DOI: 10.7511/jslx20210413001

非饱和弹性半空间地基的稳态响应半解析法研究

曹彩芹, 鲍 楠*

(西安建筑科技大学 理学院,西安 710055)

摘 要:应用半解析法研究简谐荷载下非饱和弹性半空间地基的稳态响应。基于非饱和土的动力控制方程以及非饱和弹性半空间的边界条件,建立地基层单元的半解析函数,应用加权残数法得到在简谐荷载下非饱和弹性半空间地基的稳态响应半解析方程。对半解析方程求解,得到了坚向简谐荷载作用下非饱和弹性地基水平位移和竖向位移幅值,数值分析了饱和度和地基深度等参数对孔压和位移幅值的影响。研究结果表明,应用本文方法研究非饱和弹性半空间地基的稳态响应是切实有效的。

关键词:非饱和土;半空间地基;简谐荷载;稳态响应;半解析加权残数法

中图分类号: ○343

文献标志码:A

文章编号:1007-4708(2023)02-0323-08

1 引 言

荷载作用下弹性地基的稳态响应问题一直以来受到学术界和工程界的广泛关注,其涉及力学、数学以及岩土工程等多个学科,对于弹性力学发展有着重要的学术价值,对于建筑工程和道路工程的发展有着广泛的应用价值。以往研究多以各向弹性地基模型和饱和土地基模型为主,但是,非饱和土在实际工程中更为常见,因此非饱和土弹性半空间的稳态响应问题具有更加现实的意义。

在双参数地基模型的基础上,大量学者以弹性 半空间模型研究地基的静动力响应,Pal^[1]引入复 剪切模量研究竖向体力和扭转体力作用下的粘弹 性半空间内部作用动力响应,Vostroukhov等^[2]引 人位移势函数分析了圆形区域作用均布简谐水平 荷载时弹性半空间内的稳态响应问题。熊春宝 等^[3]基于广义热弹性理论建立了多孔饱和地基在 荷载作用下的控制方程,得到了问题的解析解。对 于单相土和两相饱和土的研究已经基本成熟,但是 对于非饱和土的研究还处于探索阶段。基于多种 理论非饱和土的控制方程具有多种形式,Whalley 等^[4]研究了非饱和土中波的传播特性,黄义等^[5]基 于混合物理论,结合非饱和土三相介质各自的特 性,系统研究了非饱和土本构关系和场波动方程。 徐明江等^[6]建立了非饱和多孔介质的波动方程,研 究了非饱和半空间地基在表面荷载作用下的稳态 和瞬态动力响应。基于这个非饱和多孔介质的波 动方程,文献「7,8]采用解析方法得到研究非饱和 半空间地基的稳态响应积分变换解。之前对于地 基体系的研究多为理论解析,随着计算机技术的发 展,数值方法兴起,宋佳等[9]采用伽辽金法有限元 离散研究了饱和土的二维动力问题,丁凯等[10]用 有限元方法研究了移动荷载下饱和半空间地基的 静动态响应。而半解析方法综合了数值法与解析 法的优势,简化了计算的繁琐程度,对于半空间地 基的计算,离散方向只需要取较少的单元,随着半 解析项数的不断增加,结果不断逼近解析解,对于 一般的半空间地基问题,半解析项数取3到4项即 可满足计算精度,但是对于具体问题的项数选择也 不尽相同。曲传军等[11]应用半解析元法研究矩形 基础与无限层土的动力问题。左迎辉等[12]应用半 解析元法研究各种荷载作用下的饱和半空间的动 力问题。曹彩芹等[13]用半解析方法研究基于单相 弹性介质模型以及两相饱和弹性介质模型的路面 体系在各种荷载下的静动态响应。

基于文献[14]提出的非饱和多孔介质的控制方程,选取了符合非饱和多孔介质的半解析位移函数,建立了适当的位移模式,应用半解析加权残数法得到非饱和半空间地基动力问题的单元基本方程,整合单元基本方程得到总的方程,即可分析简谐荷载下非饱和半空间地基的稳态响应。

2 非饱和弹性地基稳态响应控制方程

如图 1 所示的非饱和地基,基于连续介质力学

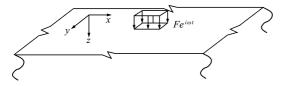


图 1 非饱和地基计算

Fig. 1 Unsaturated foundation calculation

和 Bishop 有效应力公式,文献[14]提出了非饱和土的动力控制方程,在直角坐标系下,非饱和土表面受任意竖向简谐荷载 $Fe^{i\omega t}$ 的稳态振动控制方程为

