

DOI: 10.7511/jslx20221124004

基于功能度量法的刚性结构可靠性拓扑优化

易平*, 李娜, 邢艳, 张恩华

(大连理工大学 建设工程学部, 大连 116024)

摘要: 相对尺寸优化和形状优化, 结构拓扑优化可以更大程度上节约材料和改善设计; 实际工程中必然存在着各种不确定性因素, 从而考虑不确定性的可靠性拓扑优化逐渐成为研究热点。本文考虑载荷和材料参数的不确定性, 采用功能度量法进行可靠性评估, 基于变密度法开展了刚性结构的可靠性拓扑优化设计。通过四角支撑面板、L型梁和二维三维悬臂梁算例, 分析拓扑构型与体积分数随目标可靠指标、随机变量个数以及变异系数的变化情况, 结果表明, 可靠性拓扑优化设计能得到既符合最优传力路径又满足可靠性要求的刚性结构。

关键词: 功能度量法; 变密度法; 可靠性; 拓扑优化

中图分类号: O213.2

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2023)03-0331-08

1 引言

结构优化设计是在满足一定约束条件下, 通过数学规划的方法反复修改结构某些参变量以实现重量最小或造价最低等目标。若修改的参变量是结构尺寸, 如板壳厚度、截面面积等, 称为结构尺寸优化; 若改变的是结构外形, 如孔洞形状和节点位置等, 称为结构形状优化; 若改变的是结构材料布局, 如有无孔洞和节点间有无连接杆等, 称为结构拓扑优化。常规的结构优化即确定性结构优化忽略或采用单一安全系数考虑优化过程中的参数不确定性, 得到的结构或偏于保守, 或偏于危险。为此, 国内外学者提出了基于随机不确定性的结构可靠性优化模型^[1], 在控制结构失效概率的情况下进行优化设计。近年来, 可靠性尺寸优化和可靠性形状优化在航空航天、电子、机械和土木建筑等^[2]很多领域已得到应用。然而, 因为连续体结构拓扑优化的设计变量数目太多, 可靠性拓扑优化设计的难度很大, 这方面的研究也就相对较少。Bae等^[3]首次提出可靠性拓扑优化 RBTO (Reliability-Based Topology Optimization) 的概念, 采用随机变量描述不确定参数, 采取一次可靠性方法 FORM (First Order Reliability Method) 进行可靠性分析, 结合变密度法实现位移概率约束下的体积最小化。其后, Kim等^[4]利用可靠指标法 RIA (Reliability In-

dex Approach) 进行可靠性评估, 选取渐进结构优化法 ESO (Evolutionary Structural Optimization) 进行拓扑优化, 对悬臂结构开展可靠性拓扑优化设计。Papadimitriou等^[5]选取均值二阶鞍点近似可靠性分析方法和变密度法, 载荷作为随机变量, 分析了柔度概率约束下体积最小化问题。因为三维模型的可靠性拓扑优化计算量太大, 现阶段的工作主要集中在二维模型^[6]。另外, 基于不确定性的拓扑优化模型还包括鲁棒性拓扑优化^[7]和采用区间变量或凸集合模型^[8]的非概率可靠性拓扑优化, 本文不作赘述。本文基于变密度拓扑优化和功能度量法, 对二维和三维刚性结构进行可靠性拓扑优化设计, 优化模型为柔度或位移概率约束下的体积最小化。分析了随机变量个数、变异系数和目标可靠指标对优化结果的影响。

2 拓扑优化

拓扑优化通过寻找结构内材料的最佳分布, 在满足一定约束情况下, 实现某种性能指标最优。Bendsøe等^[9]提出了标志着连续体结构拓扑优化设计诞生的均匀化方法, 进而衍生出变密度法。所谓变密度法是在有限元框架下, 设计域分成很多个单元, 以每个单元的相对密度作为设计变量, 人为假定相对密度和材料弹性模量之间的对应关系, 通过改变单元相对密度, 实现设计域内材料的合理分布。变密度法因为其程序实现简单, 计算效率高, 现已成为拓扑优化最常用的方法之一。

刚性结构的拓扑优化可以表述为柔度(或位移等)约束下最小化体积, 以实现最优的传力路径, 其

收稿日期: 2022-11-24; 修改稿收到日期: 2023-02-04.

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(51978129)资助.

作者简介: 易平* (1973-), 女, 博士, 教授

(E-mail: yiping@dlut.edu.cn).

