

基于 mbS 模式的有限单元法

钱若军^{*1}, 袁行飞²

(1. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092; 2. 浙江大学 空间结构研究中心, 杭州 310058)

摘要: mbS 模式及其有限元法是在固体和结构分析模型中引入薄膜、弯曲和剪切理论, 且采用纯拉压、纯弯和纯剪单元进行分析的数值方法。在时空系中剖分物质单元和时间单元上构造以指数函数和贝塞尔函数为插入函数且按 Lagrange 插值条件的薄膜、弯曲和剪切等基本位移函数, 由此得到更加完备和耦合的固体和结构实体单元的变形模式, 根据能量泛函变分原理得到静动力有限元基本方程的一致格式。研究表明, mbS 模式及其有限元法可用于梁柱和板壳等结构的静动力分析及屈曲分析。

关键词: mbS 模式; 有限单元法; 扩展形函数; 弹塑性力学; 能量泛函变分原理

中图分类号: O242.21

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2023)03-0447-09

1 引言

Clough^[1]在 ASCE 有关二维应力问题的论文中第一次提出有限单元法的概念, 文献[2-4]进行了一系列的创始性工作, 之后进一步完善了有限元法理论和方法的研究^[3,4]以及算法、数值方法及实施的研究^[5,6], 于是有限元法成为固体和结构静动力弹塑性分析^[7-10]以及屈曲分析^[11]的具有坚实理论支撑的应用基础。

薄膜和弯曲及剪切(mbS)是固体和结构基本且耦合的力学行为分析, 按有限元法(mbS)的离散规则, 固体和结构分别简单地离散为纯拉压、纯弯曲或纯剪切单元, 但是处于复杂应力状态的固体和结构表示为简单响应的叠加, 意味着舍弃了系统中部分应变能, 是导致分析误差的一个原因。

mbS 模式的有限单元法是通过引入变形叠加原理来表示拉压、弯曲或剪切的耦合效应, 且同时按纯拉压、纯弯曲和纯剪切单元进行分析的有限元法^[7,12,13], 该法曾简称为基于变形分析理论的有限元法 DB FEM^[14]。

mbS 模式有限单元法的理论框架和方法包括时空系的构建, 固体和结构数学单元的剖分及实体单元的定义, 时间单元的剖分和物理过程的定义, 数学单元的位移函数及作用和位移的时间函数的构造, 根据能量泛函变分原理建立静动力分析的有

限元基本方程以及给出多米诺传递的基本方程。本文介绍了 mbS 的上述框架和方法, 以均布荷载作用下四边简支方形板为例, 采用 mbS 法分析板的弯曲和剪切变形, 验证了本文方法的有效性。

2 时空系和系统的剖分

为了分析包括作用及其过程内固体和结构体系在约束条件下的行为和可能的破坏, 应首先建立时空系, 在时空系内定义系统, 按物理条件和几何关系建立分析系统的控制方程并解此方程。

在物质空间和时域中构造时空系 (t, X, Y, Z) , 简记为 $(t, \mathbf{X})$, 时空系为物质坐标系即 Lagrange 坐标系, 在时空系中定义物理过程 Σ 和系统定义域 Ω 。将空间离散为有限个子域 Ω_e , 将物理过程在时域中离散为有限个子域 Σ_e , 其中 Ω_e 是在固体和结构的特征线或特征面, 如梁柱的中性轴或板壳的中性面上构造的数学单元。先在单元 Ω_e 中建立时空系 (t, x, y, z) , 简记为 $(t, \mathbf{x})$, 在 $(t, \mathbf{x})$ 内定义数学单元的几何信息及物质单元即实体单元。再定义域为 $[\tau, \tau + \Delta\tau]$ 的时间子域 Σ_e 内任意时刻 $t, \tau \leq t \leq \tau + \Delta\tau$, 描述物理子过程。

因此, 可以看出固体和结构的实体单元在时域 Σ_e 内的力学行为等价于子域 Ω_e 的能量转换过程。

3 系统在时空域的描述

系统在时空域中的行为总可以用在任意物理过程 $[\tau, \tau + \Delta\tau]$ 内 t 时刻固体和结构实体单元内点 $(\mathbf{x})$ 处的作用和变形表示, 即

$${}^t p(\mathbf{x}, \omega_p) = {}^\tau p(\mathbf{x}) + \Delta {}^t p(\mathbf{x}, \omega_p) \quad (1)$$

收稿日期: 2021-08-09; 修改稿收到日期: 2021-10-29.

基金项目: 国家自然科学基金(51878600; 52278224)资助项目.

作者简介: 钱若军^{*} (1946-), 男, 学士, 教授

(E-mail: prjqj@163.com).

$${}^t\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = {}^t\mathbf{u}(\mathbf{x}) + \Delta^t\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) \quad (2)$$

式中 $\Delta^t\mathbf{p}(\mathbf{x}, \omega_p)$ 为物理过程 $\Delta\tau$ 内作用密度关于空间和时间的改变量。

$$\Delta^t\mathbf{p}(\mathbf{x}, \omega_p) = \Delta^t\mathbf{p}_C(\mathbf{x}) + \Delta^t\mathbf{p}_{NC}(\mathbf{x}, \omega_p) \quad (3)$$

式中 ω_p 为动力作用的圆频率, 对于静力问题 $\omega_p = 0$ 。

显然系统中的作用增量是由静力和动力两部分组成, 作用的动力效应是作用的时效, 反映了物理过程内作用关于时间的变化规律, 即

$$\Delta^t\mathbf{p}(\mathbf{x}, \omega_p) = \Delta^t\mathbf{p}_C(\mathbf{x}) + {}^t\mathbf{p}_{NC}(\mathbf{x}, \omega_p)(1 + \bar{f}_p) \quad (4)$$

式中 $\mathbf{p}_C$ 和 $\mathbf{p}_{NC}$ 分别为恒力和非恒力, $\bar{f}_p$ 为作用的动力放大系数, 是反映动力作用时效的参数, 与过程内动力关于时间的变化有关。

$\Delta^t\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$ 为物理过程 $\Delta\tau$ 内固体和结构实体单元点 $(\mathbf{x})$ 的位移关于空间和时间的改变量。

$$\Delta^t\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = \Delta^t\mathbf{u}_s(\mathbf{x})(1 + f_D) \quad (5)$$

式中 ω 为结构固有频率, $\Delta^t\mathbf{u}_s(\mathbf{x})$ 为物理过程中任意时刻 t 固体和结构实体单元点 $(\mathbf{x})$ 的静位移, f_D 为动力位移放大参数。

4 基本函数及其形函数

4.1 函数的构造

上述讨论表明, 在固体和结构的数学单元 Ω_e 上构造时空系 $(t, \mathbf{x})$, 并在 $(t, \mathbf{x})$ 上定义实体单元。如果能给出实体单元上点 $(\mathbf{x})$ 与数学单元上相应点 (x) 的变形关系, 那么可以用数学单元上相应点 (x) 的变形来表示点 $(\mathbf{x})$ 的变形, 因此需要构造数学单元的位移模式。在有限元法中, 对选定的多项式插值函数按 Lagrange 或 Hermite 插值条件构造满足 C^0 或 C^1 类连续条件的位移函数^[1,4,15]。

与传统有限元法不同的是, mbS 模式有限元法中除采用多项式插值函数外, 主要采用指数函数或贝塞尔函数组成插值函数, 且仅以 Lagrange 插值条件构造位移函数, 除依然能满足连续性要求外, 还能使所构造的位移函数满足问题的基本假定及修正后的基本假定。

