第40卷第3期 计 算 力 学 学 报 Vol. 40, No. 3
2023 年 6 月 Chinese Journal of Computational Mechanics June 2023

DOI:10.7511/jslx20210804002

基于 LMI 的框架结构分数阶控制方法研究

杨 柳*[1], 周星德[2], 石贤增[2], 金 波[1]

(1.中国地震局工程力学研究所,哈尔滨 150080;2.河海大学 土木与交通学院,南京 210098)

摘 要:以框架结构为研究对象,采用分数阶状态方程进行控制器设计,提出了基于 LMI 的分数阶控制器设计方法。首先,把原系统振动方程改为阶次为 1～2 的分数阶状态方程,同时,构造同阶次分数阶控制器状态方程,进而组装为一个整体状态方程;其次,根据分数阶系统稳定性条件确定满足系统渐进稳定性的不等式。为了获得可行解,在不等式中附加了两个参数,同时,令控制器参数矩阵为对称;再次,从仿真结果来看,控制效果过好,但控制力偏大,为此,控制力计算时附加了调节因子,以期在满足控制效果的基础上,降低所需控制力;最后给出了一个算例说明本文方法的可行性。

关键词:框架结构;分数阶;LMI;附加参数;调节因子

中图分类号:TU311.3;O23 **文献标志码**:A **文章编号**:1007-4708(2023)03-0479-05

1 引 言

我国近年来地震发生频繁,结构振动控制成为研究热点[1]。由于实际材料的力学行为用分数阶表示更合适,且基于分数阶模型的控制策略具有良好的控制效果和控制品质,故而成为近年来研究热点[2-3]。目前采用的分数阶模型,其分数阶阶次位于 0～2[4]。Marinangeli 等[5]对承受面外激励的碳纤维复合板,采用了分数阶正位置反馈补偿器进行振动控制。Tuan[6]对履带起重机伸出臂存在大风、非线性和强不确定性系统,采用分数阶回代滑模控制器设计,从起吊货物运行轨迹来看,货物复位和振动幅值比整数阶控制器控制效果优。对于存在死区和不确定性的非线性常分数阶系统,Jafari 等[7]提出了一种基于 2-型模糊自适应回代控制策略。

振动模型通常为整数阶模型,采用分数阶模型设计控制器对整数阶模型进行控制是一种较好的思路[8],LMI 可以很好地解决诸如输入饱和、测量量化及时滞等问题[9,10]。本文以三层框架结构为对象,研究基于 LMI 的分数阶控制器控制整数阶模型。在根据分数阶模型设计控制器时,考虑到分数阶阶次在 0～1 时,可行性区域为凹集,而阶次在 1～2 时,可行性区域为凸集[11],从寻优角度来讲,用于控制器设计的分数阶模型的阶次选 1～2 为妥。为此,本文以框架结构为对象,控制器设计时采用分数阶模型。首先,把原系统振动方程改为阶次为 1～2 的分数阶状态方程,同时,构造同阶次分数阶控制器状态方程,进而组装为一个整体状态方程;其次,根据分数阶系统稳定性条件[12]确定不等式,采用基于 LMI 的控制器设计方法,利用软件寻找可行解,但找不到可行解,为此,本文提出了如下解决方案,(1) 在不等式中附加了两个参数;(2) 令控制器参数矩阵为对称;再次,从仿真结果来看,控制效果过好,但控制力偏大。为此,控制力表达式中附加了调节因子,以期在满足控制效果的基础上,降低所需控制力。最后给出了一个算例分析说明本文方法的可行性。

2 振动方程及控制器设计

本文以三层钢筋混凝土框架结构为研究对象(图 1),截面尺寸为 0.2 m×0.1 m,等效弹性模量为 30.156 GPa,比重为 2500 kg/m^3,泊松比为 0.2,采用空间六面体单元,划分 56 个单元,节点为 220 个,可动自由度为 636。设阻尼为比例阻尼,阻尼比为 0.05,在地震作用下振动方程为