基于变密度法的数学模型,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{find } \boldsymbol{\rho} \\ \min V = \sum_{e=1}^N \rho_e v_e \\ \text{s.t. } \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \\ g(\boldsymbol{\rho}) = C_{\max} - C(\boldsymbol{\rho}) \geq 0 \\ \text{or } g(\boldsymbol{\rho}) = \delta_{\max} - \delta(\boldsymbol{\rho}) \geq 0 \\ 0 < \rho_{\min} \leq \rho_e \leq 1 \quad (e = 1, 2, 3, \dots, N) \end{array} \right. \quad (1)$$

式中 N 为设计域内单元总数, ρ_e 为第 e 号单元的相对密度, ρ_{\min} 为单元密度的下限, $E(\rho_e)$ 为第 e 号单元的弹性模量, 其与单元密度 ρ_e 的关系遵从材料插值模型, \mathbf{K}, \mathbf{U} 和 \mathbf{F} 分别为总体刚度矩阵、位移向量和载荷向量, 单元刚度矩阵为 $\mathbf{k}_e = \mathbf{k}_e(\rho_e) = E(\rho_e) \mathbf{k}_e^0$, \mathbf{k}_e^0 为单元相对密度为 1 时的单元刚度矩阵, v_e 为单元 e 的体积。约束中柔度 $C = \mathbf{F}^T \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \sum_{e=1}^N \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{u}_e$, C_{\max} 为柔度上限, δ 为结构最大位移或某关心节点的位移, δ_{\max} 为位移上限。

变密度法需要用到材料插值模型, 通过引入惩罚因子对中间密度值进行惩罚, 使中间密度值向两端聚集, 从而得到逼近 0 或 1, 也就是孔洞实体相对分明的拓扑优化设计结果。常用的材料插值模型^[9] 包括 SIMP (Solid Isotropic Microstructures with Penalization) 和 RAMP (Rational Approximation of Material Properties) 两种模型。本文采用 SIMP 模型, 材料弹性模量与单元密度的关系为

$$E(\rho_e) = E_{\min} + \rho_e^p (E_0 - E_{\min}) \quad (\rho_e \in [0, 1]) \quad (2)$$

式中 p 为惩罚因子, 借鉴文献, 本文取 $p = 3.0$; E_{\min} 为单元最小弹性模量, 一般取值为 $E_{\min} = 10^{-9}$, 其作用是防止矩阵奇异; E_0 为单元密度为 1 时的弹性模量, 也就是实体材料的弹性模量。

变密度法拓扑优化可能出现棋盘格现象、灰度单元和网格依赖等问题, 导致优化得不到清晰合理的结果, 对拓扑优化的实际应用造成困难。为此, 人们提出了多种改进方法, 如敏度过滤法和密度过滤法^[10]。密度过滤法能有效抑制棋盘格和网格依赖性现象, 本文采用密度过滤法。

3 可靠性分析

因为实际工程中必然存在着各种不确定性因素, 表示结构极限状态的功能函数不仅与设计变量 \mathbf{d} (变密度拓扑优化中就是单元相对密度 $\boldsymbol{\rho}$) 有关, 还与随机变量 \mathbf{x} 有关, 即 $g = g(\mathbf{d}, \mathbf{x})$, 其中, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_M]^T$ 表示与结构功能有关的 M 个基

本不确定性参数。由于随机变量的存在, 结构是否安全应该从概率意义上来衡量, 例如对应某项功能的失效概率应该小于许可失效概率 P_f^A , 即

$$P_f(\mathbf{d}) = \int_{g(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \leq 0} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = F_g(\mathbf{d}, 0) \leq P_f^A \quad (3)$$

式中 $f(\mathbf{x})$ 为 \mathbf{x} 的联合概率密度函数, $F_g(\mathbf{d}, *)$ 为功能函数 $g(\mathbf{d}, \mathbf{x})$ 的累积分布函数。失效概率的求解涉及多维积分, 特别困难, 一种可能的数值求解方法是 Monte Carlo 模拟 (MCS)。MCS 方法容易实现, 稳健性好, 但计算量巨大, 通常用作精确解以检验其他数值方法的精度。