4.2 一维直线单元的基本函数及形函数

以一维直线及二维三角形单元为例说明单元中的基本函数及其形函数的构造。

对于一维线单元, 有插值函数

$$u = c_1 + c_2 g_2 \quad (6)$$

由式(6)可得时空系 $(t, \mathbf{x})$ 中长度为 l 的一维线单元内点 (x) 处的基本函数

$$u(x) = \mathbf{N}\mathbf{u}_e \quad (7)$$

式中 $\mathbf{u}_e$ 为单元结点的函数值, $\mathbf{N}$ 为一维线单元的

形函数。

当取 $g_2 = x$ 时, 基本函数为线性模式, 则有

$$\mathbf{N} = [1 - x/l \quad x/l] \quad (8)$$

当取 $g_2 = e^{ax}$ 时, 基本函数为指数模式, 则有

$$\mathbf{N} = \left[1 - \frac{e^{ax} - 1}{e^{al} - 1} \quad \frac{e^{ax} - 1}{e^{al} - 1} \right] \quad (9)$$

当取 $g_2 = J_n$ 时, 基本函数为 $n = 0, 1, 2, \dots$ 阶贝塞尔函数模式, 则有

$$\mathbf{N} = \left[1 - \frac{J_n(\mathbf{x}) - J_n(0)}{J_n(l) - J_n(0)} \quad \frac{J_n(\mathbf{x}) - J_n(0)}{J_n(l) - J_n(0)} \right] \quad (10)$$

当取 $g_2 = J_1(x) + J_2(x)$ 时, 基本函数为 J_1 和 J_2 的贝塞尔函数的线性组合模式为

$$\mathbf{N} = [1 - V_{1N5} g_2 \quad V_{1N5} g_2] \quad (11)$$

式中 V_{1N5} 为 $J_1 + J_2$ 中前 5 项系数之和, $V_{1N5} =$

$$\sum_{j=1,3,2} BJ_{1,j} + \sum_{j=2,4,2} BJ_{2,j}。$$

4.3 二维三角形单元的基本函数及形函数

对于二维三角形单元, 有插值函数

$$u = c_1 + c_2 g_2 + c_3 g_3 \quad (12)$$

由式(12)可得时空系 $(t, \mathbf{x})$ 中面积为 A 的二维三角形单元内点 (x, y) 处的基本函数

$$u(x, y) = \mathbf{N}\mathbf{u}_e \quad (13)$$

式中 $\mathbf{N}$ 为二维三角形单元的形函数。

当取 $g_2 = x$ 和 $g_3 = y$ 时, 基本函数为线性模式, 则有

$$\mathbf{N} = [L_i \quad L_j \quad L_k] \quad (14)$$

式中 L_i, L_j 和 L_k 为三角形单元的面积坐标。

当取 $g_2 = e^{a\xi}$ 和 $g_3 = e^{a\eta}$ 时, 基本函数为指数模式, 则有

$$\mathbf{N} = \left[\frac{e^{aL_i} - 1}{e^a - 1} \quad \frac{e^{aL_j} - 1}{e^a - 1} \quad 1 - \frac{e^{aL_i} - 1}{e^a - 1} - \frac{e^{aL_j} - 1}{e^a - 1} \right] \quad (15)$$

当取 $g_2 = J_n(\eta)$ 和 $g_3 = J_n(\zeta)$ 时, 基本函数为面积坐标系下的二维贝塞尔函数模式, 则有

$$\mathbf{N} = \left[1 - \frac{J_n(L_j) - J_n(0)}{J_n(1) - J_n(0)} - \frac{J_n(L_k) - J_n(0)}{J_n(1) - J_n(0)} \quad \frac{J_n(L_j) - J_n(0)}{J_n(1) - J_n(0)} \quad \frac{J_n(L_k) - J_n(0)}{J_n(1) - J_n(0)} \right] \quad (16)$$

当取 $g_2 = J_1(\eta) + J_2(\eta)$ 和 $g_3 = J_1(\zeta) + J_2(\zeta)$ 时, 基本函数为 J_1 和 J_2 的贝塞尔函数的组合模式, 则有

$$\mathbf{N} = [1 - V_{2N5} g_2 - V_{2N5} g_3 \quad V_{2N5} g_2 \quad V_{2N5} g_3] \quad (17)$$

式中 $V_{2N5} = 1/(J_1(1) + J_2(1))$ 。

当取 $g_2 = J_1(\eta) + J_2(\eta)$ 和 $g_3 = J_1(\zeta) + J_2(\zeta)$ 时, 基本函数为二维协调贝塞尔插值函数的组合

模式。

5 静动力作用

由式(4)可知,系统的作用除了与物理过程有关外,还与过程内时间的变化有关,本文不研究产生作用的物理过程,且知道作用在空间中的规律,作用在时间子域 Σ_e 内的分布规律,即在物理过程 $[\tau, \tau + \Delta\tau]$ 内时刻 t 固体和结构实体单元点 $(\mathbf{x})$ 的作用 ${}^t\mathbf{p}$ 可用时间结点上的作用表示为

$${}^t\mathbf{p}(\mathbf{x}, \omega_p) = {}^t\mathbf{N}_p(\omega_p) {}^t\mathbf{p}(\mathbf{x}) \quad (18)$$

式中 ${}^t\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 为时刻 τ 和 $\tau + \Delta\tau$ 时的动力作用幅值,即

$${}^t\mathbf{p}(\mathbf{x}) = [{}^\tau\mathbf{p}(\mathbf{x}) \quad {}^{\tau+\Delta\tau}\mathbf{p}(\mathbf{x})]^\mathrm{T} \quad (19)$$

${}^t\mathbf{N}_p(\omega_p)$ 为动力作用时间形函数,其用一个简单的初等函数来描述作用随时间的变化,据初步研究,可采用线性模式或指数模式等插入函数按 Lagrange 插值条件求得。当采用式(8)的线性模式时,有

$${}^t\mathbf{N}_p(\omega_p) = \left[1 - \frac{t-\tau}{\Delta\tau} \quad \frac{t-\tau}{\Delta\tau} \right] \quad (20)$$

当采用式(9)的指数模式时,有

$${}^t\mathbf{N}_p(\omega_p) = \left[1 - \frac{e^{\omega_p(t-\tau)} - 1}{e^{\omega_p\Delta\tau} - 1} \quad \frac{e^{\omega_p(t-\tau)} - 1}{e^{\omega_p\Delta\tau} - 1} \right] \quad (21)$$

于是,当作用时间形函数采用线性模式时,在 $t = \tau$ 时有

$${}^\tau\dot{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, \omega_p) = ({}^{\tau+\Delta\tau}\mathbf{p}(\mathbf{x}, \omega_p) - {}^\tau\mathbf{p}(\mathbf{x}, \omega_p))\phi_1 \quad (22)$$

当作用时间形函数采用指数模式时,在 $t = \tau$ 时有

$$\begin{aligned} {}^\tau\dot{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, \omega_p) &= ({}^{\tau+\Delta\tau}\mathbf{p}(\mathbf{x}, \omega_p) - {}^\tau\mathbf{p}(\mathbf{x}, \omega_p))\phi_2 \\ {}^\tau\ddot{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, \omega_p) &= ({}^{\tau+\Delta\tau}\mathbf{p}(\mathbf{x}, \omega_p) - {}^\tau\mathbf{p}(\mathbf{x}, \omega_p))\phi_3 \\ {}^\tau\ddot{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, \omega_p) &= ({}^{\tau+\Delta\tau}\mathbf{p}(\mathbf{x}, \omega_p) - {}^\tau\mathbf{p}(\mathbf{x}, \omega_p))\phi_4 \end{aligned} \quad (23)$$

式中

$$\phi_1 = \frac{1}{\Delta\tau}, \phi_2 = \frac{\omega_p}{e^{\omega_p\Delta\tau} - 1}, \phi_3 = \frac{\omega_p^2}{e^{\omega_p\Delta\tau} - 1}, \phi_4 = \frac{\omega_p^3}{e^{\omega_p\Delta\tau} - 1} \quad (24)$$

在动力作用过程 $[\tau, \tau + \Delta\tau]$ 内 t 时刻固体结构单元点 $(\mathbf{x})$ 上的总作用密度

$${}^t\mathbf{p}(\mathbf{x}, \omega_p) = {}^\tau\mathbf{p}_c(\mathbf{x}) + \Delta^t\mathbf{p}_c(\mathbf{x}) + {}^\tau\mathbf{p}_{NC}(\mathbf{x}, \omega_p)(1 + \bar{f}_p) \quad (25)$$