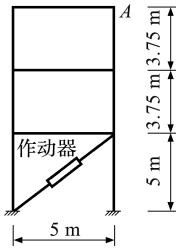

图 1 三层框架结构

Fig. 1 Three storey frame structure

收稿日期:2021-08-04;**修改稿收到日期**:2022-03-11.
基金项目:国家自然科学基金(41977240)资助项目.
作者简介:杨 柳*(1996-),男,博士生
(E-mail:15805228856@163.com).

$$\bar{\boldsymbol{M}}\ddot{\bar{\boldsymbol{X}}}+\bar{\boldsymbol{C}}\dot{\bar{\boldsymbol{X}}}+\bar{\boldsymbol{K}}\bar{\boldsymbol{X}}=\bar{\boldsymbol{B}}u-\bar{\boldsymbol{M}}\bar{\boldsymbol{I}}\ddot{x}_g \tag{1}$$

式中 $\bar{\boldsymbol{X}}\in R^{n\times 1}$ 为位移向量，$\bar{\boldsymbol{M}},\bar{\boldsymbol{C}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{K}}$ 分别为质量、阻尼和刚度矩阵，均为 $n\times n$ 阶方阵，$\bar{\boldsymbol{B}}\in R^{n\times 1}$ 为作动器定位向量，$u\in R^{1\times 1}$ 为控制力，$\bar{\boldsymbol{I}}=[1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}_{n\times 1}$；$\ddot{x}_g$ 为地震加速度。

选取图1中节点A的水平方向位移作为主自由度，利用主从自由度降阶法降为单自由度系统，令

$$\bar{\boldsymbol{K}}=\begin{bmatrix}k_{11} & \boldsymbol{k}_{12}\\ \boldsymbol{k}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{k}_{22}\end{bmatrix},\ \bar{\boldsymbol{X}}=\begin{bmatrix}x\\ \boldsymbol{X}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1\\ -\boldsymbol{K}_{22}^{-1}\boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

式中 $k_{11}\in R^{1\times 1}$，$\boldsymbol{k}_{22}\in R^{(n-1)\times(n-1)}$，$x\in R^{1\times 1}$，$\boldsymbol{k}_{12}\in R^{1\times(n-1)}$，$\boldsymbol{X}\in R^{(n-1)\times 1}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 为变换矩阵。

令 $\bar{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}$，可得

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=bu+e\ddot{x}_g \tag{2}$$

式中 $m=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{T}$，$c=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{T}$，$k=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{T}$

$b=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{B}}$，$e=-\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{M}}\bar{\boldsymbol{I}}$

把式(2)变为状态方程和输出方程，为

$$\dot{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{B}u+\boldsymbol{E}\ddot{x}_g,\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{z} \tag{3a,3b}$$

式中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -m^{-1}k & -m^{-1}c\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\ m^{-1}b\end{bmatrix}$

$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}0\\ m^{-1}e\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{H}=[h\quad 0]$

2.2 分数阶控制器设计

用于控制器设计的系统状态方程为

$$\boldsymbol{z}^{(\alpha)}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{B}u+\boldsymbol{E}\ddot{x}_g,\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{z} \tag{4a,4b}$$

式中 上标 α 为 α 阶导数，$\alpha\in[1\quad 2)$。

而控制器状态方程可表示为

$$\boldsymbol{z}_c^{(\alpha)}=\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{z}_c+\boldsymbol{B}_c\boldsymbol{y},\ u=\boldsymbol{C}_c\boldsymbol{z}_c+\boldsymbol{D}_c\boldsymbol{y} \tag{5a,5b}$$

式中 $\boldsymbol{A}_c\in R^{2\times 2}$，$\boldsymbol{B}_c\in R^{2\times 1}$，$\boldsymbol{C}_c\in R^{1\times 2}$，$\boldsymbol{D}_c\in R^{1\times 1}$。

