困难限制了可靠度领域在实际中的应用。为了打破这一困境,目前发展了一系列可靠度分析方法,大致可分为以下四类,(1)矩方法,如一阶(FORM)和二阶(SORM)可靠度分析方法<sup>[2,3]</sup>。矩方法致力于对功能函数在最可能失效点处低阶 Taylor 展开,达到逼近极限状态函数的目的。对于存在多失效域或功能函数是强非线性情形,误差很大。(2)随机模拟方法(MCS)<sup>[4]</sup>。这类方法以蒙特卡洛模拟为主,原理简单易操作,但计算效率低下且随机收敛。(3)概率密度演化方法 PDEM (Probability Density Evolution Method)<sup>[5]</sup>。基于概率守恒原理发展的概率密度演化理论,将物理系统的所有随机变量囊括于一个增广系统中,通过对概率空间剖分导出关注响应与基本随机变量的联合概率密度函数,对该联合概率密度函数积分获得系统可靠度,但对小失效概率问题难以获得满意的精度。(4)代理模型方法。代理模型主要用于替代可靠度分析过程中,需要进行多次重复的结构确定性分析,达到提升效率的目的。代理模型种类繁多,

收稿日期:2023-05-25;修改稿收到日期:2023-07-20。

基金项目:国家自然科学基金(51538010)资助项目。

作者简介:李杰\*(1957-),男,教授,中国科学院院士,博士生导师

(E-mail:lijie@tongji.edu.cn)。

常用的包括人工神经网络 ANN(Artificial neural network)<sup>[5]</sup>、混沌多项式表达 PCE(Polynomial chaos expression)<sup>[7]</sup>、Kriging<sup>[8]</sup> 和支持向量机 SVM(Support vector machine)<sup>[9]</sup> 等。通过代理模型与经典可靠度方法的结合,衍生了众多可靠度分析策略。但多数基于极值理论,很少考虑动力系统的响应时程,无法真实地反应物理系统的客观规律<sup>[10]</sup>。

基于概率密度演化理论,发展了三类可靠度分析方法,包括吸收边界条件法 ABM(Absorbing boundary method)<sup>[11]</sup>、等价极值事件法 EEV(Equivalent extreme events method)<sup>[12]</sup> 以及物理综合法 PSM(Physical synthesis method)<sup>[13]</sup>。上述可靠度方法随着概率空间剖分获得代表样本数目增多,理论上能够给出任意精度的可靠度或失效概率。因此概率密度演化理论的分析效率和精度,十分依赖概率空间剖分获得的代表点集的均匀程度以及代表样本的数目。针对点集的均匀性问题,目前发展了一系列点集优选策略,其中以广义  $F$  偏差最小化准则的点集优化策略应用最为广泛<sup>[14]</sup>。而代表点数目直接决定了确定性分析次数,进而影响可靠度分析效率和精度,因此如何降低结构确定性分析次数同时保证可靠度精度是十分重要的。近年来兴起的代理模型方法,通过少量代表样本构成的训练集训练目标代理模型,进而替代原系统的响应分析,受到人们广泛关注。Kriging 模型由于表达形式简单,且能够给出响应的预测均值和预测方差的解析表达,受到研究者的青睐。本研究以概率密度演化理论为基础,通过两级剖分的概念训练 Kriging 代理模型并用于预测物理系统未知样本的响应,降低确定性结构分析次数,提出了一种高效高精度的可靠度分析方法。

基于概率密度演化理论发展的三类可靠度分析方法,适用于不同层次的可靠度问题,而物理综合法是从结构的整体可靠度角度出发,具有更广泛的适用性。此外相比于等价极值事件法能够给出系统的时变可靠度,因此本文以物理综合法为基础,结合 Kriging 代理模型发展了一种新的可靠度分析方法,命名为 Kriging-PDEM。为验证新方法的精度和效率,通过对一解析系统和一非线性钢筋混凝土框架结构进行概率密度层次的随机响应分析,说明了新方法的适用性。

## 2 理论基础

### 2.1 概率密度演化理论

不失一般性,考察一多自由度随机系统,其控

制方程可统一表达成<sup>[1]</sup>

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\Theta})\ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{C}(\boldsymbol{\Theta})\dot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{R}[\dot{\mathbf{X}}(t), \mathbf{X}(t), \boldsymbol{\Theta}] = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\xi}(t) \quad (3)$$