(入 +
$$\mu$$
) $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$ + μ $\nabla^2 u$ + $b_1 \frac{\partial p^l}{\partial x}$ + $b_2 \frac{\partial p^g}{\partial x}$ + $b_3 u$ = 0
($\lambda + \mu$) $\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}$ + μ $\nabla^2 v$ + $b_1 \frac{\partial p^l}{\partial y}$ + $b_2 \frac{\partial p^g}{\partial y}$ + $b_3 v$ = 0
($\lambda + \mu$) $\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}$ + μ $\nabla^2 w$ + $b_1 \frac{\partial p^l}{\partial z}$ + $b_2 \frac{\partial p^g}{\partial z}$ + $b_3 w$ = 0
 $\nabla^2 p^l - b_{11} p^l - b_{12} p^g - b_{13} \varepsilon = 0$
 $\nabla^2 p^g - b_{21} p^l - b_{22} p^g - b_{23} \varepsilon = 0$ (1)
式中 $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ 为体积应变, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ + $\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 为 Laplace 算子。
 $b_1 = -a\gamma - \omega^2 \overline{\rho}_l / (i\omega b^l - \omega^2 \rho_l)$
 $b_2 = -a(1-\gamma) - \omega^2 \overline{\rho}_g / (i\omega b^g - \omega^2 \rho_g)$
 $b_3 = \omega^2 \overline{\rho}_s + \frac{i\omega^3 b^l \overline{\rho}_l}{i\omega b^l - \omega^2 \rho_l} + \frac{i\omega^3 b^g \overline{\rho}_g}{i\omega b^g - \omega^2 \rho_g}$
 $b_{11} = a_{31} (i\omega b^l - \omega^2 \rho_l)$, $b_{12} = a_{32} (i\omega b^l - \omega^2 \rho_l)$
 $b_{13} = i\omega b^l + a_{33} (i\omega b^l - \omega^2 \rho_l)$, $b_{23} = a_{41} (i\omega b^l - \omega^2 \rho_l)$
 $b_{22} = a_{42} (i\omega b^l - \omega^2 \rho_l)$, $b_{23} = a_{43} (i\omega b^l - \omega^2 \rho_l)$
 $a_{31} = (A_{25} A_{11} - A_{15} A_{21}) / (A_{14} A_{25} - A_{15} A_{24})$
 $a_{32} = (A_{25} A_{12} - A_{15} A_{22}) / (A_{14} A_{25} - A_{15} A_{24})$
 $a_{33} = (A_{25} A_{13} - A_{15} A_{23}) / (A_{14} A_{25} - A_{15} A_{24})$
 $a_{41} = (A_{14} A_{12} - A_{24} A_{11}) / (A_{14} A_{25} - A_{15} A_{24})$
 $a_{42} = (A_{14} A_{22} - A_{24} A_{12}) / (A_{14} A_{25} - A_{15} A_{24})$
 $a_{42} = (A_{14} A_{22} - A_{24} A_{12}) / (A_{14} A_{25} - A_{15} A_{24})$
 $a_{43} = (A_{15} A_{23} - A_{24} A_{13}) / (A_{14} A_{25} - A_{15} A_{24})$
 $A_{11} = (\gamma / K_s) (a - n) + n / K_l$
 $A_{12} = [(1 - \gamma) / K_s] (a - n), A_{13} = A_{23} = a - n$
 $A_{14} = n(2 - S_r), A_{15} = -n(1 - S_r)$
 $A_{24} = -nS_r, A_{25} = n(1 + S_r)$

式中 u,v和 w 分别为非饱和土介质沿着 x,y和 z 三个方向的位移幅值, ω 为简谐荷载振动的频率, p^t 和 p^s 分别为孔隙流体压力幅值和孔隙气体压力幅值, $b_1 \sim b_3$ 和 $b_{11} \sim b_{23}$ 为非饱和弹性地基稳态响应控制方程的系数,由 $a_{31} \sim a_{43}$ 和 $A_{11} \sim A_{25}$ 表示, λ 和 μ 为非饱和土体 Lame 常数,n 为非饱和土的

孔隙率, S_r 为非饱和土的饱和度, ρ_s , ρ_l 和 ρ_g 分别为土骨架、孔隙流体和孔隙气体的相对密度, $\overline{\rho}_s$ = $(1-n)\rho_s$, $\overline{\rho}_l$ = $nS_r\rho_l$, $\overline{\rho}_g$ = $n(1-S_r)\rho_g$ 分别为土骨架、孔隙流体和孔隙气体的密度, K_b 为土骨架的体积压缩模量, K_s 为土颗粒的体积压缩模量,a = $1-K_b/K_s$, γ 为有效应力参数,取 γ = S_r , K_l 和 K_a 分别为孔隙流体和孔隙气体的体积压缩模量。 b^l = $nS_r\rho_l g/k_l$, b^s = $[n(1-S_r)\rho_g g]/k_g$, k_l 和 k_g 为孔隙流体和孔隙气体的渗透系数。

3 边界条件

3.1 位移边界条件

因为地基无限延伸,当坐标沿 x, y 和 z 趋于无穷大时,位移响应 u, v 和 w 将会衰减为零。

3.2 应力边界条件

由弹性力学得应力边界条件为

$$\begin{cases} l\sigma_{x} + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} - F_{x} = 0\\ m\sigma_{y} + n\tau_{zy} + l\tau_{xy} - F_{y} = 0\\ n\sigma_{z} + l\tau_{yz} + m\tau_{yz} - F_{z} = 0 \end{cases}$$
 (2)