合并式(4,5)，为

$$\boldsymbol{z}_b^{(\alpha)}=\boldsymbol{A}_b\boldsymbol{z}_b \tag{6}$$

式中 $\boldsymbol{z}_b=\begin{bmatrix}\boldsymbol{z}\\ \boldsymbol{z}_c\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_b=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}_c\boldsymbol{H} & \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}_c\\ \boldsymbol{B}_c\boldsymbol{H} & \boldsymbol{A}_c\end{bmatrix}$。

式(6)渐进稳定的条件为[12]

$$\begin{bmatrix}(\boldsymbol{A}_b^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_b+\boldsymbol{Z}_b\boldsymbol{A}_b)\sin\theta & (\boldsymbol{Z}_b\boldsymbol{A}_b-\boldsymbol{A}_b^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_b)\cos\theta\\ (\boldsymbol{A}_b^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_b-\boldsymbol{Z}_b\boldsymbol{A}_b)\cos\theta & (\boldsymbol{A}_b^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_b+\boldsymbol{Z}_b\boldsymbol{A}_b)\sin\theta\end{bmatrix}<0 \tag{7}$$

$$\boldsymbol{Z}_b>0 \tag{8}$$

式(7)的左边可表示为[13]

$$\text{左边}=\begin{bmatrix}(\hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_b+\boldsymbol{Z}_b\hat{\boldsymbol{A}})\sin\theta & (\boldsymbol{Z}_b\hat{\boldsymbol{A}}-\hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_b)\cos\theta\\ (\hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_b-\boldsymbol{Z}_b\hat{\boldsymbol{A}})\cos\theta & (\hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_b+\boldsymbol{Z}_b\hat{\boldsymbol{A}})\sin\theta\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_b\hat{\boldsymbol{B}}\sin\theta & \boldsymbol{Z}_b\hat{\boldsymbol{B}}\cos\theta\\ \boldsymbol{Z}_b\hat{\boldsymbol{B}}\cos\theta & \boldsymbol{Z}_b\hat{\boldsymbol{B}}\sin\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{F}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \hat{\boldsymbol{F}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{H}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \hat{\boldsymbol{H}}\end{bmatrix}+$$

$$\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_b\hat{\boldsymbol{B}}\sin\theta & \boldsymbol{Z}_b\hat{\boldsymbol{B}}\cos\theta\\ \boldsymbol{Z}_b\hat{\boldsymbol{B}}\cos\theta & \boldsymbol{Z}_b\hat{\boldsymbol{B}}\sin\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{F}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \hat{\boldsymbol{F}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{H}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \hat{\boldsymbol{H}}\end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}}=$$

$$\boldsymbol{\Pi}+\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\Delta}$$

即 $$\boldsymbol{\Pi}+\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\Delta}<0 \tag{9}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$，$\hat{\boldsymbol{B}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$

$\hat{\boldsymbol{H}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{H} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$，$\hat{\boldsymbol{F}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_c & \boldsymbol{B}_c\\ \boldsymbol{C}_c & \boldsymbol{D}_c\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_b\hat{\boldsymbol{B}}\sin\theta & \boldsymbol{Z}_b\hat{\boldsymbol{B}}\cos\theta\\ \boldsymbol{Z}_b\hat{\boldsymbol{B}}\cos\theta & \boldsymbol{Z}_b\hat{\boldsymbol{B}}\sin\theta\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\Pi}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Pi}_{11} & \boldsymbol{\Pi}_{12}\\ \boldsymbol{\Pi}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Pi}_{11}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Pi}_{11}=(\hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_b+\boldsymbol{Z}_b\hat{\boldsymbol{A}})\sin\theta$$

$$\boldsymbol{\Pi}_{12}=(\boldsymbol{Z}_b\hat{\boldsymbol{A}}-\hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_b)\cos\theta$$

$$\boldsymbol{\Delta}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{H}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \hat{\boldsymbol{H}}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\Theta}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{F}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \hat{\boldsymbol{F}}\end{bmatrix}$$

式(9)可等效为[14]

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\Lambda}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\Lambda}}<0,\ \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\Delta}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\Delta}}<0 \tag{10a,10b}$$

$$\mathrm{Im}(\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\Lambda}})=\ker(\boldsymbol{\Lambda}) \tag{10c}$$