式中  $\mathbf{M}, \mathbf{C}$  和  $\mathbf{R}$  分别为质量矩阵、阻尼矩阵和恢复力向量,  $\ddot{\mathbf{X}}, \dot{\mathbf{X}}$  和  $\mathbf{X}$  分别为系统的加速度、速度和位移向量,对应的初始条件为  $\dot{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{X}}_0, \mathbf{X} = \mathbf{X}_0, \boldsymbol{\Gamma}$  为激励影响矩阵,  $\boldsymbol{\xi}(t)$  为激励向量。

对于一般的适定动力学系统,式(3)的解答存在唯一且连续地依赖于物理系统的基本随机变量  $\boldsymbol{\Theta}$ 。因此对某一响应  $\mathbf{Z}(t) = [Z_1(t), \dots, Z_m(t)]^T$ , 系统解可统一表达成

$$\begin{cases} \mathbf{Z}(t) = \mathbf{H}(\boldsymbol{\Theta}, t) \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{h}(\boldsymbol{\Theta}, t) \end{cases} \quad (4)$$

式中  $\mathbf{H} = [H_1, \dots, H_m]^T, \mathbf{h} = [h_1, \dots, h_m]^T$ 。考察  $(\mathbf{Z}, \boldsymbol{\Theta})$  构成的增广系统,其中随机因素完全由  $\boldsymbol{\Theta}$  刻画。所有随机因素包含于系统内,因此这是一个概率守恒系统。根据概率守恒原理和数学推导,可得

$$\frac{\partial p_{z\boldsymbol{\Theta}}(z, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial t} + \dot{\mathbf{Z}}(\boldsymbol{\theta}, t) \frac{\partial p_{z\boldsymbol{\Theta}}(z, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

式(5)即为广义概率密度演化方程 GDEE(Generalized probability density evolution equation)。对应的初始条件为

$$p_{z\boldsymbol{\Theta}}(z, \boldsymbol{\theta}, t)|_{t=t_0} = \delta(z - z_0) p_{\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{\theta}) \quad (6)$$

式中  $\delta(\cdot)$  为 Delta 函数。将式(6)代入式(5),可获得关注响应逐时刻的概率密度函数  $p_z(z, t)$

$$p_z(z, t) = \int_{\Omega_{\boldsymbol{\Theta}}} p_{z\boldsymbol{\Theta}}(z, \boldsymbol{\theta}, t) d\boldsymbol{\theta} \quad (7)$$

式中  $\Omega_{\boldsymbol{\Theta}}$  为基本随机变量  $\boldsymbol{\Theta}$  张成的概率空间。

上述的推导以概率守恒原理为基础,导出了随机系统在遭受随机激励过程中,增广系统  $(\mathbf{Z}, \boldsymbol{\Theta})$  的联合概率密度函数遵循的演变规律。针对耗散系统(意味着某些样本的功能函数超过设定的阈值),引入统一筛分算子  $H[\cdot]$

$$H[f(\mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}, t))] = \begin{cases} 1 & (f(\mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}, t)) \in \Omega_f) \\ 0 & (f(\mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}, t)) \in \Omega_s) \end{cases} \quad (8)$$

式中  $f(\cdot)$  为一般函数形式,与研究问题定义的失效准则相关。类似式(5)的推导,可给出广义概率密度演化方程的耗散形式

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{z\boldsymbol{\Theta}}(z, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial t} + \dot{\mathbf{Z}}(\boldsymbol{\theta}, t) \frac{\partial p_{z\boldsymbol{\Theta}}(z, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial z} = \\ -H[f(\mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}, t))] p_{z\boldsymbol{\Theta}}(z, \boldsymbol{\theta}, t) \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)是统一的表达,适用概率耗散系统和概率保守系统。对于筛分算子  $H[\cdot] = 1$  可给出联合概率密度函数  $p_{z\boldsymbol{\Theta}}(z, \boldsymbol{\theta}, t)$  的零解,而  $H[\cdot] = 0$