式中 $\bar{f}_p = (\alpha - 1)({}^\tau\mathbf{N}_p + f_p)$, 其中, ${}^\tau\mathbf{p}_c$ 和 ${}^\tau\mathbf{p}_{NC}$ 为动力作用过程初始 τ 时刻守恒力和非守恒力的幅值; α 为动力过程终止时刻非守恒力幅值 ${}^{\tau+\Delta\tau}\mathbf{p}_{NC}$ 关于初始幅值的变化系数,即 ${}^{\tau+\Delta\tau}\mathbf{p}_{NC} = \alpha {}^\tau\mathbf{p}_{NC}$, 如 $\alpha = 0$, 则 ${}^{\tau+\Delta\tau}\mathbf{p}_{NC} = 0$, 如 $0 < \alpha < 1$, 则作用衰减, 如 $\alpha = 1$, 则为平稳过程, 如 $\alpha > 1$, 则作用激增。

f_p 为作用的动力放大系数,是反映动力作用

时效的参数,如 $f_p = 0$ 则为静力作用过程。在动力作用过程 $[\tau, \tau + \Delta\tau]$ 内时刻 t 时,当作用形函数采用线性模式时,

$$f_p = \phi_1 dt \quad (26)$$

当作用形函数采用指数模式时,

$$f_p = \phi_2 dt + \frac{1}{2} \phi_3 (dt)^2 + \frac{1}{6} \phi_4 (dt)^3 \quad (27)$$

经动力作用周期 $\Delta\tau$ 后,当作用形函数采用线性模式时,

$$f_p = \phi_1 \Delta\tau \quad (28)$$

当作用形函数采用指数模式时,

$$f_p = \phi_2 \Delta\tau + \frac{1}{2} \phi_3 (\Delta\tau)^2 + \frac{1}{6} \phi_4 (\Delta\tau)^3 \quad (29)$$

由上可见,在静动力作用过程 $[\tau, \tau + \Delta\tau]$ 内,由任何原因产生的作用 ${}^t\mathbf{p}(\mathbf{x}, \omega_p)$ 与空间时间都有关系,虽然这里未涉及作用源和产生作用的过程与结构系统之间的耦合关系。

6 mbS 模型的位移分析

6.1 固体和结构实体单元内点 $(\mathbf{x})$ 的位移

采用薄膜-弯曲-剪切(mbS)分析模型,故需建立固体和结构实体单元内点 $(\mathbf{x})$ 的变形关系。在物理过程内时刻 t , 时空系 $(t, \mathbf{x})$ 中固体和结构实体单元内点 $(\mathbf{x})$ 的位移为

$${}^t\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = {}^\tau\mathbf{u}(\mathbf{x}) + \Delta^t\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) \quad (30)$$

式中 $\Delta^t\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$ 为位移增量。

$$\Delta^t\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = \Delta^t\mathbf{u}_s(\mathbf{x}) + \Delta^t\mathbf{u}_D(\mathbf{x}, \omega) \quad (31)$$

式中 $\Delta^t\mathbf{u}_D(\mathbf{x}, \omega)$ 为因动力作用产生的动位移增量,

$$\begin{aligned} \Delta^t\mathbf{u}_D(\mathbf{x}, \omega) &= {}^\tau\dot{\mathbf{u}}(t-\tau) + \frac{1}{2} {}^\tau\ddot{\mathbf{u}}(t-\tau)^2 + \\ &\quad \frac{1}{6} {}^\tau\ddot{\mathbf{u}}(t-\tau)^3 + \dots \end{aligned} \quad (32)$$

而 $\Delta^t\mathbf{u}_s(\mathbf{x})$ 为静位移,为拉压、弯、扭产生位移和剪切产生位移的叠加,即

$$\Delta^t\mathbf{u}_s(\mathbf{x}) = \Delta^t\mathbf{u}_c(\mathbf{x}) + \Delta^t\mathbf{u}_s(\mathbf{x}) \quad (33)$$

6.2 位移叠加

由式(33)可知,

$$\Delta^t\mathbf{u}_c(\mathbf{x}) = \Delta\mathbf{u}_m + \Delta\mathbf{u}_b + \Delta\mathbf{u}_T \quad (34)$$

式中下标 m, b, T 和 S 分别为拉压、弯、扭及剪切效应。显然点 $(\mathbf{x})$ 处的位移与数学单元上相应点 (x) 的位移之间存在一定的几何关系,即

$$\begin{aligned} \Delta^t\mathbf{u}_c(\mathbf{x}) &= \sum_i f_{ui} L(\Delta\mathbf{u}(x)) \\ \Delta^t\mathbf{u}_s(\mathbf{x}) &= \sum_j f_{usj} L(\Delta\mathbf{u}_s(x)) \end{aligned} \quad (35)$$

式中 L 为微分算子,表示可能出现的位移的 0 阶、

1阶或2阶导数; $\Delta u(x)$ 和 $\Delta u_s(x)$ 为点 (x) 的位移或剪切位移, 包括线位移和角位移; f_{ui} 和 f_{usj} 为变形参数, 是点 (x) 和点 (x) 位移的变换, 下标 u 和 u_s 为变形参数对应的位移分量, i 和 j 分别为产生薄膜、弯曲和剪切位移效应的序列号。

式(35)显示了固体和结构单元上点 (x) 的位移表示的实体单元内点 (x) 的位移。

6.3 固体和结构单元的静位移

在时空系 (t, x) 中建立固体和结构数学单元上点 (x) 的位移函数

$$\Delta^t u(x) = N_u(x) \Delta^t u_e \quad (36)$$

式中 $\Delta^t u(x)$ 为单元位移向量, 包括可能存在的薄膜、弯曲和剪切位移向量; $N_u(x)$ 为位移形函数, 根据固体和结构 mbS 位移模式可采用式(8~17)形函数; $\Delta^t u_e$ 为单元结点位移向量。

将式(36)代入式(35), 按单元结点自由度序号重构扩展形函数 $\bar{N}$, 及扩展单元结点位移向量 $\Delta^t \bar{u}_e$, 以后仍记为 $\Delta^t u_e$, 于是式(35)可改写为

$$\begin{aligned} \Delta^t u_c(x) &= \sum_i f_{ui} L(\bar{N}_u) \Delta^t u_e \\ \Delta^t u_s(x) &= \sum_j f_{usj} L(\bar{N}_{us}) \Delta^t u_e \end{aligned} \quad (37)$$

将式(37)代入式(33), 得固体和结构实体单元的静位移

$$\Delta^t u_s(x) = \bar{N}_s \Delta^t u_e \quad (38)$$

式中 $\bar{N}_s$ 为实体单元位移扩展形函数。

6.4 固体和结构单元的动位移

在时空系 (t, x) 中建立固体和结构实体单元上点 (x) 的位移函数

$${}^t u(x, \omega) = {}^t N(\omega) {}^t u(x) \quad (39)$$

式中 ${}^t u(x)$ 为单元时间结点 $\tau, \tau + \Delta\tau$ 时刻的位移, ${}^t u(x) = [{}^\tau u(x) \quad {}^{\tau+\Delta\tau} u(x)]^T$; ${}^t N(\omega)$ 为单元位移时间形函数, 当采用式(9)的形函数, 则有关于第 j 阶模态的动位移时间形函数

$${}^t N_u(\omega_j) = \left[1 - \frac{e^{n\omega_j(t-\tau)} - 1}{e^{n\omega_j T_j} - 1} \quad \frac{e^{n\omega_j(t-\tau)} - 1}{e^{n\omega_j T_j} - 1} \right] \quad (40)$$

式中 ω_j 为结构关于第 j 阶模态的振动圆频率; T_j 为关于第 j 阶模态的振动周期; n 为正整数, $n = 1, 2, 3, \dots, n$ 为参与的振型数。