 F_x , F_y 和 F_z 为作用在边界上沿 x, y 和 z 的面力分量,l, m 和 n 为 x, y 和 z 坐标轴与该边界外法线夹角的方向余弦, σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{xz} , τ_{zx} , τ_{zy} , 和 τ_{yz} 为应力分量。

3.3 孔压边界条件

即为在边界上已知孔压或者水头。

3.4 流速边界条件

即为在边界上的已知法向流速。

设已知孔隙流体孔隙气体流速为 v_n 和 v_n^s ,则流速边界可表示为

$$\begin{cases} l v_x^l + m v_y^l + n v_z^l = v_n^l \\ l v_x^g + m v_y^g + n v_z^g = v_n^g \end{cases}$$
 (3)

式中 $v_x^l, v_y^l, v_z^l, v_x^s, v_y^s$ 和 v_z^s 分别为孔隙气体和孔隙流体相对于土骨架渗流运动的流速。

4 稳态响应的半解析理论

如图 2 所示,现用平行于地面的一系列平面将 非饱和半空间地基划分成高度为 h 的层单元。

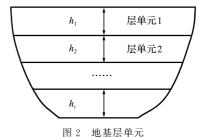


Fig. 2 Mechanics model of foundation system

对非饱和地基进行离散,地基层单元 z向采用 多项式插值, x, y 两方向为解析函数,层间完全连续,即不考虑层间滑移,对位移幅值 u, v 和 w 孔压幅值 p^t 和 p^s 取位移模式为

$$u = \widetilde{u} = \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=1}^{q} \sum_{i=1}^{\overline{p}} \sum_{j=1}^{\overline{q}} \sum_{k=1}^{s} \overline{X}_{mi}(x) Y_{nj}(y) Z_{k}(z) u_{kmnij}$$

$$v = \widetilde{v} = \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=1}^{q} \sum_{i=1}^{\overline{p}} \sum_{j=1}^{\overline{q}} \sum_{k=1}^{s} X_{mi}(x) \overline{Y}_{nj}(y) Z_{k}(z) v_{kmnij}$$

$$w = \widetilde{w} = \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=1}^{q} \sum_{i=1}^{\overline{p}} \sum_{j=1}^{\overline{q}} \sum_{k=1}^{s} X_{mi}(x) Y_{nj}(y) Z_{k}(z) w_{kmnij}$$

$$p^{l} = \widetilde{p}^{l} = \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=1}^{q} \sum_{i=1}^{\overline{p}} \sum_{j=1}^{\overline{q}} \sum_{k=1}^{s} X_{pmi}(x) Y_{pnj}(y) Z_{pk}(z) p_{kmnij}^{l}$$

$$p^{g} = \widetilde{p}^{g} = \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=1}^{q} \sum_{i=1}^{\overline{p}} \sum_{j=1}^{\overline{q}} \sum_{k=1}^{s} X_{pmi}(x) Y_{pnj}(y) Z_{pk}(z) p_{kmnij}^{g}$$

$$(A)$$

式中 $Z_k(z)$ 和 $Z_{pk}(z)$ 取为一维插值函数, $X_{mi}(x)$, $Y_{nj}(y)$, $X_{pmi}(x)$, $Y_{pnj}(y)$, $\overline{X}_{mi}(x)$ 和 $\overline{Y}_{nj}(y)$ 为半解析解函数取为梁函数, $\overline{X}_{mi}(x)$ 和 $\overline{Y}_{nj}(y)$ 分别为 $X_{mi}(x)$ 和 $Y_{nj}(y)$ 的导函数,具体形式满足位移边界条件。 u_{kmnij} , v_{kmnij} , w_{kmnij} , p_{kmnij}^l 和 p_{kmnij}^s 为广义变量,由半解析加权残数法,将式(4)代入式(1)整理即可得到内部残数矩阵为

$$\left\{ R_{I} \right\} = \left\{ \begin{matrix} R_{I1} \\ R_{I2} \\ R_{I3} \\ R_{I4} \\ R_{I5} \end{matrix} \right\} = \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=1}^{q} \sum_{i=1}^{\overline{p}} \sum_{j=1}^{\overline{q}} \sum_{k=1}^{s} \\ = \sum_{m=1}^{q} \sum_{n=1}^{p} \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{\overline{q}} \sum_{k=1}^{s} \\ A_{11} \quad A_{12} \quad A_{13} \quad A_{14} \quad A_{15} \\ A_{21} \quad A_{22} \quad A_{23} \quad A_{24} \quad A_{25} \\ A_{31} \quad A_{32} \quad A_{33} \quad A_{34} \quad A_{35} \\ A_{41} \quad A_{42} \quad A_{43} \quad A_{44} \quad A_{45} \\ A_{51} \quad A_{52} \quad A_{53} \quad A_{54} \quad A_{55} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} u_{kmnij} \\ v_{kmnij} \\ v_{kmnij} \\ p_{kmnij} \\ p_{kmnij} \end{matrix} \right\} = \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=1}^{q} \sum_{i=1}^{\overline{p}} \sum_{j=1}^{\overline{q}} \sum_{k=1}^{s} \left[A \right]_{kmnij} \left\{ \delta \right\}_{kmnij} = \left[A \right] \left\{ \delta \right\}$$