可获得非零解。

将式(9)和系统的控制方程式(3)联立,并结合相应的初始条件,可获得基于概率密度演化理论求解系统整体可靠度的方程组<sup>[13]</sup>

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})\dot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{R}[\dot{\mathbf{X}}(t), \mathbf{X}(t), \boldsymbol{\theta}] = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\xi}(t) \\ \frac{\partial p_{z\boldsymbol{\theta}}(z, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial t} + \dot{\mathbf{Z}}(\boldsymbol{\theta}, t) \frac{\partial p_{z\boldsymbol{\theta}}(z, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial z} = -H[f(\mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}, t))]p_{z\boldsymbol{\theta}}(z, \boldsymbol{\theta}, t) \\ \dot{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{X}}_0, \mathbf{X} = \mathbf{X}_0 \\ p_{z\boldsymbol{\theta}}(z, \boldsymbol{\theta}, t)|_{t=t_0} = \delta(z - z_0)p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}) \end{cases} \quad (10)$$

求解上述方程组,可给出系统 $(\mathbf{Z}, \boldsymbol{\theta})$ 的联合概率密度函数 $p_{z\boldsymbol{\theta}}(z, \boldsymbol{\theta}, t)$ ,代入式(8)获得系统响应 $\mathbf{Z}(t)$ 任意时刻概率密度函数,而结构整体可靠度仅需对 $p_z(z, t)$ 进行一维积分运算,即

$$R(t) = \int_{-\infty}^b p_z(z, t) dz \quad (11)$$

式中 $b$ 为失效阈值,意味着系统响应超过阈值该样本就会失效。式(10)综合了物理系统的控制方程随机性在物理系统的传播规律,反映了各层次的结构失效准则,因此称为物理综合法。需要说明的是,物理综合法不同于极值理论,无需构造虚拟随机过程,而是将真实的物理响应代入广义概率密度演化方程求解,因此能够客观真实地反映系统在响应过程中的失效状态。

## 2.2 Kriging 模型

Kriging 模型最初由 Krige 提出<sup>[8]</sup>,随后 Matherton<sup>[15]</sup>完善了其理论,于 20 世纪 90 年代引入结构可靠度领域获得成功。形式上, Kriging 模型认为是一个回归模型和随机过程模型的结合。定义系统输入和输出的映射关系,满足

$$\mathbf{Y}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T \boldsymbol{\beta} + \mathbf{z}(\mathbf{x}) \quad (12)$$

式中 $\mathbf{F}$ 为系统输入 $\mathbf{x}$ 构成的多项式矩阵, $\boldsymbol{\beta}$ 为回归因子构成的列向量, $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ 为误差项,服从均值为 0 任意两点 $(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ 协方差满足

$$\text{cov}[\mathbf{z}(\mathbf{x}), \mathbf{z}(\mathbf{w})] = \sigma_z^2 \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \quad (13)$$

的随机过程。其中, $\sigma_z^2$ 为过程方差, $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ 为任意两点 $(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ 相关函数矩阵,本文采用高斯型相关函数。

基于最佳无偏估计理论以及给定的训练集 $\{\mathbf{x}, \mathbf{Y}\}$ ,可获得回归因子 $\boldsymbol{\beta}$ 和过程方差 $\sigma_z^2$ 的解析表达

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Y} \\ \hat{\sigma}_z^2 = \frac{1}{M} (\mathbf{Y} - \mathbf{F}^T \hat{\boldsymbol{\beta}})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{F}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}) \end{cases} \quad (14)$$

式中 $M$ 为一个与训练集样本数目有关的量,其余符号同上。

因此在已知 $\boldsymbol{\beta}$ 和过程方差 $\sigma_z^2$ 的条件下,任意待预测点 $x^0$ 的均值和方差可解析地表示为

$$\begin{cases} \mu(x^0) = \hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{r}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{F}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}) \\ \sigma^2(x^0) = \hat{\sigma}_z^2 [1 - \mathbf{r}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}] \{1 + [1 - \mathbf{r}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}] (\mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F})^{-1}\} \end{cases} \quad (15)$$

式中 $\mathbf{r}$ 为 $x^0$ 与训练集输入 $\mathbf{x}$ 的相关函数向量。一般地,将预测均值 $\mu(x^0)$ 视作 Kriging 模型的预测值,而 $\sigma^2(x^0)$ 称为 Kriging 方差,用于度量预测结果的好坏。

## 3 新方法

为了清晰地阐述新提出方法的流程,这里简要概括物理综合法的数值流程。

(1) 明确物理系统基本随机变量 $\boldsymbol{\theta}$ 及其分布参数,基于 GF 偏差理论剖分由基本随机变量张成的概率空间,获得代表点集 $\mathbf{X}^{\text{RP}} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$ 和赋得概率 $\mathbf{P}^{\text{RP}} = \{P_1^{\text{RP}}, P_2^{\text{RP}}, \dots, P_N^{\text{RP}}\}$ ,其中, $N$ 为样本数目。