于是, 根据式(39)简单运算后, 得关于第 j 阶振型的动力位移放大参数

$$f_{Dj} = \phi_{2j} dt + \frac{1}{2} \phi_{3j} (dt)^2 + \frac{1}{6} \phi_{4j} (dt)^3 \quad (41)$$

当考虑有前 m 阶振型参与时, 有动力位移放大参数

$$f_D = \sum_{j=1}^m f_{Dj} \quad (42)$$

将式(42)代入式(5), 可得物理过程 $\Delta\tau$ 内固体和结构单元的位移增量。将式(38)代入式(5), 物理过程单元内位移增量可表示为

$$\Delta^t u(x, \omega) = \bar{N}_s (1 + f_D) \Delta^t u_e \quad (43)$$

7 mbS 模型的应变分析

7.1 固体和结构实体单元线性应变

在物理过程 $[\tau, \tau + \Delta\tau]$ 内时刻 t , 时空系 (t, x) 中定义的固体和结构实体单元内点 (x) 的应变

$${}^t e(x, \omega) = {}^\tau e(x_0, \omega) + \Delta^t e(x, \omega) \quad (44)$$

式中 $\Delta^t e(x, \omega)$ 为应变增量, 由线性和非线性两部分组成

$$\Delta^t e(x, \omega) = \Delta^t e_L(x, \omega) + \Delta^t e_{NL}(x, \omega) \quad (45)$$

$$\Delta^t e_L(x, \omega) = \Delta^t e_s(x) + \Delta^t e_D(x, \omega) \quad (46)$$

式中 $\Delta^t e_D(x, \omega)$ 为动应变, $\Delta^t e_s(x)$ 为薄膜、弯曲和剪切应变组成的静应变

$$\Delta^t e_s(x) = \Delta^t e_c(x) + \Delta^t e_s(x) \quad (47a)$$

$$\Delta^t e_c(x) = [\Delta^t \epsilon_{xc} \quad \Delta^t \epsilon_{yc} \quad \Delta^t \epsilon_{zc} \quad \Delta^t \gamma_{xyc} \quad \Delta^t \gamma_{yzc} \quad \Delta^t \gamma_{zxc}]^T$$

$$\Delta^t e_s(x) = [\Delta^t \gamma_{Sxx} \quad \Delta^t \gamma_{Syy} \quad \Delta^t \gamma_{Szz} \quad \Delta^t \gamma_{Sxy} \quad \Delta^t \gamma_{Syz} \quad \Delta^t \gamma_{Szx}]^T \quad (47b)$$

式中 $\Delta^t \epsilon$ 和 $\Delta^t \gamma$ 分别为正应变和剪应变分量。

式(47a)又可表示为

$$\begin{aligned} \Delta^t e_s(x) &= [\Delta^t \epsilon_x \quad \Delta^t \epsilon_y \quad \Delta^t \epsilon_z \quad \Delta^t \gamma_{xy} \quad \Delta^t \gamma_{yz} \quad \Delta^t \gamma_{zx}]^T = \\ &[\Delta^t \epsilon_k]^T \quad (k=1, 6) \end{aligned} \quad (47c)$$

如果位移在时域中的变化采用指数型函数描述, 那么实体单元内点 (x) 的应变增量的时空描述为

$$\Delta^t e_L(x, \omega) = \Delta^t e_s(x) (1 + f_D) \quad (48)$$

式中 f_D 如式(42)所示。式(48)表示了固体和结构动应变的线性模式, 显然 f_D 是静应变的动力放大因子。

7.2 线性应变矩阵

根据工程应变的定义, 式(47)的正应变和剪应变分量为

$$\begin{aligned} \Delta^t \epsilon_{xc} &= \frac{\partial \Delta^t u_c(x)}{\partial x}, \dots, \Delta^t \gamma_{xyc} = \\ &\frac{\partial \Delta^t u_c(x)}{\partial y} + \frac{\partial \Delta^t v_c(x)}{\partial x}, \dots \\ \Delta^t \gamma_{Sxx} &= 2 \frac{\partial \Delta^t u_s(x)}{\partial x}, \dots, \Delta^t \gamma_{Sxy} = \\ &\frac{\partial \Delta^t u_s(x)}{\partial y} + \frac{\partial \Delta^t v_s(x)}{\partial x}, \dots \end{aligned} \quad (49)$$

将式(36)代入式(49), 经整理后, 式(47)所示的线性静应变增量

$$\Delta' \mathbf{e}_s(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{b}} \Delta' \mathbf{u}_e(\mathbf{x}) \quad (50)$$

式中 $\bar{\mathbf{b}}$ 为固体和结构实体单元点 $(\mathbf{x})$ 的应变矩阵 $\bar{\mathbf{b}} = [\bar{\mathbf{b}}_x \ \bar{\mathbf{b}}_y \ \bar{\mathbf{b}}_z \ \bar{\mathbf{h}}_{xy} \ \bar{\mathbf{h}}_{yz} \ \bar{\mathbf{h}}_{zx}]^T = [\bar{\mathbf{b}}_j]^T \ (j=1,6)$ (51)

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{b}}_x &= \sum_i f_{ui} L(\partial \bar{\mathbf{N}}_u / \partial x) + 2 \sum_j f_{usj} L(\partial \bar{\mathbf{N}}_{us} / \partial x) \cdots \\ \bar{\mathbf{h}}_{xy} &= \sum_i f_{ui} L(\partial \bar{\mathbf{N}}_u / \partial y) + \sum_i f_{vi} L(\partial \bar{\mathbf{N}}_v / \partial x) + \\ &\quad \sum_j f_{usj} L(\partial \bar{\mathbf{N}}_{us} / \partial y) + \sum_j f_{vsj} L(\partial \bar{\mathbf{N}}_{vs} / \partial x) \cdots \end{aligned} \quad (52)$$

以上 $\bar{\mathbf{b}}_y, \bar{\mathbf{b}}_z, \bar{\mathbf{h}}_{yz}$ 和 $\bar{\mathbf{h}}_{zx}$ 也有类似的表达。

在考虑位移加速度的影响时,固体和结构实体单元的线性动应变即应变的时空描述为

$$\begin{aligned} \Delta' \mathbf{e}_L(\mathbf{x}, \omega) &= \Delta' \mathbf{e}_s(\mathbf{x}) (1 + f_D) = \bar{\mathbf{b}} (1 + f_D) \Delta' \mathbf{u}_e = \\ &= [\bar{\mathbf{b}}_j]^T (1 + f_D) \Delta' \mathbf{u}_e \quad (j=1,6) \end{aligned} \quad (53)$$

7.3 固体和结构实体单元非线性应变

对于仅保留位移二阶项,忽略更高阶项的固体和结构内点 $(\mathbf{x})$ 的非线性应变增量为

$$\Delta' \mathbf{e}_{NL}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \Delta' \mathbf{A}' \boldsymbol{\theta} \quad (54)$$

式中 $\Delta' \mathbf{A}$ 为应变矩阵^[2,5,12,16]。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta} &= \left[\frac{\partial \Delta' \mathbf{u}_x(\mathbf{x})}{\partial x} \quad \frac{\partial \Delta' \mathbf{v}_x(\mathbf{x})}{\partial x} \quad \frac{\partial \Delta' \mathbf{w}_x(\mathbf{x})}{\partial x} \right. \\ &\quad \frac{\partial \Delta' \mathbf{u}_y(\mathbf{x})}{\partial y} \quad \frac{\partial \Delta' \mathbf{v}_y(\mathbf{x})}{\partial y} \quad \frac{\partial \Delta' \mathbf{w}_y(\mathbf{x})}{\partial y} \\ &\quad \left. \frac{\partial \Delta' \mathbf{u}_z(\mathbf{x})}{\partial z} \quad \frac{\partial \Delta' \mathbf{v}_z(\mathbf{x})}{\partial z} \quad \frac{\partial \Delta' \mathbf{w}_z(\mathbf{x})}{\partial z} \right]^T \end{aligned}$$

