

# 矩形箱梁力学性能分析的修正计算方法

岑峰<sup>\*1</sup>, 甘亚南<sup>2</sup>, 尹明干<sup>2</sup>, 高培伟<sup>1</sup>

(1. 南京航空航天大学 土木系, 南京 210016; 2. 盐城工学院 土木工程学院, 盐城 224051)

**摘要:** 本文对矩形箱梁翼板设置了不同的剪滞翘曲位移差函数, 继而综合考虑剪力滞效应、剪切变形以及剪滞翘曲应力和弯矩自平衡条件等因素, 且以能量变分原理为基础建立了矩形箱梁的弹性控制微分方程和自然边界条件, 基于此修正了现行薄壁结构分析方法。与传统剪滞理论相比, 本文方法深刻反映了矩形箱梁的力学特性。研究表明, (1) 由于剪滞翘曲应力和弯矩自平衡条件的引入, 矩形箱梁力学性能分解为独立的初等梁理论和剪滞理论体系, 且箱梁力学性能为两者的叠加效应; (2) 矩形箱梁断面尺寸确定, 剪滞效应对其正应力的影响值不变, 即剪滞效应的竖向力学行为与箱梁跨径无关; (3) 尽管矩形箱梁的梁高对箱梁剪滞翘曲应力和初等梁理论的应力值皆有一定影响, 但其剪力滞系数不变, 因此剪力滞效应与梁高无关; (4) 剪力滞效应不仅影响箱梁翼板力学性能, 而且对其腹板力学行为的影响不可忽视。因而, 与传统剪滞理论相比, 本文修正法不仅计算精度明显提高, 而且更能真实反映矩形箱梁的力学性能。

**关键词:** 自平衡条件; 剪力滞效应; 竖向弯曲; 矩形箱梁; 修正分析法

**中图分类号:** U448.22; O302

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1007-4708(2023)03-0464-08

## 1 引言

箱形截面具有良好的结构性能, 如抗扭刚度大以及有效抵抗正负弯矩的能力强等, 因而是大跨桥梁结构的首选形式<sup>[1-3]</sup>。早期, 学者们运用欧拉梁和铁木辛柯梁理论对该类结构力学性能开展研究, 讨论了剪切变形的影响, 而对于剪滞翘曲应力自平衡条件的分析却鲜有报道。由于现代预应力混凝土(PC)和施工技术的发展, PC箱形梁桥广泛应用于我国桥梁建设中<sup>[4,5]</sup>。近年来, 由于我国交通运输量大幅增加, 很多PC矩形箱梁桥出现梁体开裂和跨中过度下挠等病害<sup>[6-8]</sup>。然而, 现行研究更多关注剪力滞后效应对箱形梁桥上下翼板力学性能的影响, 而且认为箱梁腹板受力特性符合初等梁理论, 忽视了剪力滞后效应对其腹板力学行为的作用<sup>[9-12]</sup>。因而, 现行薄壁结构分析方法依然存在诸多理论缺陷。

事实上, 由于箱形梁良好的抗弯和抗扭性能, 近几十年来, 矩形箱梁在我国大量建设, 且广泛应用于我国公路、铁路和城市高架桥中<sup>[1,5,6]</sup>。并且, 尽管学者们对箱形梁桥进行大量研究, 但基于箱梁

桥运营现状, 现行分析方法依然有待深化和修正。如现行文献就没有综合考虑剪滞翘曲应力和弯矩自平衡条件以及剪力滞效应和铁木辛柯剪切变形等因素<sup>[9,10,13]</sup>。因而, 本文应用能量变分法建立了矩形箱梁的弹性控制微分方程, 研究了竖向弯曲状态下矩形箱梁的力学行为, 获得了诸多新认知, 如自平衡条件对矩形箱梁力学性能的影响、剪滞效应演化规律以及对箱梁腹板的作用等<sup>[13,14]</sup>。因而, 本文理论为箱形梁力学性能分析提供了新方法, 且对该类结构耐久性设计和维修加固具有一定指导作用<sup>[1,6,7]</sup>。

## 2 矩形箱梁控制微分方程及边界条件

### 2.1 箱梁翼板纵向翘曲位移函数的设置

图1矩形箱梁对称弯曲状态时, 若令  $w(z)$  为初等梁理论箱梁竖向挠度,  $\theta(z)$  为箱形截面的竖向转角。且  $f_{j1}(z)$ ,  $f_{j2}(z)$  和  $f_{j3}(z)$  分别为悬臂板和上下翼板剪力滞效应引起箱梁的竖向挠度, 那么, 悬臂板、上下翼板和腹板的纵向位移  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  和  $u_f$  分别为初等梁理论值、剪滞效应引起箱梁翼板的翘曲位移以及翼板间剪滞效应的相互作用之和。可表示为

悬臂板纵向位移<sup>[14]</sup>

$$u_1(x, y, z) = y\theta + [y - \alpha_1 \varphi_1(x) - \beta_1] f'_{j1} + (y - \beta_2) f'_{j2} + (y - \beta_3) f'_{j3} \quad (1)$$

收稿日期: 2021-08-18; 修改稿收到日期: 2021-12-09.

基金项目: 国家自然科学基金(514789408); 甘肃省科技

重大专项(19ZD2GA002)资助项目.

作者简介: 岑峰<sup>\*</sup> (1981-), 男, 硕士, 高级工程师

(E-mail: yhyhm456@163.com).

式中  $\varphi_1(x) = 1 - x^2/b_1^2$  为箱梁悬臂翼板不均匀分布函数,  $\alpha_1$  和  $\beta_1$  为悬臂板满足剪滞翘曲应力和弯矩自平衡条件修正系数。其中,  $b_2 \leq x \leq (b_1 + b_2)$ 。

那么,悬臂翼板剪滞应力为

$$\sigma_{j1} = E[y - \alpha_1 \varphi_1(x)] f_{j1}'' - E\beta_1 f_{j1}'' \quad (2)$$

式中  $\alpha_1$  和  $\beta_1$  为满足  $\int_A \sigma_{j1} dA = 0$  和  $\int_A \sigma_{j1} y dA = 0$  两个联立方程求得的常系数,即  $\alpha_1 = 3I/(4h_1 b_1 t_1)$ ,  $\beta_1 = -I/(h_1 A)$ 。