工程实际中通常并不直接求解失效概率, 而是采用与失效概率相关联的可靠指标 β 来衡量可靠性, 即

$$\beta(\mathbf{d}) = -\Phi^{-1}(F_g(\mathbf{d}, 0)) \geq \beta^T \quad (4)$$

式中 β^T 为目标可靠指标, 其与许可失效概率 P_f^A 的函数关系为 $\beta^T = -\Phi^{-1}(P_f^A)$ 。采用式(4)衡量结构可靠性要求的方法称为可靠指标法 RIA (Reliability Index Analysis)。式(4)还可以继续变换为

$$G_p(\mathbf{d}) = F_g^{-1}(\mathbf{d}, \Phi(-\beta^T)) \geq 0 \quad (5)$$

式中 $G_p(\mathbf{d})$ 为概率功能度量, 而采用式(5)衡量结构可靠性要求的方法称为功能度量法 PMA (Performance Measure Approach)。与 RIA 相比, PMA 更高效稳定, 且对随机变量分布类型的依赖性较小, 因此虽然提出较晚, 但有逐渐取代 RIA 的趋势^[1]。邱志平等^[11]提出了基于非概率模型的可靠性拓扑优化功能度量法, 同样指出功能度量法能够更好地克服收敛性问题。

可靠指标和概率功能度量的求解均表述为标准正态 U 空间的一个优化问题, 分别为

对某给定 \mathbf{d} 求 \mathbf{u}^*

$$\min \|\mathbf{u}\| \quad (6)$$

$$\text{s.t. } G(\mathbf{d}, \mathbf{u}) = 0$$

从而 $\beta = \|\mathbf{u}^*\|$

对某给定 \mathbf{d} 求 \mathbf{u}^*

$$\min G(\mathbf{d}, \mathbf{u}) \quad (7)$$

$$\text{s.t. } \|\mathbf{u}\| = \beta^T$$

从而 $G_p = G(\mathbf{d}, \mathbf{u}^*)$

式中 $G(\mathbf{d}, \mathbf{u})$ 为由 $g(\mathbf{d}, \mathbf{x})$ 从原始随机变量 X 空间变换到标准正态随机变量 U 空间的功能函数。两优化问题的求解通常分别采用 HL-RF (Hasofer-Lind and Rackwitz-Fiessler) 迭代公式和 AMV (Advanced Mean Value) 迭代公式, 在功能函数非线性程度较高时则可采用混沌控制方法^[12]进行收敛控制, 本文采用了混沌控制方法。

4 可靠性拓扑优化

鉴于PMA更高效和稳定的特点,本文采用PMA进行可靠性拓扑优化设计。基于PMA的刚性结构可靠性拓扑优化设计(RBTO)数学模型可表示为

$$\begin{aligned}
 &\text{find } \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{x} \\
 &\min V = \sum_{e=1}^N \rho_e v_e \\
 &\text{s. t. } \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \\
 &G_p(\boldsymbol{\rho}) = C_{\max} - C(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{x}) \geq 0 \\
 &\text{or } G_p(\boldsymbol{\rho}) = \delta_{\max} - \delta(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{x}) \geq 0 \\
 &0 < \rho_{\min} \leq \rho_e \leq \rho_{\max} = 1 \quad (e = 1, 2, 3, \dots, N)
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

式中 \boldsymbol{x} 为结构的基本随机变量,如材料弹性模量和载荷等, $G_p(\boldsymbol{\rho})$ 为功能函数对应的概率功能度量,其余参数和式(1)相同。RBTO中需要用到概率功能度量 $G_p(\boldsymbol{\rho})$ 对设计变量的灵敏度,因为 $G_p(\boldsymbol{\rho})$ 就是 \boldsymbol{u}^* 处的功能函数 $G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{u}^*)$, 因而其相对于设计变量的灵敏度就是功能函数在 \boldsymbol{u}^* 处的导数,即

$$\nabla_{\boldsymbol{\rho}} G_p(\boldsymbol{\rho}) = \nabla_{\boldsymbol{\rho}} G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{u}^*)
 \tag{9}$$

其具体求解直接采用有限差分法即可。

因为可靠性分析本身也表述为一个优化问题, RBTO本质上是一个双层嵌套迭代,外部循环是设计变量 $\boldsymbol{\rho}$ 的拓扑优化问题,内部循环是随机变量 \boldsymbol{x} 的可靠性分析,流程如图1所示。