$\boldsymbol{\theta}$ 可进一步表示为 $\boldsymbol{\theta} = {}^T \mathbf{G} \Delta' \mathbf{u}_e$ 。

$$\begin{aligned} {}^T \mathbf{G}(\mathbf{x}) &= \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}_{us}}{\partial x} \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}_{vs}}{\partial x} \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}_{ws}}{\partial x} \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}_{us}}{\partial y} \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}_{vs}}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}_{us}}{\partial z} \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}_{vs}}{\partial z} \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}_{ws}}{\partial z} \right]^T \end{aligned} \quad (55)$$

式中 $\bar{\mathbf{N}}_{us}, \bar{\mathbf{N}}_{vs}$ 和 $\bar{\mathbf{N}}_{ws}$ 为固体和结构实体单元内点 $(\mathbf{x})$ 的位移分量扩展形函数。

8 有限元基本方程

系统在作用下从物理过程初始时刻到终止时刻的过程中,外力功转换为系统内的应变能,系统的能量转换过程等价于从不平衡状态趋于稳定的平衡状态,所以系统的平衡状态可以从能量的转换中获得。

8.1 能量泛函变分原理

有限元基本方程及单元刚度矩阵可以根据虚功原理、总势能驻值(极值)原理、卡斯提也诺定理和能量泛函变分原理来推导。

在物理过程 $[\tau, \tau + \Delta\tau]$ 内,作用力在固体和结构位移上做的功转换成应变能的过程等价于系统的平衡过程,也是系统能量趋于守恒的过程,在时空系 $(t, \mathbf{x})$ 固体和结构实体单元的总势能为

$${}^t \pi_i = {}^\tau \pi_i + \int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} \Delta' \pi_i dt \quad (56)$$

式中 系统的总势能包括内力功即应变能 e 和外力功 w , 所以有

$$\begin{aligned} {}^\tau \pi_i &= \int_v ({}^\tau e(\mathbf{x}) - {}^\tau w(\mathbf{x})) dv \\ \int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} \Delta' \pi_i dt &= \int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} \int_v (\Delta' e(\mathbf{x}, \Delta' \mathbf{u}_e) - \\ &\quad \Delta' w(\mathbf{x}, \Delta' \mathbf{u}_e)) dv dt \end{aligned} \quad (57)$$

式中 $\Delta' e = \Delta' e_{ep} + \Delta' e_p$ 为单元应变能密度, e_{ep} 和 e_p 为单元弹塑性和塑性应变能密度, w 为外力功密度。根据应变能和外力功的定义,式(57)可进一步表示为

$$\begin{aligned} {}^\tau \pi_i &= \int_v \frac{1}{2} {}^\tau \mathbf{e}_s^T {}^\tau \boldsymbol{\sigma} dv - \int_v {}^\tau \mathbf{u}^T {}^\tau \mathbf{p} dv \\ \int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} \Delta' \pi_i (\Delta' \mathbf{u}_e) dt &= \int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} \left[\int_v \Delta' \mathbf{e}_L^T {}^\tau \boldsymbol{\sigma} dv + \right. \\ &\quad \int_v \Delta' \mathbf{e}_{NL}^T {}^\tau \boldsymbol{\sigma} dv + \\ &\quad \left. \int_v \frac{1}{2} (\Delta' \mathbf{e}_L^T + \Delta' \mathbf{e}_{NL}^T) \Delta' \boldsymbol{\sigma} dv - \right. \\ &\quad \left. \int_v \Delta' \mathbf{u}^T {}^\tau \mathbf{p} dv - \int_v \Delta' \mathbf{u}^T \Delta' \mathbf{p} dv \right] dt \end{aligned} \quad (58)$$

式中 $\mathbf{e}$ 为单元应变, $\boldsymbol{\sigma}$ 为单元应力, $\mathbf{u}$ 为单元上的位移, $\mathbf{p}$ 为单元上的作用。将线性静动力应变和非线性应变表达式、位移模式及以弹性或弹塑性应变矩阵 ${}^T \mathbf{D}$ 为变换的物理关系 $\Delta' \boldsymbol{\sigma} = {}^T \mathbf{D} \Delta' \mathbf{e}_L$ 等引入式(58),并注意到当前时刻 t , 还包括过程的初始时刻 τ 时,单元上的作用还包括由材料质量产生的惯性力及因材料内摩擦产生的阻尼力。于是根据总势能驻值原理

$$\delta' \pi_i (\Delta' \mathbf{u}_e) = 0$$

即得固体和结构实体单元的动平衡方程

$$\begin{aligned} ({}^T \mathbf{m}_D \mu_m + {}^T \mathbf{c}_D \mu_c + {}^T \mathbf{k}_D + {}^T \mathbf{k}_\sigma) \Delta' \mathbf{u}_e = \\ \int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} \left[\int_v \bar{\mathbf{N}}^T {}^\tau \mathbf{p}_C dv + \int_v \bar{\mathbf{N}}^T \Delta' \mathbf{p}_C dv + \right. \\ \left. \int_v \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{p}_{NC} (1 + \bar{f}_p) dv \right] dt - {}^\tau \mathbf{f}_e - {}^\tau \mathbf{r}_i \end{aligned} \quad (59a)$$

由式(59a)可见,系统实际存在的内力,包括因材料固有特性产生的弹性力和前物理过程产生的初应力和材料质量产生的惯性力以及因材料内摩擦产生的阻尼力,都将对系统提供刚度。若动力放大系数 $\bar{f}_p = f_D = 0$, 则式(59a)蜕化为静平衡方程

$$(\tau \mathbf{k}_L + \tau \mathbf{k}_\sigma) \Delta' \mathbf{u}_e = \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \left[\int_v \bar{\mathbf{N}}^T \tau \mathbf{p}_C dv + \int_v \bar{\mathbf{N}}^T \Delta' \mathbf{p}_C dv \right] dt - \tau \mathbf{f}_e - \tau \mathbf{r}_i \quad (59b)$$

8.2 静动平衡方程

静动平衡方程(59)中, $\tau \mathbf{m}_D$ 和 $\tau \mathbf{c}_D$ 为考虑动位移的固体和结构单元的质量矩阵及阻尼矩阵

$$\begin{aligned} \tau \mathbf{m}_D &= \int_v \bar{\mathbf{N}}^T (1 + f_D) \tau \rho \bar{\mathbf{N}} (1 + f_D) dv \\ \tau \mathbf{c}_D &= \int_v \bar{\mathbf{N}}^T (1 + f_D) \tau \mathbf{c} \bar{\mathbf{N}} (1 + f_D) dv \end{aligned} \quad (60)$$

μ_m 和 μ_c 分别为采用指数模式的位移时间形函数时的参数, 取 $n=1$ 时, 有

$$\begin{aligned} \mu_m &= \frac{\omega_j^2}{e^{2\pi} - 1} (1 + \omega_j \Delta\tau) \\ \mu_c &= \frac{\omega_j}{e^{2\pi} - 1} \left(1 + \omega_j \Delta\tau + \frac{1}{2} \omega_j^2 (\Delta\tau)^2 \right) \end{aligned} \quad (61)$$

式中 ω_j 为第 j 阶振型的圆频率。

$\tau \mathbf{k}_D$ 和 $\tau \mathbf{k}_\sigma$ 为考虑动位移后固体和结构单元的线刚度矩阵和初应力刚度矩阵, 即

$$\begin{aligned} \tau \mathbf{k}_D &= \int_v \bar{\mathbf{b}}^T (1 + f_D) \tau \mathbf{D} \bar{\mathbf{b}} (1 + f_D) dv \\ \tau \mathbf{k}_\sigma &= \int_v \mathbf{G}^T \tau \mathbf{M} \mathbf{G} dv \end{aligned} \quad (62)$$

对于静力问题, $\tau \mathbf{k}_D$ 蜕化为单元的弹塑性线刚度矩阵 $\tau \mathbf{k}_L$, 即式(59b)中

$$\tau \mathbf{k}_L = \int_v \bar{\mathbf{b}}^T \tau \mathbf{D} \bar{\mathbf{b}} dv \quad (63)$$