(2) 针对每一代表样本 $\mathbf{x}_i$ 代入物理系统进行确定性分析获得其响应 $\mathbf{Y}_i$ 。注意此处关注的响应可能是一个极值或是一个时间序列,针对不同的可靠度分析方法, $\mathbf{Y}_i$ 的形式有差异。

(3) 将 $\mathbf{Y}_i$ 代入式(9)求解获得增广系统 $\{\mathbf{Z}, \boldsymbol{\theta}\}$ 的联合概率密度函数 $p_{z\boldsymbol{\theta}}(z, \boldsymbol{\theta}, t)$ ,求和得到 $p_z(z, t)$ 。

(4) 对 $p_z(z, t)$ 沿安全域积分获得可靠度 $R$ 。

利用 PDEM 理论进行可靠度分析,导致效率低下的根本原因在于步骤 2 的确定性分析。如何降低确定性分析次数同时保证可靠度分析的精度是有价值的。因此本文引入 Kriging 模型,尝试用较少的样本及其响应训练模型参数,然后利用训练的 Kriging 模型预测概率空间未知样本的响应,达到提升效率的目的。新提出算法的分析流程如图 1 所示。需要注意的是,粗剖分概率空间获得样本数目 $N_1$ 要远小于细剖分概率空间的样本数目 $N_2$ 。特别指出,本文训练 Kriging 模型的输入是概率空间剖分获得的样本值,输出是将样本值代入系统经确定性分析获得的样本时程,因此训练的 Kriging 模型数目与时程的长短无关,并非逐时间点地训练,这与现有文献的方法存在重大差异,极大地提升了训练效率。

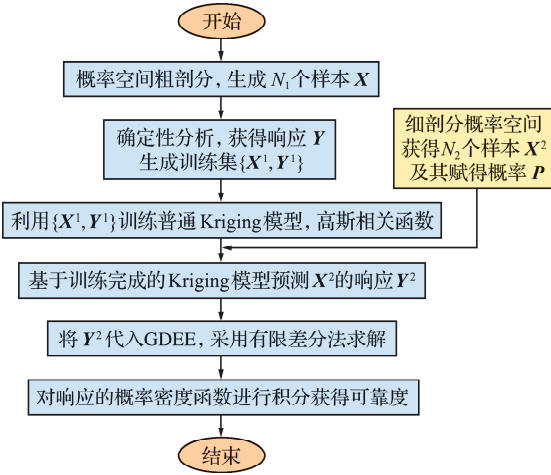


图1 新提出方法算法流程

Fig. 1 Flowchart of new proposed method

### 4 数值验证

引用两个数值算例验证新提出方法的精度和效率。

**算例1** 考虑 Van Der Pol 振子,其控制方程<sup>[16]</sup>满足

$$\dot{x} + x + \theta x^2 \dot{x} = 0 \quad (16)$$

式中  $\theta$  为系统的基本随机变量,式(16)的初始条件为  $x|_{t=0} = 1, \dot{x}|_{t=0} = 0$ 。

基于李群方法,获得随机系统响应的解析解

$$x \approx \cos(t) - \frac{1}{8}t\theta \cos^3(t) + \frac{1}{8}\theta \sin^3(t) \quad (17)$$

因此 Van Der Pol 振子位移响应随时间演化的概率密度函数满足

$$p_{X\theta}(x, t) = \frac{p_\theta \left[ \frac{8(\cos(t) - x)}{t \cos^3(t) - \sin^3(t)} \right]}{\frac{1}{8} | -t \cos^3(t) + \sin^3(t) |} \quad (18)$$

式(18)是统一的表达,并未涉及随机变量  $\theta$  的具体分布形式。基于标准对数正态分布假定,可绘制典型时刻概率密度函数,如图2所示。可以看出,不同时刻概率密度函数呈现典型的演化特征。基于经典的概率密度演化分析算法流程,采用GF偏差策略选择50个代表样本,进行确定性分析并代入GDEE,获得典型时刻的概率密度函数,与解