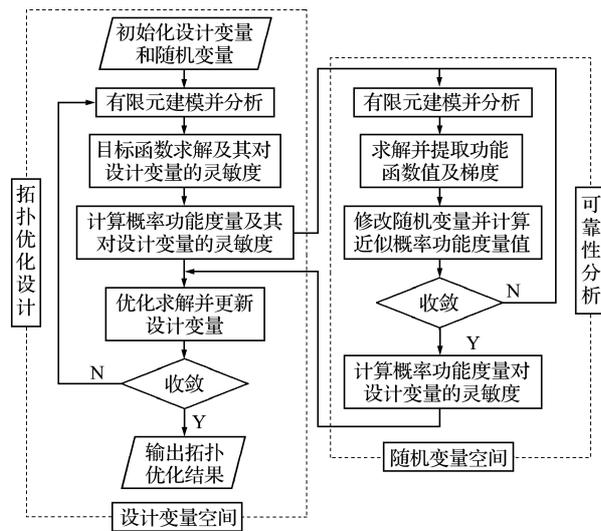


图1 可靠性拓扑优化迭代流程

Fig.1 Iterative chart of reliability-based topology optimization

5 数值算例

算例采用SIMP材料插值模型和密度过滤法,

过滤半径 r_{\min} 取3,初始化单元密度 ρ_e 为0.5。计算均在自编的MATLAB程序中进行,其中二维和三维拓扑优化分别基于88行代码^[13]和Liu等^[14]的程序改写;可靠性分析部分采用基于混沌控制的HL-RF迭代格式求解可靠指标,用基于混沌控制的AMV迭代格式求解概率功能度量;可靠性拓扑优化采用双层嵌套迭代形式。

5.1 四角支撑平板

如图2所示设计域,尺寸为100 mm×15 mm×1 mm,离散为1500(100×15)个四节点平面四边形单元。板的上边缘中点作用向下集中载荷 $F = 100$ N,材料的弹性模量 $E_0 = 7.1 \times 10^4$ MPa,泊松比为0.33;假设加载点处位移上限 $\delta_{\max} = 0.142$ mm,优化模型为位移约束下最小化体积。

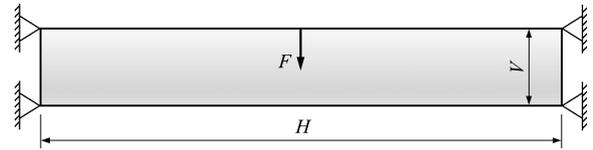


图2 四角支撑平板设计域

Fig.2 Design domain of four-corner-supported flat panel

确定性拓扑优化结果列入表1,算例出自文献[15],文献结果也列入表1,显然,确定性优化结果和文献结果非常吻合。在进行可靠性拓扑优化设计之前,必须先确认MATLAB可靠性分析程序是正确的。假设位移上限 δ_{\max} 具有随机性,均值为0.142 mm,变异系数取0.05,目标可靠指标为3.0,计算确定性最优拓扑结构的实际可靠性,即求其可靠指标和概率功能度量。因为确定性最优拓扑结构加载点处实际位移为0.142,功能函数可写为

$$g = 0.142 - \delta_{\max}$$

其中,只有一个随机变量 δ_{\max} , 并且功能函数是其线性函数,所以很容易求得其失效概率精确解为

$$P_f = \Phi\left(\frac{0.142 - \mu_{\delta_{\max}}}{\sigma_{\delta_{\max}}}\right) = \Phi\left(\frac{0.142 - 0.142}{0.142 \times 0.05}\right) = 50\%$$

利用编制的MATLAB程序进行可靠性分析,可靠指标和概率功能度量的迭代过程如图3所示。可靠指标4次迭代收敛于 8.4×10^{-6} ,其远小于目标可靠指标,表明结构不符合可靠性要求;概率功能度量3次迭代收敛于-0.15,其小于0,同样表明结构不符合可靠性要求。由可靠指标求得失效概率为49.9997%,与其精确解50%相比误差仅为 6×10^{-6} ,表明本文MATLAB可靠性分析程序的正确性。

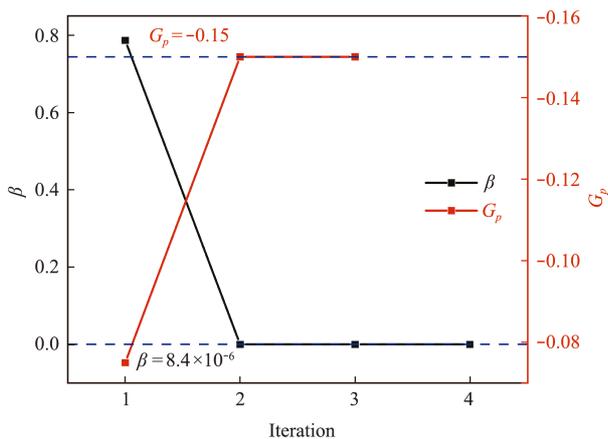


图3 位移上限作随机变量时可靠性分析迭代过程

Fig. 3 Reliability analysis iterative process when the upper limit of displacement as random variable