式中 $\bar{\mathbf{b}}$ 为固体和结构实体单元点 $(\mathbf{x})$ 的应变矩阵, 如式(51)所示; $\tau \mathbf{D}$ 为弹塑性模量矩阵; $\tau \mathbf{k}_L$ 与应变矩阵 $\bar{\mathbf{b}}$ 有关, 也就是与单元的应变有关, 充分地表示单元的应变, 由此可见一斑。而 $\bar{\mathbf{b}}^T \bar{\mathbf{b}}$ 的耦合项也反映了内力功的效应, 如面内薄膜力在因弯曲引起的面内位移上做的功等。

由上述简单关系可见, 考虑动力作用后单元的线刚度矩阵

$$\tau \mathbf{k}_D = (1 + f_D)^2 \tau \mathbf{k}_L$$

$\Delta' \mathbf{u}_e$ 为单元结点位移向量, $\mathbf{p}_C$ 和 $\mathbf{p}_{NC}$ 分别为守恒力和非守恒力集度, $\tau \mathbf{f}_e$ 为固体和结构单元内力的等效结点力向量 $\tau \mathbf{f}_e = \int_v \bar{\mathbf{b}}^T \tau \boldsymbol{\sigma} dv$, $\tau \mathbf{r}_i$ 为由应变的高阶量产生的不平衡力, $\bar{f}_P$ 和 f_D 分别为动力作用和动力位移放大系数。

对式(59)的向量变换后集成, 得时空系 $(t, \mathbf{X})$ 中定义的固体和结构整体有限元控制方程, 引入边界条件, 即可对固体和结构进行宏观分析。

9 算例分析

以均布荷载作用下四边简支方形板为例, 分析板的弯曲和剪切变形, 简要显示 mbS 模式有限元法的基本原理、方法和过程。

9.1 平板的 mbS 有限元法简介及基本过程

9.1.1 平板的变形分析

现考虑静力作用下小位移平板的应变。为此, 一般应根据问题列出实体单元中点 $(\mathbf{x})$ 的位移表达, 本文仅给出平板中普遍适用的面内和横向剪切位移

$$\begin{aligned} \Delta' \mathbf{u}_S(\mathbf{x}) &= \Delta u_S - \alpha z_S \left(\frac{\partial \Delta w_S}{\partial x} + \Delta \theta_{Sx} \right) \\ \Delta' \mathbf{v}_S(\mathbf{x}) &= \Delta v_S - \alpha z_S \left(\frac{\partial \Delta w_S}{\partial y} + \Delta \theta_{Sy} \right) \\ \Delta' \mathbf{w}_S(\mathbf{x}) &= \Delta w_S + x \Delta \theta_{Sx} + y \Delta \theta_{Sy} \end{aligned} \quad (64)$$

式中 $\Delta u_S, \Delta v_S$ 和 Δw_S 分别为面内顺剪位移和横向剪切位移, $\Delta \theta_{Sx}$ 和 $\Delta \theta_{Sy}$ 分别为剪切角, α 为板壳中任意一点 $(\mathbf{x})$ 因横向剪切引起的 x 和 y 方向位移沿高度的分布修正系数。 $\alpha = (2|z|/h)^n$ ($n=2, 3, 4$), h 为板厚。

平板实体单元中任意点 $(\mathbf{x})$ 的薄膜、弯曲和剪切应变

$$\begin{aligned} \Delta' \boldsymbol{\varepsilon}_x(\mathbf{x}) &= \Delta' \boldsymbol{\varepsilon}_{xm}(\mathbf{x}) + \Delta' \boldsymbol{\varepsilon}_{xb}(\mathbf{x}) + \Delta' \boldsymbol{\gamma}_{Sxx}(\mathbf{x}) \\ \Delta' \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{x}) &= \Delta' \boldsymbol{\varepsilon}_{ym}(\mathbf{x}) + \Delta' \boldsymbol{\varepsilon}_{yb}(\mathbf{x}) + \Delta' \boldsymbol{\gamma}_{Syy}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (65)$$

式中 $\Delta' \boldsymbol{\varepsilon}_{xm}(\mathbf{x}) = \partial \Delta u / \partial x$

$$\begin{aligned} \Delta' \boldsymbol{\varepsilon}_{xb}(\mathbf{x}) &= -z_b \left(\partial^2 \Delta w / \partial x^2 + \partial \Delta \theta_y / \partial x + \partial^2 / \partial x^2 \int \Delta \theta_x dy \right) - y (\partial \Delta \theta_z / \partial x) \\ \Delta' \boldsymbol{\varepsilon}_{ym}(\mathbf{x}) &= \partial \Delta v / \partial y \\ \Delta' \boldsymbol{\varepsilon}_{yb}(\mathbf{x}) &= -z_b \left(\partial^2 \Delta w / \partial y^2 + \partial \Delta \theta_x / \partial y + \partial^2 / \partial y^2 \int \Delta \theta_y dx \right) + x (\partial \Delta \theta_z / \partial y) \end{aligned}$$

$\Delta' \boldsymbol{\gamma}_{Sxx}(\mathbf{x})$ 和 $\Delta' \boldsymbol{\gamma}_{Syy}(\mathbf{x})$ 为面内剪应变, 见式(66)。

而平板实体单元中任意点 $(\mathbf{x})$ 的剪应变为

$$\Delta' \boldsymbol{\gamma}_{Sxx}(\mathbf{x}) = 2 \frac{\partial \Delta u_S}{\partial x} - 2 \alpha z_S \left(\frac{\partial^2 \Delta w_S}{\partial x^2} + \frac{\partial \Delta \theta_{Sx}}{\partial x} \right)$$

$$\Delta' \boldsymbol{\gamma}_{Syy}(\mathbf{x}) = 2 \frac{\partial \Delta v_S}{\partial y} - 2 \alpha z_S \left(\frac{\partial^2 \Delta w_S}{\partial y^2} + \frac{\partial \Delta \theta_{Sy}}{\partial y} \right)$$

$$\Delta' \boldsymbol{\gamma}_{Sxz}(\mathbf{x}) = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta' \boldsymbol{\gamma}_{Sxy}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial \Delta u_S}{\partial y} - \alpha z_S \left(\frac{\partial^2 \Delta w_S}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \Delta \theta_{Sx}}{\partial y} \right) + \frac{\partial \Delta v_S}{\partial x} - \alpha z_S \left(\frac{\partial^2 \Delta w_S}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \Delta \theta_{Sy}}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

$$\Delta' \boldsymbol{\gamma}_{Syz}(\mathbf{x}) = \lambda \left(\frac{\partial \Delta w_S}{\partial y} + \Delta \theta_{Sx} \right) + x \frac{\partial \Delta \theta_{Sx}}{\partial y} + y \frac{\partial \Delta \theta_{Sy}}{\partial y}$$

$$\Delta' \boldsymbol{\gamma}_{Szx}(\mathbf{x}) = \lambda \left(\frac{\partial \Delta w_S}{\partial x} + \Delta \theta_{Sy} \right) + x \frac{\partial \Delta \theta_{Sy}}{\partial x} + y \frac{\partial \Delta \theta_{Sx}}{\partial x}$$

(66)

式中 $\Delta u, \Delta v$ 和 Δw 分别为平板数学单元上任意点 (x, y) 沿坐标 x, y 和 z 方向的线位移, $\Delta \theta_x, \Delta \theta_y$ 和 $\Delta \theta_z$ 为点 (x, y) 关于坐标 x, y 和 z 的角位移; 以上基本位移均为独立变量。 λ 表示横向剪应变分布修正系数, $\lambda = (1 - \alpha)$ 。