$$\sum_{m=1}^{p} \sum_{n=1}^{q} \sum_{i=1}^{\overline{p}} \sum_{j=1}^{\overline{q}} \sum_{k=1}^{s} \left[A \right]_{kmnij} \left\{ \delta \right\}_{kmnij} = \left[A \right] \left\{ \delta \right\}$$

式中
$$\{\delta\}_{kmnij}^{T} = \{u_{kmnij} \ v_{kmnij} \ w_{kmnij} \ p_{kmnij}^{l} \ p_{kmnij}^{g} \}$$

$$A_{11} = (\lambda + 2\mu) \overline{X}_{mi}^{"}(x) Y_{nj}(y) Z_{k}(z) + \mu \overline{X}_{mi}(x) Y_{nj}^{"}(y) Z_{k}(z) + b_{3} \overline{X}_{mi}(x) Y_{nj}^{"}(y) Z_{k}(z)$$

$$A_{12} = (\lambda + \mu) X_{mi}^{'}(x) \overline{Y}_{nj}^{'}(y) Z_{k}(z)$$

$$A_{13} = (\lambda + \mu) X_{mi}^{'}(x) Y_{nj}(y) Z_{k}(z)$$

$$A_{14} = b_{1} X_{pmi}^{'}(x) Y_{pnj}(y) Z_{pk}(z)$$

$$A_{15} = b_{2} X_{pmi}^{'}(x) Y_{pnj}(y) Z_{pk}(z)$$

$$A_{21} = (\lambda + \mu) \overline{X}_{mi}^{'}(x) Y_{ni}^{'}(y) Z_{k}(z)$$

$$A_{22} = (\lambda + 2\mu) X_{mi}(x) \overline{Y}''_{nj}(y) Z_{k}(z) + \mu X''_{mi}(x) \overline{Y}_{nj}(y) Z_{k}(z) + \mu X''_{mi}(x) \overline{Y}_{nj}(y) Z_{k}(z)$$

$$A_{23} = (\lambda + \mu) X_{mi}(x) Y'_{nj}(y) Z_{pk}(z)$$

$$A_{24} = b_{1} X_{pmi}(x) Y'_{pnj}(y) Z_{pk}(z)$$

$$A_{25} = b_{2} X_{pmi}(x) Y'_{pnj}(y) Z_{pk}(z)$$

$$A_{31} = (\lambda + \mu) \overline{X}'_{mi}(x) \overline{Y}'_{nj}(y) Z'_{k}(z)$$

$$A_{32} = (\lambda + \mu) X_{mi}(x) \overline{Y}'_{nj}(y) Z'_{k}(z)$$

$$A_{33} = \mu X''_{mi}(x) Y_{nj}(y) Z_{k}(z) + \mu X_{mi}(x) \overline{Y}'_{nj}(y) Z'_{pk}(z)$$