Zhao 等^[15]假定位移上限是确定的,即 $\delta_{\max} = 0.142$ mm,而载荷和弹性模量是独立随机变量,均值分别为 100 N 和 7.1×10^4 MPa,服从正态分布,变异系数均取 0.05。从而加载点处位移 δ 也具有随机性,功能函数写为

$$g = \delta - 0.142$$

此时,功能函数是随机变量(载荷和弹性模量)的隐式函数,利用 MATLAB 程序进行可靠性分析,可靠指标和概率功能度量的迭代过程如图 4 所示。可靠指标 11 次迭代收敛到 6.9×10^{-4} ,其远小于目标可靠指标,由可靠指标求得相应失效概率为 49.978%,结构不符合可靠性要求;概率功能度量 9 次迭代收敛于 -0.19,其小于 0,同样表明结构不符合可靠性要求。所求可靠指标与 Zhao 等^[15]通过 10^5 次 MCS 计算得到的可靠指标 1.5×10^{-5} 相比,二者相差仅为 6.75×10^{-4} ,表明本文 MATLAB 可靠性分析程序的正确性。在基于可靠性的拓扑优化中,需要多次进行可靠性分析,因此可靠性分析的效率 and 稳定性显得尤其重要。图 3 和图 4 均表明,PMA 方法比 RIA 迭代次数少且效率高,已有学者也指出与 RIA 相比,PMA 更高效稳定,且对随机变量分布类型的依赖性较小^[1],所以本文基于 PMA 进行可靠性拓扑优化设计。

综上所述,若不考虑变量的随机性进行确定性拓扑优化,得到的最优拓扑结构的失效概率很大,接近 50%。当然,现在常用的做法是采用单一安全系数考虑不确定性,但该安全系数的选取依赖于设计人员的经验,且不能定量反映各种不确定性,

《工程结构可靠性设计统一标准》中明确规定,在有条件时应采用基于可靠指标的方法进行设计。因此,本文仍然考虑 Zhao 等^[15]所设,也就是上面提到的载荷和弹性模量为正态分布独立随机变量,均值分别为 100 N 和 7.1×10^4 MPa,变异系数取 0.05,目标可靠指标为 3.0,采用位移概率约束下最小化体积的优化模型进行可靠性拓扑优化设计(RBTO)。

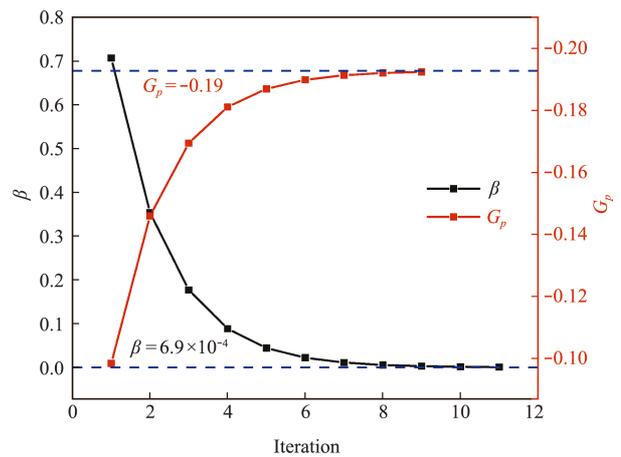


图4 载荷和弹性模量作随机变量时可靠性分析迭代过程

Fig. 4 Reliability analysis iterative process when the load and elastic modulus as random variables

RBTO 的具体方法是基于 PMA 的双层嵌套格式,随机变量灵敏度用有限差分法求解。Zhao 等^[15]则采用随机响应面方法构造显式功能函数,从而随机变量灵敏度也可以显式表达;其可靠性拓扑优化设计求解采用基于 PMA 的后置-单层解耦格式,内循环可靠性分析从外循环拓扑优化中分离。本文结果与文献^[15]结果均列入表 1。由表 1 拓扑构型和体积分数可以看出,本文 RBTO 结果与文献 RBTO 结果基本相同;再对这两个 RBTO 的最优拓扑结构进行可靠性验证,其验算点很相近,可靠指标均为 3.0,满足可靠性要求。将 DTO 和 RBTO 结果进行比较,可以发现不考虑弹性模量及载荷不确定性的 DTO 结构可靠指标非常小,容易失效;RBTO 结果的拓扑构型明显更加复杂,所用材料增多,体积分数增大,这表明为满足可靠性要求,需要使用更多的材料,也就说明了在拓扑优化过程考虑不确定性的必要性。关于计算效率,本文基于 PMA 的 RBTO 的有限元分析次数为 295 次,基于 RIA 的 RBTO 则为 523 次;Zhao 等^[15]没有给出有限元分析次数。