式(65,66)为用数学单元上点 (x, y) 处的位移表示的平板实体单元点 (x) 的应变, 将用形函数表示的位移模式代入式(65,66), 即可得用单元结点位移表示的平板实体单元点 (x) 的应变

$$\Delta^t e_L(x) = \bar{b} \Delta^t u_e \quad (67)$$

式中 $\Delta^t u_e$ 为单元结点位移向量, $\Delta^t u_e = [\Delta u_{ei}, \Delta u_{ej}, \Delta u_{ek}]^T$ 。其中, $\Delta u_{ei} = [\Delta u_i, \Delta v_i, \Delta w_i, \Delta \theta_{xi}, \Delta \theta_{yi}, \Delta \theta_{zi}, \Delta u_{Si}, \Delta v_{Si}, \Delta w_{Si}, \Delta \theta_{Sxi}, \Delta \theta_{Syi}]$, 替换下标 i 为 j 和 k 即得相应的结点位移, $\bar{b}$ 为平板实体单元的扩展应变矩阵

$$\bar{b} = [\bar{b}_x \quad \bar{b}_y \quad 0 \quad \bar{h}_{xy} \quad \bar{h}_{yz} \quad \bar{h}_{zx}]^T \quad (68)$$

式中 $\bar{b}_x, \bar{b}_y, \bar{h}_{xy}, \bar{h}_{yz}$ 和 $\bar{h}_{zx}$ 为正应变矩阵和剪应变矩阵。其中, $\bar{b}_x$ 的矩阵形式为

$$\bar{b}_x = [b_{xi} \quad b_{xj} \quad b_{xk}] \quad (69)$$

其余有类似的形式。下标 i, j 和 k 为板单元结点头。

9.1.2 平板的应变矩阵及单元刚度矩阵

选择相应的位移模式, 即得依赖于形函数的应变矩阵。在式(69)中,

$$b_{xi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{ui}}{\partial x} & 0 & -z_b \frac{\partial^2 N_{wi}}{\partial x^2} \\ -z_b \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int N_{\theta xi} dy & -z_b \frac{\partial N_{\theta yi}}{\partial x} & -y \frac{\partial N_{\theta zi}}{\partial x} \\ 2 \frac{\partial N_{uSi}}{\partial x} & 0 & -2\alpha z_s \frac{\partial^2 N_{\theta S yi}}{\partial x^2} \end{bmatrix}_{1 \times 11}$$

式中 N 为平板单元位移形函数, N 的下标表示相应的自由度。

替换矩阵中各元素的下标 i 为 j 和 k 即得 b_{xj} 和 b_{xk} , 依次可求得应变矩阵 $\bar{b}_y, \bar{h}_{xy}, \bar{h}_{yz}$ 和 $\bar{h}_{zx}$ 。得到式(68)所示的平板实体单元的扩展应变矩阵 $\bar{b}$ 。

将 $\bar{b}$ 代入式(63), 即得到平板单元的线刚度矩阵 k_L 为

$$k_L = \int_V (b_x^T \bar{b}_x + b_y^T \bar{b}_y + h_{xy}^T \bar{h}_{xy} + h_{yz}^T \bar{h}_{yz} + h_{zx}^T \bar{h}_{zx}) dv \quad (70)$$

将式(69)及其他类似的表达式代入式(70), 可得到三角形平板单元的刚度矩阵的显式。

9.2 算例 1

以上简单介绍了 mbS 有限元法的理论框架以

及建模过程, 给出了小位移平板单元的刚度矩阵, 现通过数值算例以平板的经典解和传统的有限元解进行数值比较, 以对 mbS 有限元法进行数值验证。

考虑如图 1 所示均布荷载作用下四边简支方形板, 图 1 给出了板的直角坐标系 $O-XY$, 跨度 $a = b = 6$ m, 板厚 $h = 120$ mm, 横向荷载 $q = 3$ kN/m², 方向沿着 Z 轴正向。现将板均匀剖分为 8×8 的网格, 共 128 个三角形单元。

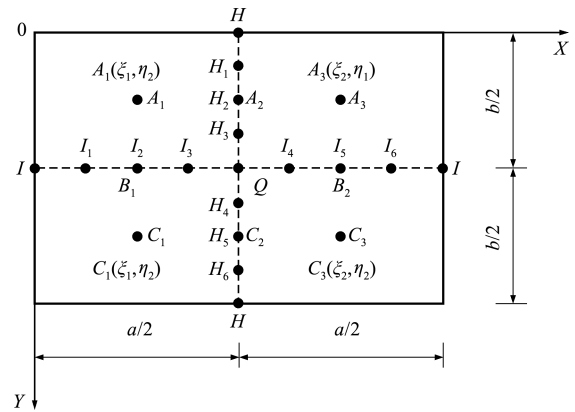


图 1 平板的计算模型

Fig. 1 Computational model of flat plate

现采用经典理论 (Navior 解)、mbS 有限元法以及按二维不完全三次 Hermite 插值函数构造模式分别进行计算分析。图 2 显示了采用不同分析模型时 $I-I$ 剖面上各点的横向位移^[8]。图 2 中不同分析模型计算所得位移曲线分别为 Navior 解、DB 解和 H3 解。其中, mbS 模型计算所得位移包括了剪切的影响。以上算例证明了 mbS 模型数值结果的正确性。

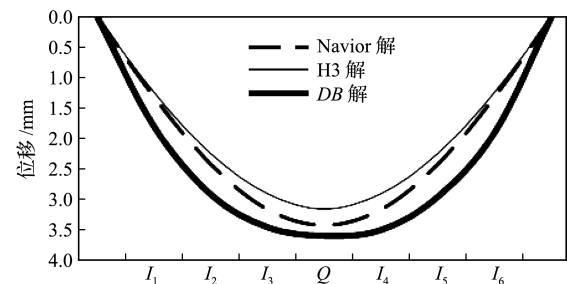


图 2 四边简支方板 $I-I$ 剖面位移

Fig. 2 Displacement diagram of section $I-I$ of square plate with four simply supported edges

9.3 算例 2

上文简单地介绍了 mbS 有限元法中引入剪切变形的影响, 现通过算例对 mbS 模型的剪切分析进行数值验证。

平板几何如图 1 所示, 跨度 $a = b = 6$ m, 为均

布荷载 $q = 12 \text{ kN/m}^2$ 作用下四边简支方形板, 板厚 h 分别为 120 mm, 300 mm, 500 mm 和 700 mm。图 3~图 6 为采用不同模型时 I-I 剖面上各点的弯曲位移和剪切位移。可以看出, 采用经典解与采用

mbS 法得到弯曲位移接近。当板厚度较小时, 剪切位移较小, 可以忽略。当板厚增加时, 剪切位移显著增加, 如忽略该部分位移, 将对总位移造成误差。

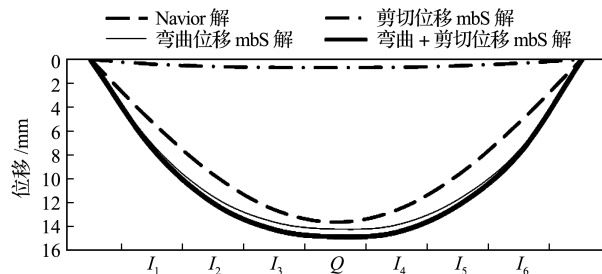


图 3 $h=120 \text{ mm}$ 方板 I-I 剖面位移
Fig. 3 Displacement diagram of section I-I of square plate with a height of 120 mm

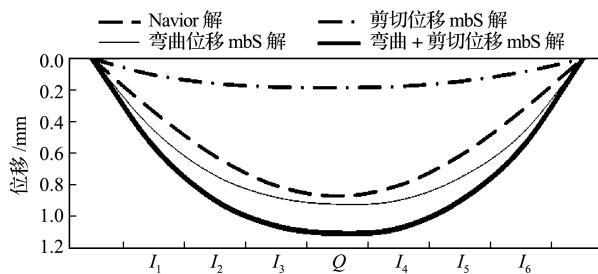


图 4 $h=300 \text{ mm}$ 方板 I-I 剖面位移
Fig. 4 Displacement diagram of section I-I of square plate with a height of 300 mm