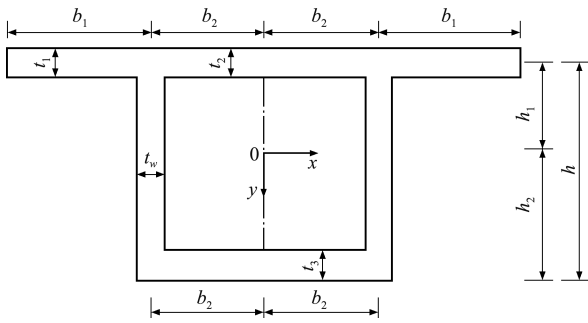


图1 矩形箱梁截面

Fig. 1 Cross section of rectangular box girder

上翼板纵向位移

$$u_2(x, y, z) = y\theta + [y - \alpha_2 \varphi_2(x) - \beta_2] f_{j2}' + (y - \beta_1) f_{j1}' + (y - \beta_3) f_{j3}' \quad (3)$$

同样,  $\varphi_2(x) = 1 - x^2/b_2^2$  为矩形箱梁上翼板不均匀分布函数,  $\alpha_2$  和  $\beta_2$  则为上翼板满足剪滞翘曲应力和弯矩自平衡条件修正系数。其中,  $0 \leq x \leq b_2$ 。

那么,上翼板剪滞应力为

$$\sigma_{j2} = E[y - \alpha_2 \varphi_2(x)] f_{j2}'' - E\beta_2 f_{j2}'' \quad (4)$$

同样,  $\alpha_2$  和  $\beta_2$  为满足  $\int_A \sigma_{j2} dA = 0$  和  $\int_A \sigma_{j2} y dA = 0$  两个联立方程求得的常系数,即  $\alpha_2 = 3I/(4h_1 b_2 t_2)$ ,  $\beta_2 = -I/(h_1 A)$ 。

下翼板纵向位移

$$u_3(x, y, z) = y\theta + [y - \alpha_3 \varphi_3(x) - \beta_3] f_{j3}' + (y - \beta_1) f_{j1}' + (y - \beta_2) f_{j2}' \quad (5)$$

同样,  $\alpha_3$  和  $\beta_3$  为箱梁下翼板满足剪滞翘曲应力和弯矩自平衡条件修正系数。其中,  $0 \leq x \leq b_2$ 。

作为独立力学体系,下翼板剪滞应力为

$$\sigma_{j3} = E[y - \alpha_3 \varphi_3(x)] f_{j3}'' - E\beta_3 f_{j3}'' \quad (6)$$

同样,  $\alpha_3$  和  $\beta_3$  为满足  $\int_A \sigma_{j3} dA = 0$  和  $\int_A \sigma_{j3} y dA = 0$  两个联立方程求得的常系数,即  $\alpha_3 = 3I/(4h_2 b_2 t_3)$ ,  $\beta_3 = -I/(h_2 A)$ 。

腹板纵向位移

$$u_f(x, y, z) = y\theta + (y - \beta_1) f_{j1}' + (y - \beta_2) f_{j2}' + (y - \beta_3) f_{j3}' \quad (7)$$

其中矩形箱梁整个剪滞力学体系也将满足剪滞翘曲应力自平衡条件。

## 2.2 矩形箱梁总势能

(1) 矩形箱梁悬臂板及上下翼板应力

悬臂翼板

$$\sigma_{ZX} = Ey\theta' + E(y - \alpha_1 \varphi_1) f_{j1}'' - E\beta_1 f_{j1}'' + E(y - \beta_2) f_{j2}'' + E(y - \beta_3) f_{j3}'' \quad (8)$$

$$\tau_{j1} = -G\alpha_1 (\partial \varphi_1 / \partial x) f_{j1}' \quad (9)$$

上翼板

$$\sigma_{ZS} = Ey\theta' + E(y - \alpha_2 \varphi_2) f_{j2}'' - E\beta_2 f_{j2}'' + E(y - \beta_1) f_{j1}'' + E(y - \beta_3) f_{j3}'' \quad (10)$$

$$\tau_{j2} = -G\alpha_2 (\partial \varphi_2 / \partial x) f_{j2}' \quad (11)$$

下翼板

$$\sigma_{ZY} = Ey\theta' + E(y - \alpha_3 \varphi_3) f_{j3}'' - E\beta_3 f_{j3}'' + E(y - \beta_1) f_{j1}'' + E(y - \beta_2) f_{j2}'' \quad (12)$$

$$\tau_{j3} = -G\alpha_3 (\partial \varphi_3 / \partial x) f_{j3}' \quad (13)$$

矩形箱梁腹板

$$\sigma_f = Ey\theta' + E(y - \beta_1) f_{j1}'' + E(y - \beta_2) f_{j2}'' + E(y - \beta_3) f_{j3}'' \quad (14)$$

(2) 箱梁悬臂翼板和腹板,以及上下翼板变形总势能

$$V_1 = \frac{1}{2} \iint \left( \frac{\sigma_{ZX}^2}{E} + \frac{\tau_{j1}^2}{G} + \frac{\sigma_{ZS}^2}{E} + \frac{\tau_{j2}^2}{G} + \frac{\sigma_{ZY}^2}{E} + \frac{\tau_{j3}^2}{G} + \frac{\sigma_f^2}{E} \right) dAdz \quad (15)$$

整理后得

$$\begin{aligned} V_1 = & \frac{E}{2} \int_0^l I (\theta')^2 dz + \frac{E}{2} \int_0^l I_1 (f_{j1}'')^2 dz + \\ & \frac{E}{2} \int_0^l I_2 (f_{j2}'')^2 dz + \frac{E}{2} \int_0^l I_3 (f_{j3}'')^2 dz + \\ & E \int_0^l 2 I_4 (\theta' f_{j1}'') dz + E \int_0^l 2 I_5 (\theta' f_{j2}'') dz + \\ & E \int_0^l 2 I_6 (\theta' f_{j3}'') dz + E \int_0^l 2 I_7 (f_{j1}'' f_{j2}'') dz + \\ & E \int_0^l 2 I_8 (f_{j1}'' f_{j3}'') dz + E \int_0^l 2 I_9 (f_{j2}'' f_{j3}'') dz + \\ & \frac{G}{2} \int_0^l I_{G1} (f_{j1}')^2 dz + \frac{G}{2} \int_0^l I_{G2} (f_{j2}')^2 dz + \\ & \frac{G}{2} \int_0^l I_{G3} (f_{j3}')^2 dz \end{aligned} \quad (16)$$