$$A_{34} = b_{1} X_{pmi}(x) Y_{pnj}(y) Z'_{pk}(z)$$

$$A_{35} = b_{2} X_{pmi}(x) Y_{pnj}(y) Z'_{pk}(z)$$

$$A_{41} = -b_{13} \overline{X}'_{mi}(x) Y_{nj}(y) Z'_{k}(z)$$

$$A_{42} = -b_{13} X'_{mi}(x) \overline{Y}'_{nj}(y) Z'_{k}(z)$$

$$A_{43} = -b_{13} X'_{mi}(x) \overline{Y}'_{nj}(y) Z'_{k}(z)$$

$$A_{44} = -b_{13} X'_{mi}(x) Y_{pnj}(y) Z'_{pk}(z)$$

$$A_{45} = -b_{23} X'_{mi}(x) Y_{pnj}(y) Z'_{pk}(z)$$

$$A_{51} = -b_{23} \overline{X}'_{mi}(x) Y_{pnj}(y) Z_{k}(z)$$

$$A_{52} = -b_{23} X'_{mi}(x) \overline{Y}'_{nj}(y) Z_{k}(z)$$

$$A_{53} = -b_{23} X'_{mi}(x) Y_{nj}(y) Z'_{k}(z)$$

$$A_{54} = -b_{21} X_{pmi}(x) Y_{pnj}(y) Z_{pk}(z)$$

$$A_{55} = X''_{pmi}(x) Y_{pnj}(y) Z_{pk}(z)$$

$$A_{55} = X''_{pmi}(x) Y_{pnj}(y) Z_{pk}(z)$$

$$A_{57} = -b_{21} X_{pmi}(x) Y_{pnj}(y) Z_{pk}(z)$$

$$A_{58} = -b_{21} X_{pmi}(x) Y_{pnj}(y) Z_{pk}(z)$$

同理,将位移模式(4)代入应力边界条件式(2) 和流速边界条件(3),得到边界残数矩阵为

$$\left\{ R_{B} \right\} = \left\{ \begin{matrix} R_{B1} \\ R_{B2} \\ R_{B3} \\ R_{B4} \\ R_{B5} \end{matrix} \right\} = \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=1}^{q} \sum_{i=1}^{\overline{p}} \sum_{j=1}^{\overline{q}} \sum_{k=1}^{s} \left[\begin{matrix} u_{kmnij} \\ u_{kmni$$

式中
$$H_{11} = l\lambda \overline{X}'_{mi}(x)Y_{nj}(y)Z_k(z) + 2l\mu \overline{X}'_{mi}(x)Y'_{nj}(y)Z_k(z) + m\mu \overline{X}_{mi}(x)Y'_{nj}(y)Z_k(z) + m\mu \overline{X}_{mi}(x)Y'_{nj}(y)Z_k(z) + m\mu \overline{X}_{mi}(x)Y'_{nj}(y)Z_k(z) + m\mu \overline{X}_{mi}(x)\overline{Y}_{nj}(y)Z_k(z) + m\mu X'_{mi}(x)\overline{Y}_{nj}(y)Z_k(z) + m\mu X'_{mi}(x)Y_{nj}(y)Z_k(z) + l\mu \overline{X}_{mi}(x)Y_{nj}(y)Z_k(z) + l\mu \overline{X}_{mi}(x)Y_{nj}(y)Z_k(z) + l\mu \overline{X}_{mi}(x)\overline{Y}_{nj}(y)Z_k(z) + l\mu \overline{X}_{mi}(x)\overline{Y}_{nj}(y)Z_k(z) + l\mu X'_{mi}(x)\overline{Y}_{nj}(y)Z_k(z) + l\mu X'_{mi}(x)\overline{Y}_{nj}(y)Z_k(z) + l\mu X'_{mi}(x)\overline{Y}_{nj}(y)Z_k(z) + m\mu X_{mi}(x)Y'_{nj}(y)Z_k(z) + m\mu X_{mi}(x)Y'_{nj}(y)Z_k(z) + l\mu \overline{X}_{mi}(x)Y'_{nj}(y)Z_k(z) + l\mu X'_{mi}(x)Y'_{nj}(y)Z_k(z) + l\mu X'_{mi}(x)Y'_{nj}(y)Z_{nk}(z) + l\mu$$

应用加权残数法并且使边界残数矩阵和内部 残数矩阵的加权积分和为零,即在权平均意义上满 足控制方程和边界条件,建立泛函方程为

$$\begin{split} &\int_{\Omega} \{R_{\rm I}\}^{\rm T} \{W_{\rm I}\} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma} \{R_{\rm B}\}^{\rm T} \{W_{\rm B}\} \mathrm{d}\Gamma = 0 \quad (7) \\ &\text{式中 } \Omega \, \text{为单元的体域,} \, \Gamma \, \text{的积分域包括自由端,} \Lambda \\ &\text{边和侧部力边界,} \, \text{权函数分别取} \, \{W_{\rm I}\} = \partial \{R_{\rm I}\} / \partial \{\delta\} \, \, \text{和} \, \{W_{\rm B}\} = \partial \{R_{\rm B}\} / \partial \{\delta\} \, , \, \text{代入残数矩阵}(5,6) \end{split}$$

整理可得非饱和半空间地基稳态响应的半解析单 元基本方程为

$$\lceil K \rceil \{\delta\} = \{ F(t) \} \tag{8}$$

式中 [K] 为单元动力刚度矩阵, $\{F(t)\}$ 为单元 荷载列阵,具体为

$$[K] = \int_{V} [A]^{T} [A] dV + \int_{L} [H]^{T} [H] dL$$
$$[F(t)] = -\int_{L} [H]^{T} [Q] dL$$

集合各单元矩阵形成总体的矩阵,可得整体的动力方程,可对非饱和半空间地基进行稳态响应分析。由于所取非饱和多孔介质的稳态振动方程为关于位移幅值的方程,所以,所得的半解析单元基本方程与静力方程形式相同,计算的求解过程简单,如果把式中含频率的项取为零,方程就可以退化成非饱和半空间地基的静态响应的半解析单元方程。

5 数值算例

5.1 算例对比

为了验证本文理论方法的正确性,用 Matlab 软件编程进行数值计算。考虑非饱和弹性半空间 地基上作用一集中荷载 q=1 kN, $\omega=1$ Hz,取与文献[15]相同的参数列入表 1,计算时半解析解函数的 项数均取 4,计算的竖向位移幅值结果列入表 2。