式中 Im(·)为取虚部，ker(·)为核。

令

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_{11} & \boldsymbol{\alpha}_{12}\\ \boldsymbol{\alpha}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\alpha}_{11}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\otimes\hat{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\gamma}_{11} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\gamma}_{22}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{11}=(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{Z}_b^{-1}+\boldsymbol{Z}_b^{-1}\hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}})\sin\theta$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{12}=(-\boldsymbol{Z}_b^{-1}\hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}+\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{Z}_b^{-1})\cos\theta$$

$\gamma_{11}=\boldsymbol{Z}_b\sin\theta$，$\gamma_{22}=\boldsymbol{Z}_b\cos\theta$，$\otimes$ 表示 kronecker 乘积，则 $\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}$，根据式(10)可得

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\Lambda}}=\boldsymbol{\gamma}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\beta}} \tag{11}$$

式中 $\mathrm{Im}(\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\beta}})=\ker(\boldsymbol{\beta})$。

将式(11)代入式(10a)，得

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\gamma}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\gamma}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\beta}}<0 \tag{12}$$

即 $$\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\beta}}<0 \tag{13}$$

假定 $$\boldsymbol{Z}_b=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z} & \boldsymbol{Z}_2\\ \boldsymbol{Z}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Z}_3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{Z}_b^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y} & \boldsymbol{Y}_2\\ \boldsymbol{Y}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Y}_3\end{bmatrix} \tag{14}$$

式中 $\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Z}_2,\boldsymbol{Z}_3$ 和 $\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Y}_2,\boldsymbol{Y}_3$ 均为2阶矩阵。

把式(14)代入 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$，可得

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\sin\theta & (\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\cos\theta & \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_2\sin\theta & \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_2\cos\theta\\ * & -\boldsymbol{Y}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\cos\theta & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ * & (\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\sin\theta & \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_2\sin\theta & \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_2\sin\theta\\ * & * & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix} \tag{15}$$

式中 * 为对称部位(下同)。

根据文献[15]可知

$$\ker(\boldsymbol{\beta})\{\boldsymbol{e}\mid\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{e}=\boldsymbol{0}\} \tag{16a}$$

$$\mathrm{Im}(\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\beta}})\{\boldsymbol{e}\mid\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{g}=\boldsymbol{e}\} \tag{16b}$$

即 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\Gamma}_{\beta}\mathbf{g}=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{e}=\mathbf{0}$。若 $\mathbf{g}$ 为非零在向量，则令 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\Gamma}_{\beta}=\mathbf{0}$，采用块状矩阵表示，为

$$|\boldsymbol{\beta}_{ij}|_{4\times4}|\boldsymbol{\gamma}_{\beta_{ij}}|_{4\times4}=\mathbf{0} \tag{17}$$

由式(17)可得

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\gamma}_{\beta_{1i}}-\boldsymbol{\gamma}_{\beta_{3i}})=\mathbf{0}\quad(i=1,2,3,4) \tag{18a}$$

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\gamma}_{\beta_{1i}}+\boldsymbol{\gamma}_{\beta_{3i}})=\mathbf{0}\quad(i=1,2,3,4) \tag{18b}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{\beta_{2i}}=\boldsymbol{\gamma}_{\beta_{4i}}=\mathbf{0}\quad(i=1,2,3,4) \tag{18c}$$

$\boldsymbol{\Gamma}_{\mu}$ 满足 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_{\mu}=0$，可得 $\boldsymbol{\Gamma}_{\beta}$ 为

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\beta}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Gamma}_{\mu} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{\Gamma}_{\mu} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix} \tag{19}$$

代入式(13)，得

$$\begin{bmatrix}\Xi_{11} & \Xi_{12}\\ \Xi_{12}^{\mathrm{T}} & \Xi_{11}\end{bmatrix}<0 \tag{20}$$

式中　$\boldsymbol{\Xi}_{11}=\boldsymbol{\Gamma}_{\mu}^{\mathrm{T}}(\mathbf{AY}+\mathbf{YA}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\Gamma}_{\mu}(\sin\theta)^{-1}$