式中  $I = \int_{A_1} y^2 dA_1 + \int_{A_2} y^2 dA_2 + \int_{A_3} y^2 dA_3 + \int_{A_f} y^2 dA_f$ 。

其中,  $A_1$  为悬臂板面积,  $A_2$  为上翼板面积,  $A_3$  为下翼板面积,  $A_f$  为腹板面积,且

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_f$$

$$I_1 = I + \frac{8}{3} \alpha_1 b_1 t_1 (\beta_1 - h_1) + \frac{16}{15} \alpha_1^2 b_1 t_1 + \beta_1^2 A$$

$$I_2 = I + \frac{8}{3} \alpha_2 b_2 t_2 (\beta_2 - h_1) + \frac{16}{15} \alpha_2^2 b_2 t_2 + \beta_2^2 A$$

$$I_3 = I + \frac{8}{3} \alpha_3 b_2 t_3 (\beta_3 - h_2) + \frac{16}{15} \alpha_3^2 b_2 t_3 + \beta_3^2 A$$

$$I_4 = 0, I_{G1} = 8 \alpha_1^2 t_1 / (3 b_1), I_{G2} = 8 \alpha_2^2 t_2 / (3 b_2)$$

$$I_{G3} = 8 \alpha_3^2 t_3 / (3 b_2), I_5 = 0, I_6 = 0$$

$$I_7 = I + \beta_1 \beta_2 A + \frac{4}{3} \alpha_2 b_2 t_2 (\beta_1 - h_2) + \frac{4}{3} \alpha_1 b_1 t_1 (\beta_2 - h_1)$$

$$I_8 = I + \beta_1 \beta_3 A + \frac{4}{3} \alpha_1 b_1 t_1 (\beta_3 - h_1) + \frac{4}{3} \alpha_3 b_2 \alpha_{E3} t_3 (\beta_1 - h_3)$$

$$I_9 = I + \beta_2 \beta_3 A + \frac{4}{3} \alpha_2 b_2 t_2 (\beta_3 - h_1) + \frac{4}{3} \alpha_3 b_2 \alpha_{E3} t_3 (\beta_2 - h_2)$$

矩形箱梁剪切应变能

$$V_j = \frac{1}{2} \int_0^l kGA (\omega' - \theta)^2 dz \quad (17)$$

矩形箱梁荷载势能

$$V_p = - \int_0^l q_y(z) [\omega(z) + f_{j1}(z) + f_{j2}(z) + f_{j3}(z)] dz - Q(z) [\omega(z) + f_{j1}(z) + f_{j2}(z) + f_{j3}(z)]|_0^l + [M_1(z) f'_{j1}(z) + M_2(z) f'_{j2}(z) + M_3(z) f'_{j3}(z) + M_z(z) \theta(z)]|_0^l \quad (18)$$

那么,系统总势能为

$$V = V_1 + V_p + V_j \quad (19)$$

式中  $M_1(z)$  为箱梁悬臂翼板剪滞效应引起关于  $x$  轴的弯矩,  $M_2(z)$  和  $M_3(z)$  为箱梁上下翼板剪滞效应产生的关于  $x$  轴弯矩,  $M_z(z)$  为梁段端产生竖向转角  $\theta(z)$  关于  $x$  轴弯矩,  $Q(z)$  和  $q_y(z)$  为梁段端竖向剪力及箱梁上竖向分布力,  $E$  和  $G$  为矩形箱梁材料的杨氏弹性模量和剪切弹性模量,  $I$  为矩形箱梁关于  $x$  轴的惯性矩。

### 2.3 箱梁弹性控制微分方程和边界条件

根据能量变分原理  $\delta V = 0$ , 矩形箱梁弹性控制微分方程和自然边界条件为<sup>[15]</sup>

$$EI\theta'' + kGA(\omega' - \theta) = 0 \quad (20)$$

$$kGA(\omega'' - \theta') + q_y = 0 \quad (21)$$

$$[EI\theta' + M_z]|_0^l \delta\theta = 0 \quad (22)$$

$$[kGA(\omega' - \theta) - Q]|_0^l \delta\omega = 0 \quad (23)$$

$$EI_1 f_{j1}^{(4)} - GI_{G1} f_{j1}'' + EI_7 f_{j2}^{(4)} + EI_8 f_{j3}^{(4)} - q_y = 0 \quad (24)$$

$$EI_2 f_{j2}^{(4)} - GI_{G2} f_{j2}'' + EI_7 f_{j1}^{(4)} + EI_9 f_{j3}^{(4)} - q_y = 0 \quad (25)$$

$$EI_3 f_{j3}^{(4)} - GI_{G3} f_{j3}'' + EI_8 f_{j1}^{(4)} + EI_9 f_{j2}^{(4)} - q_y = 0 \quad (26)$$

$$[EI_1 f_{j1}'' + EI_7 f_{j2}'' + EI_8 f_{j3}'' - M_1]|_0^l \delta f_{j1}' = 0 \quad (27)$$

$$[EI_1 f_{j1}^{(3)} + EI_7 f_{j2}^{(3)} + EI_8 f_{j3}^{(3)} + Q(z)]|_0^l \delta f_{j1} = 0 \quad (28)$$

$$[EI_2 f_{j2}'' + EI_7 f_{j1}'' + EI_9 f_{j3}'' - M_2]|_0^l \delta f_{j2}' = 0 \quad (29)$$

$$[EI_2 f_{j2}^{(3)} + EI_7 f_{j1}^{(3)} + EI_9 f_{j3}^{(3)} + Q(z)]|_0^l \delta f_{j2} = 0 \quad (30)$$

$$[EI_3 f_{j3}'' + EI_8 f_{j1}'' + EI_9 f_{j2}'' - M_3]|_0^l \delta f_{j3}' = 0 \quad (31)$$

$$[EI_3 f_{j3}^{(3)} + EI_8 f_{j1}^{(3)} + EI_9 f_{j2}^{(3)} + Q(z)]|_0^l \delta f_{j3} = 0 \quad (32)$$

由微分方程组可知,矩形箱梁力学性能为初等梁理论和剪滞理论体系的叠加效应。

### 2.4 矩形箱梁控制微分方程的求解

将微分方程(20,21)整理代换,可得  $\omega(z)$  和  $\theta(z)$  方程为

$$\omega(z) = e_1 z^3 + e_2 z^2 + e_3 z + e_4 + \frac{q_y}{24EI} z^4 \quad (33)$$

$$\theta(z) = e_1 \left( 3z^2 + \frac{6EI}{kGA} \right) + e_2 2z + e_3 + \frac{q_y}{kGA} z + \frac{q_y}{6EI} z^3 \quad (34)$$