表1 四角支撑平板优化结果
Tab.1 Optimization results of four-corner-supported flat panel

方法	拓扑构型	可靠指标	验算点		体积分数
			E_0/MPa	F/N	
DTO	Zhao等 ^[15] 结果	1.5×10^{-5}	—	—	0.3087
	本文结果	6.9×10^{-4}	7.1002×10^4	100.0025	0.3087
RBTO	Zhao等 ^[15] 结果	3.000	6.28×10^4	109.61	0.4037
	本文结果	3.000	6.27×10^4	109.42	0.4034

5.2 L型梁

图5所示L型梁的设计参数列入表2,离散为3600个单元,柔度上限设为 $C_{\max} = 40 \text{ N} \cdot \text{m}$,采用柔度约束下最小化体积的确定性拓扑优化模型,得到的体积分数 vol 为 0.261,最优拓扑如图5所示。该算例出自文献[15],其 DTO 最优拓扑也放在图5中,得到 $\text{vol} = 0.2552$,可知该结果和本文结果非

常接近。计算仅考虑弹性模量作随机变量和考虑弹性模量、两个载荷为独立正态分布随机变量两种情况,均值为表2中数值,在不同变异系数和不同目标可靠指标下进行柔度概率约束下的体积最小化可靠性拓扑优化设计,最优拓扑构型和体积分数列入表3。

表2 设计参数
Tab.2 Design parameters

类型	设计参数	取值
几何条件	长度	$L = 60 \text{ mm}$
	厚度	$t = 1 \text{ mm}$
材料属性	弹性模量	$E_0 = 7.1 \times 10^4 \text{ MPa}$
	泊松比	$\nu = 0.33$
加载	水平载荷	$F_x = 150 \text{ N}$
	垂直载荷	$F_y = 100 \text{ N}$

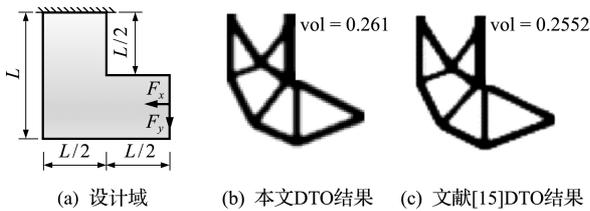


图5 L型梁
Fig.5 L-shaped beam

表3 L型梁 RBTO 计算结果
Tab.3 RBTO results of L-shaped beam

COV	$\beta^T = 3.0$				COV = 0.05				
	E_0 作随机变量		E_0 、载荷作随机变量		β^T	E_0 作随机变量		E_0 、载荷作随机变量	
	拓扑构型	vol	拓扑构型	vol		拓扑构型	vol	拓扑构型	vol
0.04		0.284		0.301	2.5		0.291		0.303
0.06		0.301		0.327	3.0		0.294		0.315
0.08		0.318		0.353	3.5		0.300		0.325
0.10		0.338		0.382	4.0		0.305		0.335

由表3可知,考虑了不确定性的 RBTO 得到的拓扑构型与 DTO 结果相近,只是主干相对粗壮,个别情况下稍增加细小枝节,表明 RBTO 和

DTO 一样能得到符合最优传力路径的拓扑构型。当目标可靠指标 $\beta^T = 3.0$, 变异系数 COV 分别取 0.04, 0.06, 0.08 和 0.10 时,随着变异系数的增

大,最优拓扑构型主干逐渐粗壮,细小枝节增加,体积分数也相应增大,表明不确定性程度增加时,需要使用更多的材料以满足可靠性要求。当变异系数 $COV=0.05$,目标可靠指标 β^T 分别取 2.5,3.0,3.5 和 4.0 时,随着目标可靠指标增大,同样是拓扑构型主干越来越粗壮,细节增多,体积分数逐渐增大,表明为满足更高的可靠性要求需使用更多的材料。当目标可靠指标和随机变量变异系数一定,相对只考虑单个随机变量时的 RBTO 结果,考虑多个随机变量时 RBTO 计算得到的拓扑构型更加粗壮,体积分数更大。