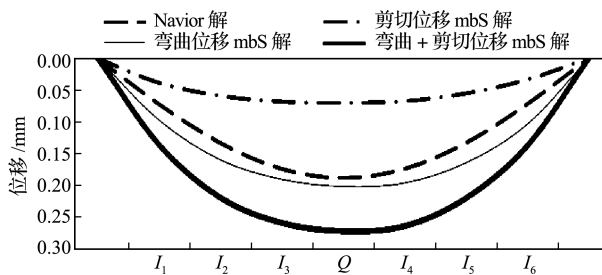


图 5 $h=500 \text{ mm}$ 方板 I-I 剖面位移
Fig. 5 Displacement diagram of section I-I of square plate with a height of 500 mm

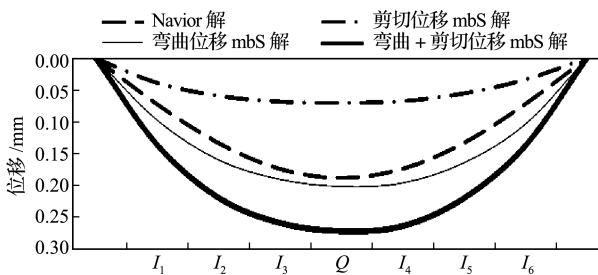


图 6 $h=700 \text{ mm}$ 方板 I-I 剖面位移
Fig. 6 Displacement diagram of section I-I of square plate with a height of 700 mm

10 结 论

mbS 模式及其有限元法是在薄膜、弯曲和剪切分析理论上采用纯拉压、纯弯和纯剪单元进行分析的有限元方法。在分析模式中引入了变形叠加原理, 从而在能量积分中考虑了耦合效应。

在 mbS 分析中分别构造了薄膜、弯曲和剪切位移, 并通过采用指数函数或贝塞尔函数按 Lagrange 插值条件构造的形函数表示基本的位移函数, 使得位移函数满足 C^0 和 C^1 或更高的连续性要求, 同时更加符合结构的实际变形。

在按 mbS 模式建模过程中, 引入固体和结构实体单元和数学单元变形之间的变换, 使得有可能修正某些传统的假定, 提高解的精度。

mbS 模式及其有限元法可有效地用于处于复杂应力状态的梁柱和板壳的精确分析中, 由于考虑了剪切位移的影响, 因此不仅可用于蒙皮等薄壁体系中, 也可用于考虑剪切变形的厚板和厚壳分析中^[13,16]。mbS 模式及其有限元法已经在 AADS 系统的梁柱和板壳模块中实施。

参考文献(References):

- [1] Clough R W. The finite element method in plane stress analysis [A]. Asce Conference on Electronic Computation [C]. 1960.
- [2] Zienkiewicz O C, Taylor R L. *The Finite Element Method*[M]. McGraw-Hill College Press, 1987.
- [3] 钱伟长. 变分法及有限元[M]. 北京: 科学出版社, 1980. (QiIAN Wei-chang. *Variational Method and Finite Element Method* [M]. Beijing: Science Press, 1980. (in Chinese))
- [4] 钟万勰. 有限元收敛性与分片试验条件[J]. 计算力学学报, 1997, 13(3): 3-14. (ZHONG Wan-xie. Convergence of FEM and the conditions of patch test [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 1997, 13(3): 3-14. (in Chinese))
- [5] 刘春太, 杨晓东, 申长雨, 等. 任意平面区域的变尺寸有限元网格划分[J]. 计算力学学报, 2000, 17(1): 105-108. (LIU Chun-tai, YANG Xiao-dong, SHEN Chang-yu, et al. Automatic generation of gradation finite element mesh for arbitrary planar domains [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2000, 17(1): 105-108. (in Chinese))

- [6] Bathe K J. *Finite Element Procedures* [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1996.
- [7] 欧文,辛顿. 塑性力学有限元-理论与应用 [M]. 曾国平,译. 北京:兵器工业出版社,1989. (Owen D R J, Hinton E. *Finite Element of Plastic Mechanics-Theory and Application* [M]. ZENG Guo-ping, translated. Beijing: Ordnance Industry Press, 1989. (in Chinese))
- [8] 董明,夏绍华,钱若军,等. 张力结构的非线性有限元分析 [J]. 计算力学学报, 1997, **14**(3): 268-275. (DONG Ming, XIA Shao-hua, QIAN Ruo-jun, et al. Nonlinear finite element analysis of tension structure [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 1997, **14**(3): 268-275. (in Chinese))
- [9] Clough R W, Penzien J. *Dynamics of Structures* [M]. McGraw-Hill Inc. Press, 1975.
- [10] Crisfield. *Finite Element Method in Solid and Structure* [M]. John Wiley & Sons Ltd, Press, 2001.
- [11] Bazant Z P, Cedolin L. *Stability of Structures; Elastic, Inelastic, Fracture, and Damage Theories* [M]. New York: Oxford, Oxford University Press, 1991.
- [12] 陈惠发,萨里普. 弹性与塑性力学 [M]. 余天庆,译. 北京:中国建筑工业出版社,2004. (CHEN Hui-fa, SARIPU A F. *Mechanics of Elasticity and Plasticity* [M]. YU Tian-qing, translated. Beijing: China Building Industry Press, 2004. (in Chinese))
- [13] 谭元莉,钱若军. 结构弹塑性和屈曲分析一致理论研究 [A]. 中国钢结构协会结构稳定与疲劳分会第 17 届学术交流会暨教学研讨会 [C]. 2021. (TAN Yuan-li, QIAN Ruo-jun. Study on the consensus theory of elastoplastic and buckling analysis of structures [A]. 17th Academic Exchange Conference and Teaching Seminar of Institute of Structural Stability and Fatigue, China Steel Construction Society [C]. 2021. (in Chinese))
- [14] 聂国隽. 空间杆系钢结构非线性分析力学模型及分析方法的研究 [D]. 同济大学, 2002. (NIE Guo-juan. Study on Nonlinear Analysis Mechanical Model and Analysis Method of Spatial Bar Steel Structure [D]. Tongji University, 2002. (in Chinese))
- [15] 钱若军,袁行飞,林智斌. 固体和结构分析理论及有限元法 [M]. 南京:东南大学出版社,2013. (QIAN Ruo-jun, YUAN Xing-fei, LIN Zhi-bin. *The Analysis Theory and Finite Element Method for Solid and Structure* [M]. Nanjing: Southeast University Press, 2013. (in Chinese))
- [16] 谭元莉. 基于变形分析理论的板壳弹塑性分析及多尺度度的应用 [D]. 同济大学, 2016. (TAN Yuan-li. Elastic-Plastic Analysis of Plates and Shells based on Deformation Analysis Theory and Application of Multi-scale Method [D]. Tongji University, 2016. (in Chinese))

Finite element method based on the MbS model

QIAN Ruo-jun^{*1}, YUAN Xing-fei²

(1. College of Civil Engineering and Architecture, Tongji University, Shanghai 200092, China;

2. Space Structures Research Center, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China)

Abstract: The finite element method based on the MbS model is a numerical analysis method that introduces of membrane, bending and shear theories into solid and structural analysis models, and the adoption of pure tension and compression, pure bending and pure shear elements. The exponential function and Bessel function are constructed as the insertion function on the material unit and time unit divided in the space-time system, and the basic displacement functions such as membrane, bending and shearing are obtained according to Lagrange interpolation conditions. Thus more complete and coupled deformation modes of structural solid units are obtained as well as the consistent format of the basic equations of static and dynamic finite elements according to the variational principle of energy functional. The analysis shows that mbS model and its finite element method can be used in static and dynamic analysis and buckling analysis of beams, columns, plates and shells.

Key words: mbS model; finite element method; extended shape function; elastic-plastic mechanics; energy functional variational principle

引用本文/Cite this paper:

钱若军,袁行飞. 基于 mbS 模式的有限单元法 [J]. 计算力学学报, 2023, **40**(3): 447-455.

QIAN Ruo-jun, YUAN Xing-fei. Finite element method based on the MbS model [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2023, **40**(3): 447-455.