式中  $e_1, e_2, e_3$  和  $e_4$  为方程常系数,可根据  $\omega(z)$  和  $\theta(z)$  相应边界条件求解。

由微分方程(24,25)可得

$$f_{j2}^{(4)} + M_1 f_{j2}'' + M_3 f_{j3}^{(4)} + M_4 f_{j3}'' + M_5 q_y = 0 \quad (35)$$

$$\text{式中 } M_1 = \frac{GI_{G2} I_8}{E(I_7 I_9 - I_2 I_8)}, M_3 = \frac{I_1 I_9 - I_8 I_7}{I_7 I_9 - I_2 I_8}$$

$$M_4 = \frac{-GI_{G1} I_9}{E(I_7 I_9 - I_2 I_8)}, M_5 = \frac{I_8 - I_9}{E(I_7 I_9 - I_2 I_8)}$$

由微分方程(25,26)可得

$$f_{j2}^{(6)} + N_1 f_{j2}^{(4)} + N_2 f_{j2}'' + N_3 f_{j1}^{(6)} + N_4 f_{j1}^{(4)} + N_5 q_y = 0 \quad (36)$$

$$\text{式中 } N_1 = \frac{G(I_{G3} I_2 + I_{G2} I_3)}{E(I_9^2 - I_3 I_2)}, N_2 = \frac{-G^2 I_{G2} I_{G3}}{E^2(I_9^2 - I_3 I_2)}$$

$$N_3 = \frac{I_9 I_8 - I_3 I_7}{I_9^2 - I_3 I_2}, N_4 = \frac{GI_{G3} I_7}{E(I_9^2 - I_3 I_2)}$$

$$N_5 = \frac{-GI_{G3}}{E^2(I_9^2 - I_3 I_2)}$$

由方程(35,36)整理代换,可得

$$f_{j1}^{(8)} + \frac{M_3 N_1 - M_1 N_3 + (M_4 - N_4)}{M_3 - N_3} f_{j1}^{(6)} + \frac{M_3 N_2 + M_4 N_1 - M_1 N_4}{M_3 - N_3} f_{j1}^{(4)} + \frac{M_4 N_2}{M_3 - N_3} f_{j1}'' + \frac{M_5 N_2 - N_5 M_1}{M_3 - N_3} q_y = 0 \quad (37)$$

由方程(37)可知,其特征方程解为

$$r_{1,2} = \pm \eta_1, r_{3,4} = \pm \eta_2, r_{5,6} = \pm \eta_3$$

那么,方程  $f_{j1}(z)$  的通解为

$$f_{j1}(z) = c_1 \operatorname{ch} \eta_1 z + c_2 \operatorname{sh} \eta_1 z + c_3 \operatorname{ch} \eta_2 z + c_4 \operatorname{sh} \eta_2 z + c_5 \operatorname{ch} \eta_3 z + c_6 \operatorname{sh} \eta_3 z + c_7 z + c_8 - q_y / (2GI_{G1}) z^2 \quad (38)$$

根据方程  $f_{j1}(z)$  形式,假设  $f_{j2}(z)$  和  $f_{j3}(z)$  表达式,将其代入方程组(24~26)求得  $f_{j2}(z)$  和  $f_{j3}(z)$  常系数,最后可得  $f_{j2}(z)$  和  $f_{j3}(z)$  方程为

$$f_{j2}(z) = c_1 B_1 \operatorname{ch} \eta_1 z + c_2 B_1 \operatorname{sh} \eta_1 z + c_3 B_3 \operatorname{ch} \eta_2 z + c_4 B_3 \operatorname{sh} \eta_2 z + c_5 B_5 \operatorname{ch} \eta_3 z + c_6 B_5 \operatorname{sh} \eta_3 z + c_9 z + c_{10} - q_y / (2GI_{G2}) z^2 \quad (39)$$

$$\text{式中 } B_1 = \frac{(EI_7 I_8 - EI_1 I_9) \eta_1^2 + GI_{G1} I_9}{(EI_7 I_9 - EI_2 I_8) \eta_1^2 - GI_{G2} I_8}$$

$$B_3 = \frac{(EI_7 I_8 - EI_1 I_9) \eta_2^2 + GI_{G1} I_9}{(EI_7 I_9 - EI_2 I_8) \eta_2^2 - GI_{G2} I_8}$$

$$B_5 = \frac{(EI_7 I_8 - EI_1 I_9) \eta_3^2 + GI_{G1} I_9}{(EI_7 I_9 - EI_2 I_8) \eta_3^2 - GI_{G2} I_8}$$

$$f_{j3}(z) = c_1 D_1 \operatorname{ch} \eta_1 z + c_2 D_1 \operatorname{sh} \eta_1 z + c_3 D_3 \operatorname{ch} \eta_2 z + c_4 D_3 \operatorname{sh} \eta_2 z + c_5 D_5 \operatorname{ch} \eta_3 z + c_6 D_5 \operatorname{sh} \eta_3 z + c_{11} z + c_{12} - q_y / (2GI_{G3}) z^2 \quad (40)$$

$$\text{式中 } D_1 = (GI_{G1} - EI_1 \eta_1^2 - B_1 EI_7 \eta_1^2) / (EI_8 \eta_1^2)$$

$$D_3 = (GI_{G1} - EI_1 \eta_2^2 - B_3 EI_7 \eta_2^2) / (EI_8 \eta_2^2)$$

$$D_5 = (GI_{G1} - EI_1 \eta_3^2 - B_5 EI_7 \eta_3^2) / (EI_8 \eta_3^2)$$

式中  $c_1, \dots, c_{12}$  为方程  $f_{j1}(z)$ ,  $f_{j2}(z)$  和  $f_{j3}(z)$  常系数,可根据其相应边界求解。

### 3 矩形箱梁常用边界条件

根据方程(22,23)或方程(27~32)可推导出矩形箱梁具体边界条件,如初等梁理论简支边界条件。

(1) 相关  $w(z)$  和  $\theta(z)$  边界条件

① 均布荷载

$$w(z)|_0^l = 0, \theta'(z)|_0^l = 0 \quad (41)$$

表1 简支矩形箱梁上翼板正应力 ( $L_1 = L_2 = 8 \text{ m}$ ,  $h = 3 \text{ m}$ , 集中荷载)