5.3 三维悬臂梁

优化设计图 6 所示两种结构,二维悬臂结构和三维悬臂结构,其中二维悬臂结构在自由端中点作用集中力 F ,而三维悬臂结构在自由端截面沿水平对称轴承受均布载荷,均布载荷合力为 F 。表 4 列出了结构的几何条件和材料属性。选取载荷 F 作随机变量,均值取 100,变异系数为 0.1,优化模型

为位移概率约束下最小化体积,位移上限值为 0.0055,目标可靠指标分别取为 2.5,3.0,3.5 和 4.0,可靠性拓扑优化结果和不考虑随机性时的确定性拓扑优化结果均列入表 5。

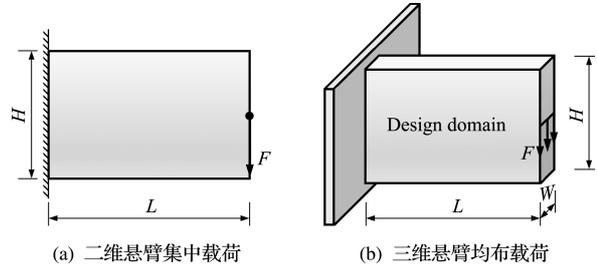


图 6 两种结构
Fig. 6 Two structures

表 4 设计参数
Tab. 4 Design parameters

几何条件	长度	$L=64\text{ mm}$
	高度	$H=40\text{ mm}$
	厚度	$W=5\text{ mm}$
材料属性	弹性模量	$E_0=1\times 10^5\text{ MPa}$
	泊松比	$\nu=0.3$

表 5 计算结果
Tab. 5 Calculation results

两种结构		DTO	$\beta^T=2.5$	$\beta^T=3.0$	$\beta^T=3.5$	$\beta^T=4.0$
二维悬臂 集中载荷	拓扑构型					
	体积分数	0.353	0.435	0.450	0.466	0.481
三维悬臂 分布载荷	正视构型图					
	主视构型图					
	体积分数	0.334	0.406	0.416	0.431	0.444

通过收敛性分析,二维悬臂结构网格划分数目取为 64×40 ,三维悬臂结构网格数目为 $64\times 40\times 5$ 。观察表 5 中拓扑构型和体积分数变化情况,可以看到随着目标可靠指标变大,不管是二维还是三维结构,均是所用材料逐渐增多,体积分数值逐渐增大,表明为满足更高的可靠性要求需使用更多的材料。本文二维悬臂结构一次 RBTO 分析的平均时长为 0.2 小时,三维结构则是 18 小时,三维结构 RBTO 计算时长较二维结构增加近百倍。这个原因很好理解,三维结构的单元数是二维结构的五倍,单次有限元分析的计算时间三维就会明显多于

二维;而单元数也就是拓扑优化中的设计变量个数,设计变量个数的成倍增加会导致 RBTO 的计算量急剧增加。因此,为节省计算时间,人们经常只进行二维结构的拓扑优化,而将三维设计域看作二维在厚度方向的延展。本文均布载荷作用下的三维悬臂结构与集中载荷作用下的二维悬臂结构的 RBTO 结果对比可知,两者体积分数虽然比较接近,但是孔洞分布存在明显差异。由此可知,不能简单将三维设计域看作二维在厚度方向的延展,在有条件的情况下,还是应该尽量进行三维结构的拓扑优化设计。

6 结 论

本文考虑载荷或弹性模量为随机变量,可靠性评估采用功能度量法,拓扑优化采用变密度法,针对刚性结构进行可靠性拓扑优化设计。通过三个算例,包括二维结构和三维结构的可靠性拓扑优化,得到以下几点结论。

(1) RBTO 和 DTO 两者的最优拓扑构型通常比较相似,只是 RBTO 中构型主干更加粗壮,细节有所增加,表明 RBTO 和 DTO 一样能得到符合最优传力路径的拓扑构型。

(2) RBTO 中,随着目标可靠指标增大、随机变量变异系数增大或随机变量个数增多,主干愈加粗壮,体积分数增加,表明可靠性要求越高或不确定性程度越大,越需要使用更多的材料来满足可靠性要求。

(3) 尽管三维结构 RBTO 的计算量大,在有条件的情况下,还是应该尽量进行三维结构的拓扑优化设计,而不是简单地将三维设计域看作二维在厚度方向的延展。

参考文献(References):