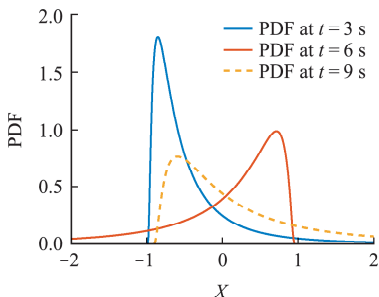


图2 Van Der Pol 振子系统位移响应典型时刻概率密度函数  
Fig. 2 PDF of Van Der pol system for typical time

析结果的对比如图3所示。可以看出,当样本数目很少的时候,概率密度理论解与解析解在均值层面十分吻合,但是在概率密度函数尾部出现剧烈的振荡现象。

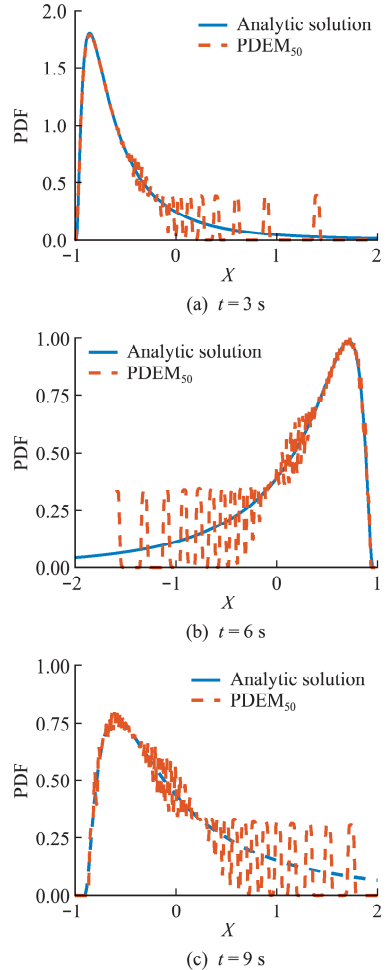


图3 PDEM分析结果与Van Der Pol方程解析解对比  
Fig. 3 Comparison of PDF between PDEM and analytical solution

基于新提出方法分析流程,粗剖分阶段选择50个样本进行确定性分析,然后凭借50个样本的输入和输出构成训练集训练Kriging模型,并预测细剖分阶段获得的200个代表样本响应;同时为了对比,直接剖分概率空间获得200个代表样本代入系统进行确定性分析,进而获得直接PDEM解,三者的分析结果如图4所示。可以看出,随着样本数目的增多,直接PDEM方法和Kriging-PDEM能获得高精度的概率密度解。相比于直接PDEM方法需要200次确定性分析,而Kriging-PDEM方法仅需50次,就确定性分析次数而言,计算效率提高了4倍。

Kriging模型的预测响应与真实响应的对比如图5所示。真实值与预测值吻合良好,相关程度达到100%,说明训练的Kriging模型能够捕捉Van Der Pol系统的真实响应。

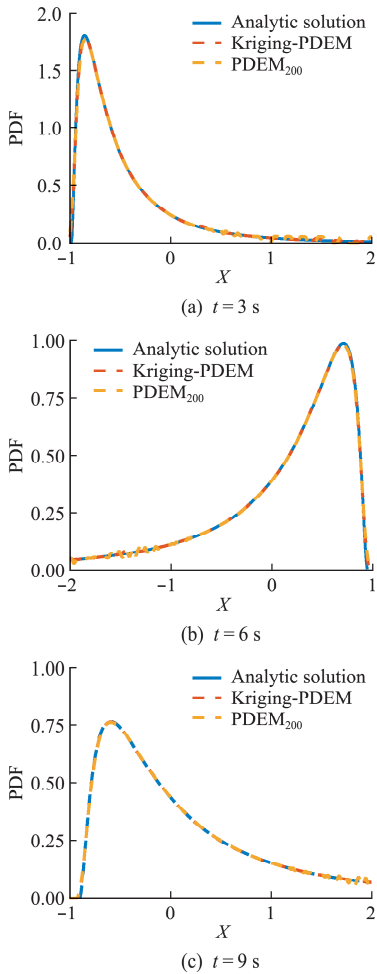


图 4 Kriging-PDEM 分析、PDEM 分析与 Van der Pol 方程解析解对比  
Fig. 4 Comparison between Kriging-PDEM, direct PDEM and analytical solution