Tab. 1 Stress of top slab for simply supported rectangular girders

( $L_1 = L_2 = 8 \text{ m}$ ,  $h = 3 \text{ m}$ , concentrated load)

| 上翼板横向坐标/m                 | 0     | 0.7   | 1.4   | 2.1   | 2.75  | 3.4   | 4     | 4.6   | 5.2   |
|---------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 初等梁理论值/ $10^5 \text{ Pa}$ | 2.32  | 1.88  | 0.63  | -1.26 | -3.37 | -1.19 | 0.45  | 1.53  | 1.91  |
| 剪力滞影响值/ $10^5 \text{ Pa}$ | -6.46 | -6.46 | -6.46 | -6.46 | -6.46 | -6.46 | -6.46 | -6.46 | -6.46 |
| 翼板总应力/ $10^5 \text{ Pa}$  | -4.14 | -4.58 | -5.83 | -7.72 | -9.83 | -7.65 | -6.01 | -4.93 | -4.55 |
| 有限元值/ $10^5 \text{ Pa}$   | -4.59 | -4.88 | -5.99 | -7.42 | -9.35 | -7.27 | -5.71 | -4.73 | -4.27 |
| 本文理论剪滞系数                  | 0.64  | 0.71  | 0.90  | 1.20  | 1.52  | 1.18  | 0.93  | 0.76  | 0.70  |
| 传统理论值/ $10^5 \text{ Pa}$  | -4.06 | -4.42 | -5.32 | -6.83 | -8.88 | -6.79 | -5.48 | -4.65 | -4.42 |
| 传统理论剪滞系数                  | 0.63  | 0.68  | 0.82  | 1.06  | 1.37  | 1.05  | 0.85  | 0.72  | 0.68  |
| 自平衡条件影响/%                 | 2     | 3.6   | 9.6   | 13.0  | 10.7  | 12.7  | 9.7   | 6.0   | 2.9   |

注:翼板总应力为初等梁理论与剪力滞影响值之和;剪力滞影响值为箱梁剪滞效应对翼板正应力影响值;传统理论为箱梁悬臂板和翼板设置2个不同剪滞翘曲位移函数,但不考虑自平衡条件影响的计算值;自平衡条件影响为该文理论与传统理论差值,且该差值与传统理论值的比率。下同。

② 集中荷载。如图2所示,箱形梁跨间受力为一个或多个集中力  $P_k$ ,其左右相邻边界距离为  $l_{k1}$  和  $l_{k2}$ ,且  $w(z)$  和  $\theta(z)$  下标代表其处于  $z_1$  或  $z_2$  坐标系,那么点  $k$  处需引入连续边界条件为

$$w_1(l_{k1}) = w_2(0), w'_1(l_{k1}) = w'_2(0)$$

$$\theta'_1(l_{k1}) = \theta'_2(0), \theta_1(l_{k1}) - \theta_2(0) = P_k / (kGA) \quad (42)$$

同样,根据需要,其他特定边界条件皆可由方程(22,23)或方程(27~32)获得。

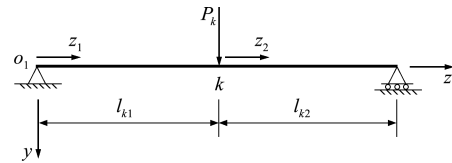


图2 集中荷载下简支箱梁坐标系

Fig. 2 Coordinate system of simply supported box girder under concentrated load

### 4 算例及分析

对于矩形截面梁,该结构材料和几何参数分别为  $E = 3.5 \times 10^4 \text{ MPa}$ ,  $G = 1.5 \times 10^4 \text{ MPa}$ ,上下翼板厚度为  $t_1 = t_2 = t_3 = 0.25 \text{ m}$ ,翼板长度为  $b_1 = 2.45 \text{ m}$ ,  $b_2 = 2.75 \text{ m}$ ,腹板厚度为  $t_w = 0.35 \text{ m}$ ,且矩形箱梁高度为  $h$ 。静力分析时集中力为  $P_k(z) = 128 \times 9800 \text{ N}$ 。进而,根据本文推导公式及传统理论方法开展矩形箱梁力学性能分析(注:有限元法分析中,首先,根据图1箱梁各交点坐标绘制矩形箱梁断面,继而应用 ANSYS 有限元程序 Extrude 功能形成箱梁体。最后,划分单元网格,模拟简支边界条件在矩形箱梁一端节点施加  $x$  和  $y$  方向约束,  $z$  方向则自由伸缩,另一端则在节点施加  $x, y$  和  $z$  三向约束)。

由表1和表2及图3可知,矩形箱梁翼板正应力为剪滞效应影响值和初等梁理论计算值之和,但

剪力滞与初等梁理论力学体系无关联。而且,剪滞翘曲应力与箱梁跨径无关,如图3中16 m和32 m跨径箱梁跨中剪滞翘曲应力值相等。然而,随着跨径的增加,尽管箱梁桥剪力滞后效应减小,但剪滞

效应对其正应力的影响值无变化。因而,本文理论更能反映矩形箱梁剪滞理论的本质特征。

由表1和表2及图4可知,与传统剪滞理论相比,箱梁翼板和腹板相交处附近,本文剪滞系数

表2 简支矩形箱梁下翼板正应力 ( $L_1 = L_2 = 8$  m,  $h = 3$  m, 集中荷载)

Tab.2 Stress on bottom slab for simply supported rectangular girders  
( $L_1 = L_2 = 8$  m,  $h = 3$  m, concentrated load)

| 下翼板横向坐标/m         | 0     | 0.6   | 1.2   | 1.8  | 2.3   | 2.75  |
|-------------------|-------|-------|-------|------|-------|-------|
| 初等梁理论值/ $10^5$ Pa | -3.49 | -3.06 | -1.79 | 0.15 | 2.13  | 4.04  |
| 剪力滞影响值/ $10^5$ Pa | 9.84  | 9.84  | 9.84  | 9.84 | 9.84  | 9.84  |
| 翼板总应力/ $10^5$ Pa  | 6.35  | 6.78  | 8.05  | 9.99 | 11.97 | 13.88 |
| 有限元值/ $10^5$ Pa   | 5.97  | 6.41  | 7.66  | 9.47 | 11.45 | 13.18 |
| 本文理论剪滞系数          | 0.65  | 0.69  | 0.82  | 1.02 | 1.22  | 1.41  |
| 传统理论值/ $10^5$ Pa  | 6.21  | 6.61  | 7.65  | 9.38 | 11.35 | 13.54 |
| 传统理论剪滞系数          | 0.63  | 0.67  | 0.78  | 0.95 | 1.15  | 1.38  |
| 自平衡条件影响/%         | 2.3   | 2.6   | 5.2   | 6.5  | 5.5   | 2.5   |