$\boldsymbol{\Xi}_{12}=\boldsymbol{\Gamma}_{\mu}^{\mathrm{T}}(\mathbf{YA}^{\mathrm{T}}-\mathbf{AY})\boldsymbol{\Gamma}_{\mu}(\cos\theta)^{-1}$

对式(10b)做相同处理，可得 $\boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}$ 为

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Gamma}_{\zeta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{\Gamma}_{\zeta} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix} \tag{21}$$

代入式(10b)，得

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Omega}_{11} & \boldsymbol{\Omega}_{12}\\ \boldsymbol{\Omega}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Omega}_{11}\end{bmatrix}<0 \tag{22}$$

式中　$\boldsymbol{\Omega}_{11}=\boldsymbol{\Gamma}_{\zeta}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}+\mathbf{ZA})\boldsymbol{\Gamma}_{\zeta}\sin\theta$

$\boldsymbol{\Omega}_{12}=\boldsymbol{\Gamma}_{\zeta}^{\mathrm{T}}(\mathbf{ZA}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Z})\boldsymbol{\Gamma}_{\zeta}\cos\theta$

由 Schur 补定理可以得

$$\boldsymbol{\Pi}+\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\Delta}\leqslant\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Pi}+\sum_{i=1}^{2}\rho_i\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{\Phi}_i^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Psi}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Psi}_2^{\mathrm{T}}\\ * & -\rho_1\boldsymbol{I} & \mathbf{0}\\ * & * & -\rho_2\boldsymbol{I}\end{bmatrix} \tag{23}$$

式中　$\boldsymbol{\Phi}_1=\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_b\hat{\mathbf{B}}\sin\theta & \mathbf{Z}_b\hat{\mathbf{B}}\cos\theta\\ -\mathbf{Z}_b\hat{\mathbf{B}}\cos\theta & \mathbf{Z}_b\hat{\mathbf{B}}\sin\theta\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\Phi}_2=\mathbf{0}$

$$\boldsymbol{\Psi}_1=\boldsymbol{\Psi}_2=\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{F}}\hat{\mathbf{H}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{F}}\hat{\mathbf{H}}\end{bmatrix}$$

式(6)渐进稳定的条件为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Pi}+\sum_{i=1}^{2}\rho_i\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{\Phi}_i^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Psi}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Psi}_2^{\mathrm{T}}\\ * & -\rho_1\boldsymbol{I} & \mathbf{0}\\ * & * & -\rho_2\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0 \tag{24}$$

从仿真结果来看，满足式(24)的控制器，对整数阶模型不能控制，因此，本文做了如下改进，(1) 控制器参数矩阵 $\hat{\mathbf{F}}$ 设为对称矩阵；(2) 将式(24)改为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Pi}+\hat{\boldsymbol{\Pi}}\sum_{i=1}^{2}\rho_i\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{\Phi}_i^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Psi}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Psi}_2^{\mathrm{T}}\\ * & -\rho_1\boldsymbol{I} & \mathbf{0}\\ * & * & -\rho_2\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0 \tag{25}$$

式中　$\hat{\boldsymbol{\Pi}}=\mathrm{diag}[\boldsymbol{\tau}_1,\boldsymbol{\tau}_2]$，$\boldsymbol{\tau}_1>0$，$\boldsymbol{\tau}_2>0$。