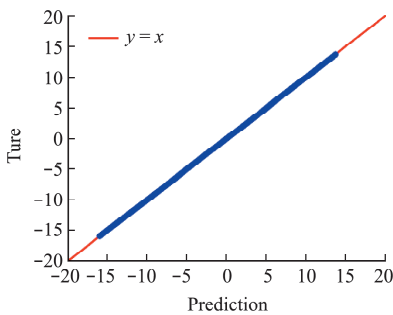


图 5 预测响应与真实响应对比 (Van Der Pol 振子)  
Fig. 5 Comparison of response between true one and prediction (Van Der Pol)

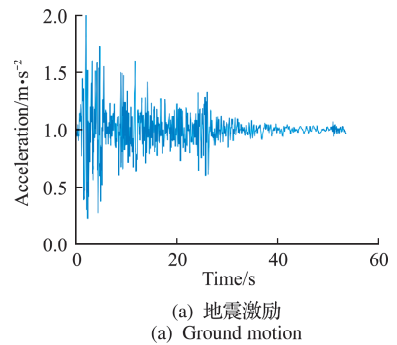
**算例 2** 考虑受水平地震作用下的单跨六层钢筋混凝土框架结构。底层层高为 4 m, 其余层高为 3.6 m。柱截面尺寸为 500 mm × 400 mm。层间刚度和楼层集中质量列入表 1。地震动采用 El-Centro 地震波东-西和南-北分量, 归一化后随机组合获得激励。随机组合参数, 均假定服从正态分布, 分布参数列入表 2。

层间恢复力采用 Bouc-Wen 滞回模型<sup>[17]</sup>, 图 6

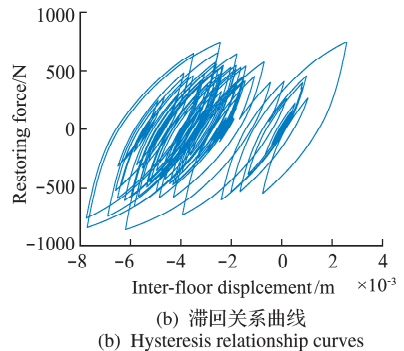
示出典型随机激励及其框架结构底层层间滞回关系曲线。本算例将影响较大的滞回模型参数  $\beta, \gamma, d_v$  和  $d_\gamma$  选为随机变量, 因此该随机系统共包含 6 个基本随机变量, 均假设服从相互独立的正态分布, 分布参数信息列入表 2。

表 1 剪切框架结构层间质量和混凝土材料信息  
Tab. 1 Lumped mass and concrete information for each story of shear-frame structure

楼层号	集中质量 (10000 kg)	弹性模量 (100000 MPa)
6	1.1	3.00
5	1.1	3.00
4	1.3	3.25
3	1.2	3.25
2	1.2	3.25
1	1.2	2.50



(a) 地震激励  
(a) Ground motion



(b) 滞回关系曲线  
(b) Hysteresis relationship curves

图 6 典型激励和层间滞回关系  
Fig. 6 Typical ground motion excitation and interlayer hysteresis relationship curve

表 2 Bouc-Wen 模型与地震加速度峰值参数的概率信息

Tab. 2 Probability information for Bouc-Wen model and the PGA parameters of earthquake

随机变量	$\beta$	$\gamma$	$d_\gamma$	$d_v$	$\theta_{PGA1}$	$\theta_{PGA2}$
均值	2500	1000	200	200	2.0	2.0
变异系数	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
PDF	正态	正态	正态	正态	正态	正态

为验证新提出方法的精度和效率, 本算例基于 MCS 方法随机选取  $10^5$  个样本, 经确定分析获得响应的统计结果, 以《建筑抗震设计规范》<sup>[18]</sup> 规定的