表3 矩形箱梁腹板正应力 ( $L_1 = L_2 = 8$  m,  $h = 3$  m, 集中荷载)

Tab.3 Stress on webs for simply supported rectangular girders  
( $L_1 = L_2 = 8$  m,  $h = 3$  m, concentrated load)

| 腹板竖向坐标/m          | 1.2   | 0.8   | 0.4   | 0     | -0.6 | -1.2 | -1.8  |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|------|------|-------|
| 初等梁理论值/ $10^5$ Pa | -6.50 | -4.35 | -2.17 | 0     | 3.26 | 6.52 | 9.78  |
| 剪力滞影响值/ $10^5$ Pa | -3.33 | -2.34 | -1.36 | -0.38 | 1.08 | 2.55 | 4.07  |
| 腹板总应力/ $10^5$ Pa  | -9.83 | -6.69 | -3.53 | -0.38 | 4.34 | 9.07 | 13.85 |
| 有限元值/ $10^5$ Pa   | -9.35 | -6.37 | -3.39 | -0.36 | 4.08 | 8.79 | 13.52 |
| 剪力滞系数             | 1.51  | 1.54  | 1.63  | —     | 1.33 | 1.39 | 1.42  |
| 传统理论腹板应力          | -8.87 | -5.97 | -2.98 | 0     | 4.48 | 8.96 | 13.44 |
| 自平衡条件影响(%)        | 10.8  | 12.1  | 18.5  | —     | -3.1 | 1.2  | 3.0   |

注: 腹板剪滞系数为腹板竖向某位置剪滞效应影响值与该位置初等梁理论计算值之和,且其与初等梁理论计算值之比。

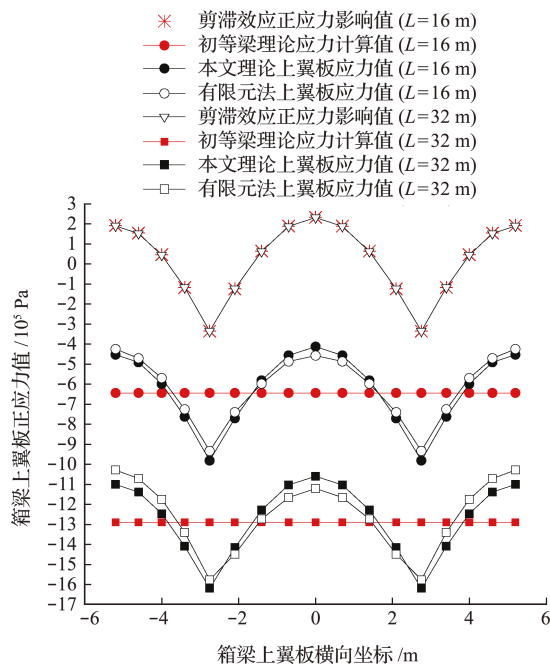


图3 简支箱梁上翼板正应力 ( $L_1 = L_2 = L/2$ ,  $h = 3$  m, 集中力)

Fig.3 Stress on top slab for simply supported box girders  
( $L_1 = L_2 = L/2$ ,  $h = 3$  m, concentrated load)

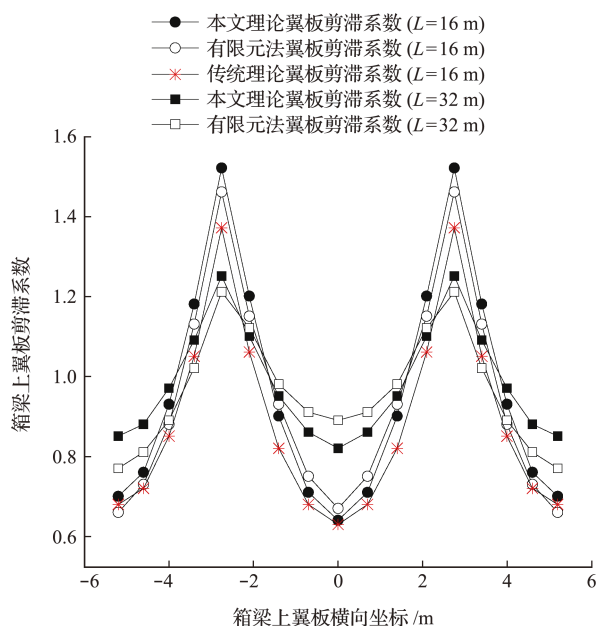


图4 简支箱梁上翼板剪滞系数

( $L_1 = L_2 = L/2$ ,  $h = 3$  m, 集中力)

Fig.4 Shear lag coefficients of top slab for simply supported box girders  
( $L_1 = L_2 = L/2$ ,  $h = 3$  m, concentrated load)

理论值明显大于传统理论值,因而传统剪滞理论明显低估了剪力滞效应的影响。且以箱梁上下翼板横向中心为基准,较大区域本文理论剪滞效应与传统理论差别较小,而箱梁翼板和腹板相交处差值则较大。由于该处应力集中现象最为严重,因而本研究理论对于翼板配筋具有指导作用。同时,随着矩形箱梁跨径增加,其翼板剪力滞后效应明显趋弱。

由表1和表2及图5可知,传统剪滞理论显示随着矩形箱梁高度的增加,其剪滞系数减小,特别是翼板和腹板相交处。而本文理论显示,矩形箱梁剪力滞后效应与梁高无关,即矩形箱梁高度对其剪力滞后效应无影响。

由表3和图6可知,(1)矩形箱梁腹板正应力与剪滞效应密切相关,即剪滞效应愈突出,其对腹

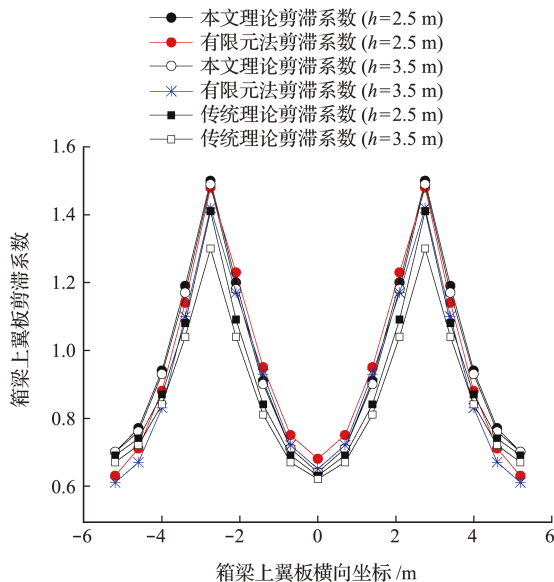


图5 简支矩形箱梁上翼板剪滞系数 ( $L_1=L_2=L/2$ , 集中荷载)