此外，控制力改为

$$u=\delta(\mathbf{C}_c\boldsymbol{z}_c+\mathbf{D}_c\mathbf{y}) \tag{26}$$

式中　δ 为调节因子，建议 $\delta\in(0,120)$。

3　仿真分析

图 1 所示框架结构内附 HRB235 钢筋，截面如图 2 所示。

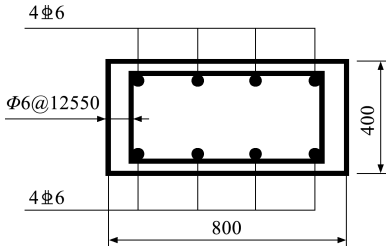

图 2　框架结构截面

Fig. 2　Cross section diagram of frame structure

承受 Elcentro(NS)作用，降阶为单自由度，式(2,3b)的参数分为

$m=766.73$ kg，$c=181.87\times10$ N·s/m

$k=431.41\times10^3$ N/m，$b=0.23$

$e=-10.45\times10^2$，$h=-0.1124$

设计控制器时，$\alpha=1.2$，调节因子为 11，采用软件进行计算满足改进的不等式(25)，得到控制器参数和附加参数分别为

$$\mathbf{A}_c=\begin{bmatrix}-1.72 & 0.26\\ 0.26 & -1.72\end{bmatrix}\times10^8,\ \mathbf{B}_c=\begin{bmatrix}-0.98\\ -0.98\end{bmatrix}\times10^8$$

$$\mathbf{C}_c=[-0.98\quad -0.98]\times10^8,\ \mathbf{D}_c=-7.69\times10^8$$

$$\boldsymbol{\tau}_1=\mathrm{diag}[1\quad 1]\times2.857\times10^8$$

$$\boldsymbol{\tau}_2=\mathrm{diag}[1\quad 1]\times2.872\times10^8$$

位移控制结果及控制力如图 3 和图 4 所示。

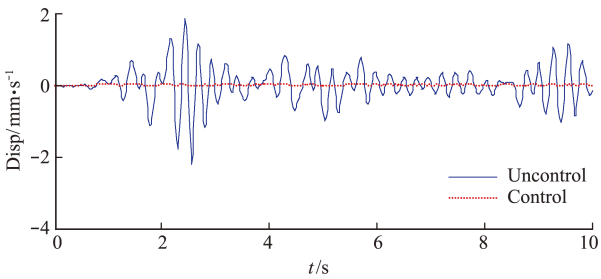

图 3　结点 A 位移响应时程曲线

Fig. 3　Displacement response time history curve of node A

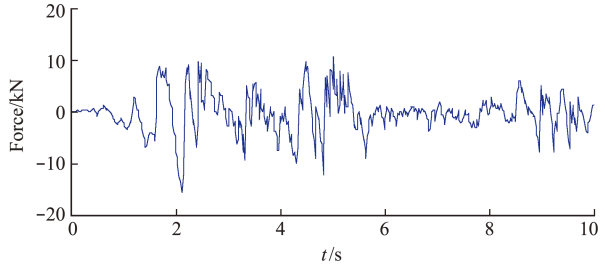

图 4 控制力时程曲线

Fig. 4 Time history curve of control force

本文框架频率偏大，相对于整数阶模型设计的控制力，基于分数阶模型设计的控制力具有更好的控制效果。

4 结 论

类似于文献[8]，利用基于分数阶模型设计的控制器具有良好的控制效果的特点，本文开发了一种基于 LMI 的控制器设计方法。由于基于 LMI 的控制器设计要求可行区域为凸集，所以用于设计的分数阶模型的阶次取为 1～2 的数，但是，由于进行可行解搜索时，不能找到可行解，本文提出改进方法，即控制器参数取为对称矩阵，同时，在式(25)附加了两个参数，即可获得可行解。此外，由于图 2 的仿真结果过优，所以引入一个调节因子以期降低控制力，如何优化调节因子是下一步要解决的问题。

参考文献(References)：

[1] 蒋 扬，周星德，王 玉，等. 建筑结构鲁棒分散控制方法研究研究[J]. 振动与冲击，2012，**31**(6)：37-40. (JIANG Yang, ZHOU Xing-de, WANG Yu, et al. A robust decentralized control method for architectural structures[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2012, **31**(6): 37-41. (in Chinese))

[2] 叶宇旻，周林根，谢兴博. 变分数阶振子振动控制方法研究[J]. 振动与冲击，2015，**34**(16)：119-121，134. (YE Yu-min, ZHOU Lin-gen, XIE Xing-bo. Active vibration control method for variable order oscillator [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2015, **34**(16): 119-121, 134. (in Chinese))

[3] Tan Y S, Xiong M H, Du D S, et al. Observer-based robust control for fractional-order nonlinear uncertain systems with input saturation and measurement quantization[J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2019, **34**: 45-57.