最大层间位移角限值 1/550 为阈值,获得其失效概率为 0.38%。基于传统的 PDEM 分析流程,选取 149 个代表样本,计算失效概率为 0.32%,误差为 15.79%,无疑是难以接受的。随着对概率空间剖分的不断细化,获得代表样本数目增多至 788 条,此时失效概率和参考值 0.38% 一致。考虑本文提出的方法,基于概率空间剖分获得 149 个代表样本  $\mathbf{X}^{RP}$ ,代入系统进行确定性分析获得响应序列  $\mathbf{Y}(t)$ ,组成训练集  $\{\mathbf{X}^{RP}, \mathbf{Y}(t)\}$ ,训练普通 Kriging 模型,记为  $\hat{G}(\mathbf{X})$ 。再次剖分获得加密样本 788 个代表样本  $\mathbf{X}^{PRE}$ ,并采用  $\hat{G}(\mathbf{X})$  预测加密样本  $\mathbf{X}^{PRE}$  的响应,记为  $\{\mathbf{Y}(t)\}^{PRE}$ 。将  $\{\mathbf{Y}(t)\}^{PRE}$  代入 GDEE 获得响应的概率密度函数的演化信息,如图 7 所示。基于物理综合法,经计算新提出方法获得的失效概率为 0.38%。就效率而言,基于传统的 MCS 方法,共花费 87.8 h,而传统的 PDEM 方法,需要 1.2 h,新提出的算法仅需 0.17 h,较 MCS 方法而言效率提升了 516 倍,而相对直接 PDEM 方法效率提升了 7 倍,且并未损失可靠度的分析精度。

重要的是,为了直观地观察 Kriging 模型对强非线性结构响应的预测效果,预测的 788 条样本响应与真实响应比较如图 8 所示。经计算相关程度达到了 98.8% 以上,就响应时程的预测精度而言完全满足实际工程需求。基于物理综合法,能够给出在给定阈值下的结构可靠度变化规律,如图 9 所示。

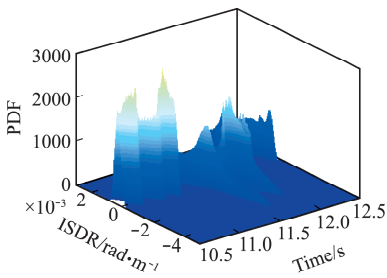


图 7 典型时间段 PDF 演化曲面

Fig. 7 PDF curved surface at the specific time periods

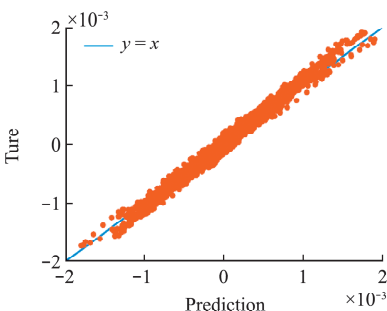


图 8 预测响应与真实响应对比(框架结构)

Fig. 8 Comparison of response between true one and prediction (shear-frame structure)

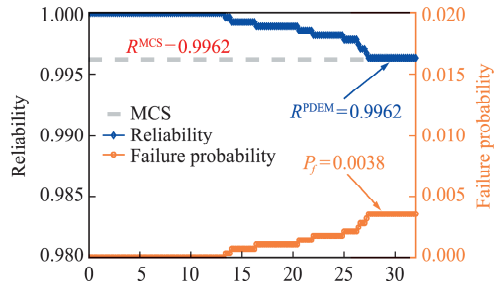


图 9 剪切型框架结构时变可靠度

Fig. 9 Time-dependent reliability for shear-frame structure

## 5 结 论

本文基于传统 PDEM 理论求解可靠度需耗时的确定性分析问题,提出分级剖分概率空间的策略,利用少量样本训练 Kriging 代理模型,同时不同于逐时间点训练的途径,采用一次性训练整个时间序列的方式,大大提升了训练效率。最后利用训练完成的 Kriging 模型替代复杂的物理系统,进而提高可靠度分析效率。基于一具有解析表达的 Van Der Pol 振子和一非线性剪切型框架结构,验证了提出方法的精度和效率。结果表明, Kriging 模型能够准确地捕捉未知样本的响应,且具有相当高的预测精度。利用预测的时程结合物理综合法用于系统可靠度分析,具有很高的精度。

## 参考文献(References):

- [1] 刘章军,陈建兵. 结构动力学[M]. 北京:中国水利水电出版社,2012. (LIU Zhang-jun, CHEN Jian-bing. *Structural Dynamics* [M]. Beijing: China Water & Power Press, 2012. (in Chinese))
- [2] Der Kiureghian A. The geometry of random vibrations and solutions by FORM and SORM[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2000, **15**(1): 81-90.
- [3] Zhao Y G, Ono T. A general procedure for first/second-order reliability method (FORM/SORM) [J]. *Structural Safety*, 1999, **21**(2): 95-112.
- [4] Mooney C Z. *Monte Carlo Simulation* [M]. Calif: Sage Publications, 1997.
- [5] Li J, Chen J B. Probability density evolution method for dynamic response analysis of structures with uncertain parameters [J]. *Computational Mechanics*, 2004, **34**(5): 400-409.
- [6] Kumar A. Artificial neural network-based estimation of peak ground acceleration [J]. *Iset Journal of Earthquake Technology*, 2009(1): 46.
- [7] Bucher C G, Bourgund U. A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems[J]. *Structural Safety*, 1990, **7**(1): 57-66.
- [8] Krige D G. A statistical approach to some basic mine