Fig. 5 Shear lag coefficients of top slab for simply supported rectangular box girders ( $L_1=L_2=L/2$ , concentrated load)

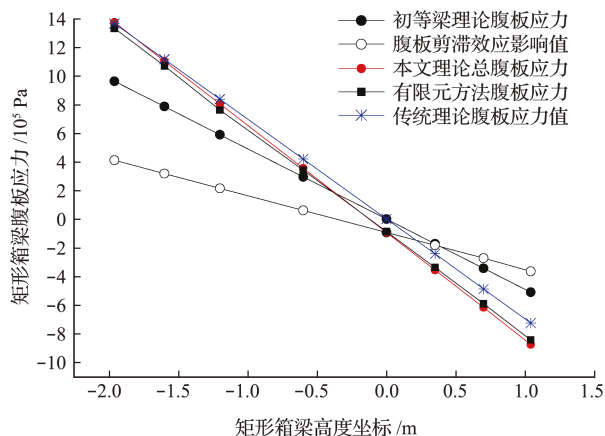


图6 简支箱梁腹板正应力 ( $h=3\text{ m}$ ,  $b_1=1.5b_2$ , 集中荷载)

Fig. 6 Web's stress for simply supported rectangular box girders ( $h=3\text{ m}$ ,  $b_1=1.5b_2$ , concentrated load)

板正应力的影响愈显著。如顶板与腹板相交处压应力增大 10.8% (表3), 且随着悬臂板长度的增加, 当  $b_1=1.5b_2$  时, 图6 顶板与腹板相交处压应力增加 21.0%, 因而此时剪滞翘曲应力和弯矩自平衡条件的影响更为突出。然而, 箱梁底板与腹板相交处自平衡条件的影响相对较小。而且, 值得注意的是, 随着桥面宽度增加以及材料科学的进步, 矩形箱梁悬臂翼板长度将会增加, 因而该方面研究更具理论和工程实际意义。(2) 矩形箱梁腹板受剪力滞后效应的影响较大 (表3), 且竖向顶板向中性轴方向, 腹板剪滞效应趋强; 而底板向中性轴, 剪滞效应减弱。(3) 由于剪滞翘曲应力和弯矩自平衡条件的影响, 矩形箱梁初等梁理论中性轴上已有应力存在, 其值为  $-0.38 \times 10^5\text{ Pa}$  (表1)。因而, 初等梁理论中性轴已非实际意义上的中性轴。

由表1及图6和图7可知, 矩形箱梁顶板与腹板相交处, 与传统剪滞理论相比, 尽管本文理论腹板应力影响率分别为 10.8% ( $b_1=2.45\text{ m}$ ) 和 21.0% ( $b_1=1.5b_2\text{ m}$ ), 但其挠度本文理论值仅增加约 5% 和 6.5%。因而自平衡条件对矩形箱梁挠度计算值影响较小。

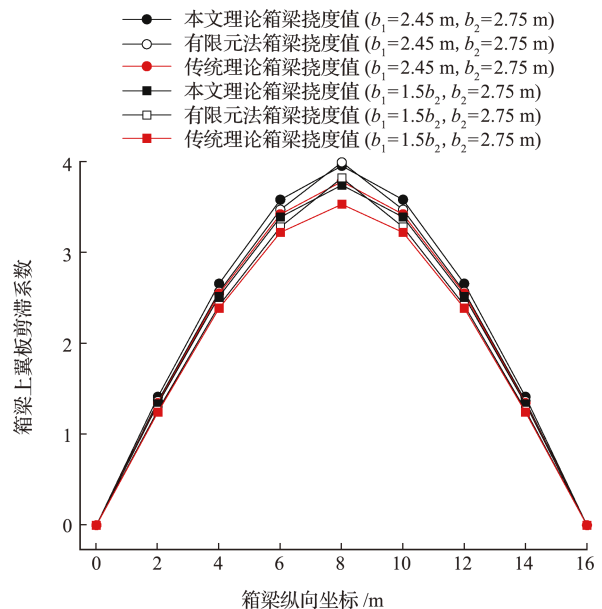


图7 矩形箱梁竖向挠度 ( $L_1=L_2=8\text{ m}$ , 集中荷载)

Fig. 7 Vertical deflection of simply supported rectangular box girder ( $L_1=L_2=8\text{ m}$ , concentrated load)