表 1 非饱和土体参数 Tab. 1 Parameters of unsaturated soils

物理量	值	物理量	值
μ/MPa	19.4	$\eta_l/\mathrm{MPa} \cdot \mathrm{s}$	1
υ	0.2	$\eta_{ m g}/{ m MPa}$ • s	0.015
K_s/GPa	36	n^{s}	0.6
$K_{\it l}/{\rm GPa}$	2.1	S_r	0.8
$K_{\rm g}/{\rm kPa}$	100	$\kappa/\mu\mathrm{m}^2$	1
$\rho_s/\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$	2700	α_s/Pa^{-1}	10^{-4}
$\rho_l/\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$	1000	m_s	0.5
$ ho_{ m g}/{ m kg} \cdot { m m}^{-3}$	1.29	S_{w0}	0.05

表 2 本文结果与文献[15]结果对比 Tab. 2 Results of this paper are compared with the results of literature [15]

x/m	本文解/μm	文献[15]解/μm
0.1	5.43	5.70
0.3	2.19	1.90
0.5	1.51	1.50
0.7	0.72	0.70
0.9	0.47	0.50

由表 1 可知,两者结果基本吻合,可通过增加解析函数项数不断逼近解析解,说明了本文方法的可靠性,满足工程计算精度要求。

5.2 算例分析

位移响应采用表 1 的非饱和土参数,考虑在地基表面作用均布荷载,作用区域为 1 m×1 m,均布荷载集度为 $q_o=1$ kPa,荷载的频率为 $\omega=1$ Hz, 地表边界排水排气,数据处理时对于位移幅值和孔压幅值取复数模即

$$|u| = \sqrt{\{\text{Re}(u)\}^2 + \{\text{Im}(u)\}^2}$$

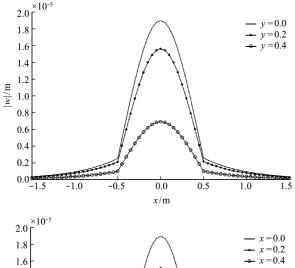
$$|v| = \sqrt{\{\text{Re}(v)\}^2 + \{\text{Im}(v)\}^2}$$

$$|w| = \sqrt{\{\text{Re}(w)\}^2 + \{\text{Im}(w)\}^2}$$

$$|p^l| = \sqrt{\{\text{Re}(p^l)\}^2 + \{\text{Im}(p^l)\}^2}$$

$$|p^g| = \sqrt{\{\text{Re}(p^g)\}^2 + \{\text{Im}(p^g)\}^2}$$

图 3~图 5 为非饱和土半空间地基在稳态荷载作用下的竖向位移幅值 |w|,横向位移幅值 |u| 以及纵向位移幅值 |v| 关于坐标轴 x 和 y 的分布规律。



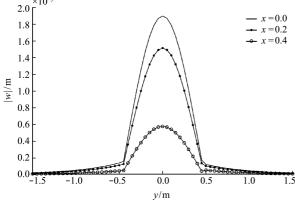


图 3 竖向位移幅值关于 x 和 y 轴分布 Fig. 3 Distribution of vertical displacement amplitude with respect to x and y axes

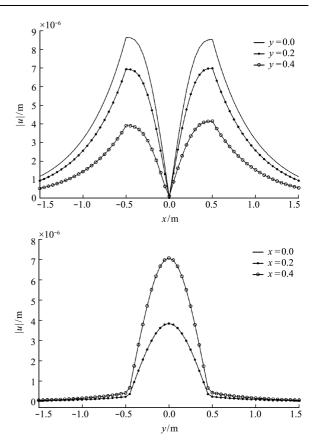
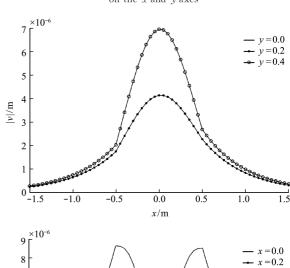


图 4 横向位移幅值关于 x 和 y 轴分布 Fig. 4 Distribution of lateral displacement amplitude on the x and y axes



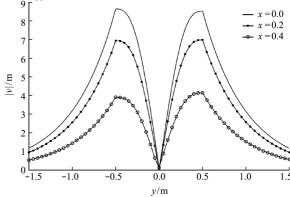


图 5 纵向位移幅值关于 x和 y轴分布 Fig. 5 Distribution of longitudinal displacement amplitude on x and y axes