- valuation problems on the Witwatersrand, by D G Krige, published in the Journal, December 1951; Introduction by the author[J]. *Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy*, 1951, **52**:201-203.
- [9] Bourinet J M, Deheeger F, Lemaire M. Assessing small failure probabilities by combined subset simulation and Support Vector Machines [J]. *Structural Safety*, 2011, **33**(6):343-353.
- [10] Wang J, Sun Z L, Cao R N. An efficient and robust Kriging-based method for system reliability analysis [J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2021, **216**:107953.
- [11] Chen J B, Li J. Dynamic response and reliability analysis of non-linear stochastic structures[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2005, **20**(1):33-44.
- [12] Chen J B, Li J. The extreme value distribution and dynamic reliability analysis of nonlinear structures with uncertain parameters[J]. *Structural Safety*, 2007, **29**(2):77-93.
- [13] 李杰. 工程结构整体可靠性分析研究进展[J]. 土木工程学报, 2018, **51**(8):10. (LI Jie. Advances in global reliability analysis of engineering structures[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2018, **51**(8):1-10. (in Chinese))
- [14] Chen J B, Yang J Y, Li J. A GF-discrepancy for point selection in stochastic seismic response analysis of structures with uncertain parameters[J]. *Structural Safety*, 2016, **59**:20-31.
- [15] Matheron G. Principles of geostatistics[J]. *Economic Geology*, 1963, **58**(8):1246-1266.
- [16] 蒋仲铭, 李杰. 三类随机系统广义概率密度演化方程的解析解[J]. 力学学报, 2016, **48**(2):9. (JIANG Zhong-ming, LI Jie. Analytical solutions of the generalized probability density evolution equation of three classes stochastic systems [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, **48**(2):413-421. (in Chinese))
- [17] Ma F, Zhang H, Bockstedte A, et al. Parameter Analysis of the Differential Model of Hysteresis [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2004, **71**(3):342-349.
- [18] GB50011-2010. 建筑抗震设计规范[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2010. (GB50011-2010. Code for Seismic Design of Buildings [S]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2010. (in Chinese))

## Prediction strategy of response of structures and the new reliability analysis method

ZHOU Jin<sup>1</sup>, LI Jie<sup>\*1,2</sup>

(1. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China;

2. Shanghai Institute of Disaster Prevention and Relief, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** Engineering structures inevitably suffer from various uncertainties during their service life, and in order to objectively and scientifically describe the influence of these uncertainties, the reliability theory of engineering structures has been developed. However, it is difficult to widely apply traditional reliability analysis methods to actual engineering structures due to accuracy and efficiency issues. In recent years, based on the principle of probability conservation, probability density evolution theory was proposed and has been well developed. Compared with the traditional reliability analyses theory, the probabilistic density evolution method can greatly reduce the number of deterministic structural analyses and obtain satisfactory accuracy. However, for increasingly complex engineering structures, the problems such as inefficiency remain to be solved. To this end, we propose the concept of two-stage partition of probability space, in which a small number of representative samples obtained by coarse partition are used to form a training set to train the Kriging model; then the probability space is finely profiled, and the trained Kriging model predicts the encrypted sample response to improve the analysis efficiency. On this basis, a new reliability analysis method is proposed by combining the physical synthesis method based on the probability density evolution theory. The applicability of the new proposed method is demonstrated by predicting the response and reliability of an analytical system and a reinforced concrete frame structure.

**Key words:** reliability analysis; probability density evolution method; kriging; response prediction

引用本文/Cite this paper:

周锦, 李杰. 一种结构响应预测策略与新可靠度分析方法[J]. 计算力学学报, 2023, **40**(5):686-692.

ZHOU Jin, LI Jie. Prediction strategy of response of structures and the new reliability analysis method [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2023, **40**(5):686-692.