## 5 结 论

(1) 本文综合考虑了剪力滞、剪切变形及剪滞翘曲应力和弯矩自平衡条件等因素, 因而本文理论基础更为扎实。基于此, 本文方法修正了矩形箱梁

的传统剪滞计算理论,且算例表明,本文方法计算精度明显提高。

(2) 由于剪滞翘曲应力和弯矩自平衡条件的引入,箱梁力学性能分解为独立的初等梁理论和剪滞理论体系,这表明矩形箱梁剪滞效应具有独立性。

(3) 箱梁梁高对矩形箱梁剪滞效应无影响,且剪滞效应对不同跨径箱梁翼板正应力影响值相同。同时,传统剪滞理论对腹板正应力计算值明显偏小,特别是上翼板与腹板相交处。

(4) 基于箱梁力学性能精细化分析,本文方法为矩形箱梁钢筋和预应力筋优化布置奠定了理论基础,且对该类结构耐久性设计具有一定指导作用。

## 参考文献(References):

- [1] 郭金琼,房贞政,郑 振. 箱形梁设计理论[M]. 北京: 人民交通出版社, 2008. (GUO Jin-qiong, FANG Zhen-zheng, ZHENG Zhen. *Design Theory of Box Girder* [M]. Beijing: China Communication Press, 2008. (in Chinese))
- [2] Dowell R K, Johnson T P. Closed-form shear flow solution for box-girder bridges under torsion [J]. *Engineering Structures*, 2012, **34**: 383-390.
- [3] 刘应龙,蔺鹏臻,何志刚,等. 箱梁剪力滞效应分析的梁条方法及模型[J]. 应用基础与工程科学学报, 2021, **29**(3): 718-728. (LIU Ying-long, LIN Peng-zhen, HE Zhi-gang, et al. Beam strip method and model for shear lag effect of box girders[J]. *Journal of Basic Science and Engineering*, 2021, **29**(3): 718-728. (in Chinese))
- [4] 徐 勋,叶华文,强士中. 带悬臂板薄壁箱梁的扭转和畸变分析[J]. 铁道学报, 2015, **37**(10): 83-91. (XU Xun, YE Hua-wen, QIANG Shi-zhong. Torsion and distortion analysis of thin-walled box girder with cantilever flanges[J]. *Journal of the China Railway Society*, 2015, **37**(10): 83-91. (in Chinese))
- [5] 施 威. 沅江大桥混凝土箱梁日照温度场与温度应力研究[J]. 世界桥梁, 2016, **44**(4): 59-63. (SHI Wei. Study of solar temperature field and temperature stress for concrete box girder of Yuanjiang river bridge[J]. *World Bridges*, 2016, **44**(4): 59-63. (in Chinese))
- [6] 吕志涛,潘钻峰. 大跨径预应力混凝土箱梁桥设计中的几个问题[J]. 土木工程学报, 2010, **43**(1): 70-76. (LÜ Zhi-tao, PAN Zuan-feng. Several problems in design of long-span prestressed concrete box girder bridge[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2010, **43**(1): 70-76. (in Chinese))
- [7] 徐向锋,张 峰,韦成龙. 预应力混凝土箱梁开裂后的刚度损伤评估[J]. 工程力学, 2015, **32**(7): 95-102. (XU Xiang-feng, ZHANG Feng, WEI Cheng-long. Stiffness damage assessment of prestressed concrete box-girder after cracking [J]. *Engineering Mechanics*, 2015, **32**(7): 95-102. (in Chinese))
- [8] 郑 辉,方 志,刘 明. 预应力活性粉末混凝土箱梁抗剪性能试验研究[J]. 土木工程学报, 2015, **48**(6): 51-63. (ZHENG Hui, FANG Zhi, LIU Ming. Experimental study on shear behavior of prestressed reactive powder concrete box girder[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2015, **48**(6): 51-63. (in Chinese))
- [9] 肖 军,李小珍,刘德军,等. 不同位移函数对箱梁剪力滞效应的影响[J]. 中国公路学报, 2016, **29**(9): 90-96. (XIAO Jun, LI Xiao-zhen, LIU De-Jun, et al. Influence of different displacement functions on shear lag effect of box girders[J]. *China Journal of Highway and Transport*, 2016, **29**(9): 90-96. (in Chinese))
- [10] Zhou S J. Finite beam element considering shear-lag effect in box girder[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2010, **136**(9): 1115-1122.
- [11] Lin Z B, Zhao J. Revisit of AASHTO effective flange-width provisions for box girders[J]. *Journal of Bridge Engineering*, 2011, **16**(6): 881-889.
- [12] 何志刚,蔺鹏臻. 考虑截面配筋的箱梁剪力滞效应分析[J]. 铁道学报, 2018, **40**(5): 137-142. (HE Zhi-gang, LIN Peng-zhen. Analysis of the shear lag effect in consideration of section reinforcement [J]. *Journal of the China Railway Society*, 2018, **40**(5): 137-142. (in Chinese))
- [13] Jiang R, Wu Q, Xiao Y, et al. Study on shear lag effect of a PC box girder bridge with corrugated steel webs under self weight[J]. *Applied Mechanics and Materials*, 2014, **638-640**: 1092-1098.
- [14] 王根会,陈义勤,樊 江,等. 单箱双室组合箱形梁桥静力学特性的研究[J]. 计算力学学报, 2020, **37**(3): 355-361. (WANG Gen-hui, CHEN Yi-qin, FAN Jiang, et al. Research on static properties of Twin-Cell composite box girder bridges [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2020, **37**(3): 355-361. (in Chinese))
- [15] 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1981. (HU Hai-chang. *Variational Principle of Elasticity and Its Applications* [M]. Beijing: Science Press, 1981. (in Chinese))

## Modified analysis method on mechanical properties of rectangular box girders

CEN Feng<sup>\*1</sup>, GAN Ya-nan<sup>2</sup>, YIN Ming-gan<sup>2</sup>, GAO Pei-wei<sup>1</sup>

(1, Department of Civil Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;

2, School of Civil Engineering and Architecture, Yancheng Institute of Technology, Yancheng 224051, China)

**Abstract:** Firstly, different shear lag warping displacement functions are set for a rectangular box girder, then factors such as shear lag effect, shear deformation, self-equilibrium conditions for shear lag warping stress and moment are considered. Based on the energy-variation principle, the differential equations and natural boundary conditions of the rectangular box girder are established, and the existing analytical method of thin-walled structures is modified. Compared with the traditional shear lag theory, a deeper understanding of the mechanical properties of the rectangular box girder is obtained. This research shows that: (1) Due to the introduction of self-equilibrium conditions, the mechanical properties of the box girders can be decomposed into independent elementary beam theory and shear lag theory. Therefore, the mechanical properties of the rectangular box girder are represented by the superposition of two theories. (2) After the section size of the box girder is determined, the shear lag effect on the normal stress remains unchanged, the vertical mechanical behavior of shear lag effect is independent of the span of the box girder. (3) Although the height of rectangular box girder has some influence on the shear warping stress of the box girder and the theoretical stress value of an elementary beam, its shear lag coefficient remains unchanged; so the shear lag effect is independent of the height of the rectangular box girder. (4) The shear lag effect not only affects the mechanical properties of the box girder's flanges, but also can not be ignored on the mechanical properties of the box girder's webs. Therefore, the modified method in this paper not only improves the calculation accuracy significantly, but also better reflects the mechanical characteristics of the rectangular box girder.

**Key words:** self-equilibrium conditions; shear lag effect; vertical bending; rectangular box girders; modified analysis method

---

引用本文/Cite this paper:

岑 峰, 甘亚南, 尹明干, 等. 矩形箱梁力学性能分析的修正计算方法[J]. 计算力学学报, 2023, 40(3): 464-471.

CEN Feng, GAN Ya-nan, YIN Ming-gan, et al. Modified analysis method on mechanical properties of rectangular box girders[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2023, 40(3): 464-471.