[4] 王在华，胡海岩. 含分数阶导数阻尼的线性振动系统的稳定性[J]. 中国科学 G 辑，2009，**39**(10)：1495-1502. (WANG Zai-hua, HU Hai-yan. Stability of linear vibration system with fractional derivative damping [J]. *Science in China (Series G (Physics, Mechanics & Astronomy))*, 2009, **39**(10): 1495-1502. (in Chinese))

[5] Marinangeli L, Alijani F, HosseinNia S H. Fractional-order positive position feedback compensator for active vibration control of a smart composite plate[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2018, **412**: 1-16.

[6] Tuan L A. Fractional-order fast terminal back-stepping sliding mode control of crawler cranes[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2019, **137**: 294-314.

[7] Jafari A A, Ali Mohammadi S M, Naseriyeh M H. Adaptive type-2 fuzzy backstepping control of uncertain fractional-order nonlinear systems with unknown dead-zone [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2019, **69**: 506-532.

[8] 刘广波，周星德，石星星，等. 结构整数阶模型的分数阶控制方法研究[J]. 应用力学学报，2012，**29**(3)：258-261，351. (LIU Guang-bo, ZHOU Xing-de, SHI Xing-xing, et al. Research on fractional-order control method based on integer-order building structures model[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2012, **29**(3): 258-261, 351. (in Chinese))

[9] Tan Y S, Xiong M H, Du D S, et al. Observer-based robust control for fractional-order nonlinear uncertain systems with input saturation and measurement quantization[J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2019, **34**: 45-57.

[10] Geng W T, Lin C, Chen B. Observer-based stabilizing control for fractional-order systems with input delay [J]. *ISA Transactions*, 2020, **100**: 103-108.

[11] Farges C, Moze M, Sabatier J. Pseudo state feedback stabilization of commensurate fractional order systems[J]. *Automatica*, 2010, **46**(10): 1730-1734.

[12] Sabatier J, Moze M , Farges C. LMI stability conditions for fractional order systems[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2010, **59**(5): 1594-1609.

[13] Lu J G, Chen G R. Robust stability and stabilization of fractional-order interval systems: An LMI approach[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(6): 1294-1299.

[14] Boyd S P. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.

[15] Leon S J. *Linear Algebra with Applications*[M]. Boston: Pearson, 2014.

Research on fractional-order control method of frame based on LMI

YANG Liu*[1]，　ZHOU Xing-de[2]，　SHI Xian-zeng[2]，　JIN Bo[1]

(1. Institute of Engineering Mechanics，China Earthquake Administration，Harbin 150080，China；

2. College of Civil and Transportation Engineering，Hohai University，Nanjing 210098，China)

Abstract：In this paper，a frame is taken as the research object. The fractional order state equation(FOSE) is used to design the controller，and a LMI-based controller design method is proposed. The concrete ideas are as follows：first，the original system vibration equation is changed to the FOSE of order between 1～2 meanwhile，the fractional order controller state equation of the same order is constructed，and then is assembled into a whole state equation. Secondly，the inequality is acquired according to the stability condition of the fractional order system. In order to obtain a feasible solution，two parameters are added to the LMI，and the parameter matrix of the controller remains symmetric. Thirdly，from the simulation results，the control effects are better but the control force is larger，so an adjustment factor is suggested to reduce the control force under the condition of control demand. Finally，an example is given to illustrate the feasibility of the proposed method.

Key words：frame；fractional-order；LMI；additional parameters；adjustment

引用本文/Cite this paper：

杨　柳，周星德，石贤增，等. 基于 LMI 的框架结构分数阶控制方法研究[J]. 计算力学学报，2023，**40**(3)：479-483.

YANG Liu，ZHOU Xing-de，SHI Xian-zeng，et al. Research on fractional-order control method of frame based on LMI[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*，2023，**40**(3)：479-483.