- [1] Yi P, Cheng G D, Xu L. Efficient algorithm for probability-based design optimisation of complex structures and related issues[J]. *Structure and Infrastructure Engineering*, 2014, **10**(10): 1264-1275.
- [2] 张卫红,徐仕杰,朱继宏. 循环对称结构的多尺度拓扑优化方法[J]. *计算力学学报*, 2021, **38**(4): 512-522. (ZHANG Wei-hong, XU Shi-jie, ZHU Ji-hong. Multi-scale topology optimization method for cyclic symmetric structures [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2021, **38**(4): 512-522. (in Chinese))
- [3] Bae K R, Wang S. Reliability-based topology optimization[A]. 9th AIAA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization[C]. 2002.
- [4] Kim S R, Park J Y, Lee W G, et al. Reliability-based topology optimization based on evolutionary structural optimization[J]. *Proceedings of World Academy of Science Engineering and Technology*, 2010, **19**(4): 529-538.
- [5] Papadimitriou D I, Mourelatos Z P. Reliability-based topology optimization using mean-value second-order saddlepoint approximation[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2018, **140**(3): 031403.
- [6] 邝泳聪, 欧阳高飞, 张宪民. 基于可靠性的连续体结构拓扑优化设计[J]. *机械强度*, 2009, **31**(4): 604-608. (KUANG Yong-cong, Ouyang Gao-fei, ZHANG Xian-min. Structural topology optimization of continuous structures based on reliability[J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2009, **31**(4): 604-608. (in Chinese))
- [7] 王 栋. 载荷作用位置不确定条件下结构动态稳健性拓扑优化设计[J]. *力学学报*, 2021, **53**(5): 1439-1448. (WANG Dong. Robust dynamic topology optimization of continuum structure subjected to harmonic excitation of loading position uncertainty[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, **53**(5): 1439-1448. (in Chinese))
- [8] 罗阳军, 亢 战. 连续体结构非概率可靠性拓扑优化[J]. *力学学报*, 2007, **39**(1): 125-131. (LUO Yang-jun, KANG Zhan. Non-probabilistic reliability-based topology optimization of continuum structures [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2007, **39**(1): 125-131. (in Chinese))
- [9] Bendsoe M P, Sigmund O. *Topology, Optimization: Theory, Methods, and Applications* [M]. Berlin: Springer, 2003.
- [10] Bruns T E, Tortorelli D A. Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, **190**(26-27): 3443-3459.
- [11] 邱志平, 夏海军. 基于功能度量法的桁架结构非概率可靠性拓扑优化方法研究[J]. *计算力学学报*, 2021, **38**(4): 423-429. (QIU Zhi-ping, XIA Hai-jun. Non-probabilistic reliability topology optimization of truss structures based on performance measure approach [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2021, **38**(4): 423-429. (in Chinese))
- [12] Yi P, Yang D X. Convergence control of the iterative procedure for performance-measure-based probabilistic structural design optimization [J]. *Engineering Optimization*, 2009, **41**(12): 1145-1161.
- [13] Andreassen E, Clausen A, Schevenels M, et al. Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2011, **43**(1): 1-16.
- [14] Liu K, Tovar A. An efficient 3D topology optimization code written in Matlab[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2014, **50**(6): 1175-1196.
- [15] Zhao Q H, Chen X K, Ma Z D, et al. A comparison of deterministic, reliability-based topology optimization under uncertainties[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2016, **29**(1): 31-45.

Reliability-based topology optimization of rigid structures using performance measure approach

YI Ping*, LI Na, XING Yan, ZHANG En-hua

(Department of Construction Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: Compared with size optimization and shape optimization, structural topology optimization can save materials and improve the design to a greater extent. There must be various uncertain factors in practical engineering, so reliability-based topology optimization (RBTO) considering uncertainty has gradually become a research hotspot. Considering the uncertainty of load and material parameters and using performance measure approach for reliability evaluation, this paper has carries out RBTO of rigid structures based on variable density method. Through examples of a four-corner-supported flat panel, an L-shaped beam and a 2-D and a 3-D cantilever beams, the effects of target reliability index, and the number and coefficient of variation of random variables on the topological configuration and volume fraction are analyzed. The results show that RBTO can obtain a rigid structure that meets both the optimal force-transferring-path and the reliability requirements.

Key words: performance measure approach; variable density method; reliability; topology optimization

引用本文/Cite this paper:

易平, 李娜, 邢艳, 等. 基于功能度量法的刚性结构可靠性拓扑优化[J]. 计算力学学报, 2023, 40(3): 331-338.

YI Ping, LI Na, XING Yan, et al. Reliability-based topology optimization of rigid structures using performance measure approach [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2023, 40(3): 331-338.