从图 3 可以看出,稳态荷载下的非饱和半空间 地基的竖向位移幅值 | w | 对 yoz和 xoz平面是对 称的,其最大位移幅值在荷载作用区域中心,在荷 载作用区域边缘开始快速衰减。图 4 为横向位移 幅值 |u| 沿 x 和 y 轴的分布,可见关于 yoz 和 xoz平面完全对称。图 5 为纵向位移幅值 | v | 沿 x 和 v轴的分布,类似于横向位移幅值的情况,横向位 移幅值 | u | 以及纵向位移幅值 | v | 在荷载作用区 边缘最大,在荷载作用中心为零。由于荷载以及地 基体系的对称性,位移响应也应该具有对称性,可 以看出位移响应的合理性。图 6 描述了竖向位移 幅值和横向位移幅值随着深度的变化规律,其 x 轴 表示地基深度和荷载作用区域宽度的比值 H/b, y 轴表示荷载作用区域中心在不同深度下的竖向位 移幅值与地表的竖向位移幅值的比值,以及荷载作 用区域边缘在不同深度下的横向位移幅值与地表 的横向位移幅值的比值,可见当地基深度达到一定 值时,竖向位移幅值和横向位移幅值趋于稳定,大 概在 H/b=30 左右即可模拟半空间地基模型。

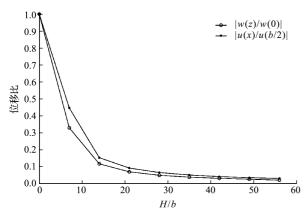


图 6 竖向位移幅值和横向位移幅值随着深度变化 Fig. 6 Vertical displacement amplitude and lateral displacement amplitude with respect to depth distribution

5.3 参数影响

分析不同饱和度下,竖向位移幅值 |w| 以及 孔隙流体压力幅值 |p'| 的分布规律,从图 7 可以 看出,随着饱和度的降低,非饱和地基的竖向位移幅值也随之降低,主要是由于对于非饱和地基的饱和度增大,对应的动剪切模量明显减小,则地基的 刚度变小,进而导致竖向位移幅值增大。

图 8 描述了在地表排水排气的边界下,荷载区域中心处沿厚度变化的孔隙水压力在不同饱和度下的变化。随着饱和度的增大,孔隙水相对于孔隙气体占的比例增加,进而孔隙水压力随之增大,而且,孔隙是水压力沿厚度快速达到峰值然后衰减,

在地表由于排水排气孔隙水压力为零,而孔隙水压力压主要分布在荷载作用较近的区域。

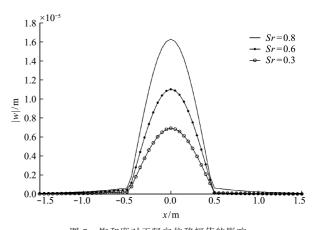


图 7 饱和度对于竖向位移幅值的影响 Fig. 7 Effect of saturation on the amplitude of vertical displacement

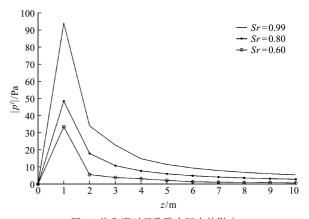


图 8 饱和度对于孔隙水压力的影响 Fig. 8 Effect of saturation on pore fluid pressure

6 结 论

(1) 半解析法加权残数法结合了解析法和数值法,兼备二者的优点,把三维问题降为一维问题,极大地减少了计算量,选择满足位移及孔压边界条件的半解析位移函数,通过加权残数法满足控制方程以及其他边界条件,得到解决此类问题的更为有效的方法。

(2)对于非饱和半空间地基地表作用竖向简谐荷载,当深度达到一定值,位移幅值趋于稳定,深度和荷载作用区域宽度之比在30左右即可模拟半空间模型。饱和度对于竖向位移幅值以及孔隙流体压力影响明显,随着饱和度的增大,竖向位移幅值和孔隙压力随之增大,而较大的孔隙流体压力主要集中在距离简谐荷载较近的地方。

(3) 以本文建立的半解析理论可以研究非饱 和土等复杂的地基土介质的静动力响应,令孔隙气 压为零即可退化为饱和地基土的动力响应;令水气 孔压都等于零即可得到单相弹性半空间地基的动 力响应,另外,令荷载振动频率为零,即可研究静态 响应问题。所以,本文得到的半解析方程具有普遍 性。

参考文献(References):

- [1] Pal P C. Effect of dynamic visco-elasticity on vertical and torsional vibrations of a half-space[J]. Sadhana, 2001, 26(4):371-377.
- [2] Vostroukhov A V, Verichev S N, Kok A W M, et al. Steady-state response of a stratified half-space subjected to a horizontal arbitrary buried uniform load applied at a circular area [J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2004, 24(6):449-459
- [3] 熊春宝,郭 颖,刁 钰,等. 荷载作用下多孔饱和地基的热-水-力耦合动力响应分析[J]. 计算力学学报, 2018, 35(6): 795-801. (XIONG Chun-bao, GUO Ying, DIAO Yu, et al. Coupled thermo-hydro-mechanical dynamic response of saturated porous foundation under normal load [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2018, 35(6): 795-801. (in Chinese))
- [4] Shin H C, Whalley W R, Attenborough K, et al. On the theory of Brutsaert about elastic wave speeds in unsaturated soils [J]. Soil and Tillage Research, 2016, 156:155-165.
- [5] 黄 义,张引科. 非饱和土本构关系的混合物理论 (II):线性本构方程和场方程[J]. 应用数学和力学, 2003,24(2);124-137. (HUANG Yi, ZHANG Yinke. Constitutive relation of unsaturated soil by use of the mixture theory(II): Linear constitutive equations and field equations [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2003,24(2):124-137. (in Chinese))
- [6] 徐明江,魏德敏. 非饱和土地基的三维非轴对称动力响应[J]. 工程力学,2011,28(3):78-85. (XU Mingjiang, WEI De-min. 3D non-axisymmetrical dynamic response of unsaturated soils [J]. Engineering Mechanics,2011,28(3):78-85. (in Chinese))
- [7] 王春玲,赵鲁坷,李东波.非饱和地基上多层矩形板稳态振动解析研究[J]. 岩土工程学报,2019,41(12):2182-2190. (WANG Chun-ling, ZHAO Lu-ke, LI Dong-bo. Analytical study on dynamic response of multi-layered plate in unsaturated half-space[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2019,41 (12):2182-2190. (in Chinese))
- [8] 王春玲,赵鲁珂.成层非饱和地基上矩形基础稳态响应解析研究[J].应用力学学报,2020,37(3):1131-

- 1137,1395. (WANG Chun-ling, ZHAO Lu-ke. Analytical study on steady-state response of rectangular foundation on layered unsaturated subgrade [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2020, 37 (3): 1131-1137 1395. (in Chinese))
- [9] 宋 佳,许成顺,杜修力,等. 流体饱和多孔介质动力问题的显式时域解法[J]. 计算力学学报,2017,34 (5):579-585. (SONG Jia, XU Cheng-shun, DU Xiuli, et al. An explicit integrator method for the dynamic problem of fluid-saturated porous medium in time domain[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2017,34(5):579-585. (in Chinese))
- [10] 丁 凯,金 波.移动荷载作用下地基动力分析的有限元方法[J]. 力学季刊,2006,27(4):648-654. (DING Kai, JIN Bo. The finite element method for dynamic analysis of foundation under moving loads [J]. Chinese Quarterly of Mechanics,2006,27(4):648-654. (in Chinese))
- [11] 曲传军,曹志远. 矩形基础与无限层土地基的动力相互作用分析[J]. 建筑结构学报,1988,9(6):66-74. (QU Chuan-jun, CAO Zhi-yuan. Dynamic interaction analysis between rectangular footing and infinite layer foundation [J]. Journal of Building Structures, 1988,9(6):66-74. (in Chinese))
- [12] 左迎辉,蔡袁强,徐长节. 移动荷载下饱和半空间的动力响应[J]. 岩石力学与工程学报,2005,24(23): 4352-4357. (ZUO Ying-hui, CAI Yuan-qiang, XU Chang-jie. Dynamic response of soil in saturated half space under moving load[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24(23): 4352-4357. (in Chinese))
- [13] 曹彩芹,黄 义,高 超.移动荷载下单相弹性地基三维稳态响应[J]. 计算力学学报,2012,29(6):972-977. (CAO Cai-qin, HUANG Yi, GAO Chao. Three-dimensional steady-state responses of single-phase elastic foundation by moving loads [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2012,29(6):972-977. (in Chinese))
- [14] 徐明江,魏德敏,何春保. 层状非饱和土地基的轴对称 稳态动力响应[J]. 岩土力学,2011,32(4):1113-1118,1124. (XU Ming-jiang, WEI De-min, HE Chunbao. Axisymmetric steady state dynamic response of layered unsaturated soils [J]. Rock and Soil Mechanics,2011,32(4):1113-1118,1124. (in Chinese))
- [15] 徐明江. 非饱和土地基与基础的动力响应研究[D]. 华南理工大学, 2010. (XU Ming-jiang. Investigation on Dynamic Response of Unsaturated Soils and Foundation[D]. South China University of Technology, 2010(in Chinese))

Semi-analytical method for steady-state response of unsaturated elastic half-space foundations

CAO Cai-qin, BAO Nan*

(School of Science, Xi'an University of Architecture & Technology, Xi'an 710055, China)

Abstract: Using a semi-analytical method, this paper studies steady-state responses of an unsaturated elastic half-space foundation under a harmonic load. Based on the dynamic control equation of unsaturated soil and the boundary conditions of the unsaturated elastic half-space, the semi-analytical function of the foundation element is established. By the weighted residual method, this paper gets the unsaturated semi-analytical equation of the steady-state responses on the elastic half space. The semi-analytical equations are solved to obtain the horizontal and vertical displacement amplitudes of the unsaturated elastic foundation under the vertical harmonic load. The effects of saturation and foundation depth on pore pressure and displacement were calculated numerically. The research results show that the application of this method to study the steady-state response of unsaturated elastic half-space foundations is practical and effective.

Key words: unsaturated soil; half-space foundation; simple harmonic load; steady-state response; semi-analytical weighted residual method

引用本文/Cite this paper: