

角度非均匀材料平面 V 形切口应力奇性分析

王静平¹, 姜伟², 李俊萍³, 潘家雨², 尚悦², 葛仁余^{*2}

(1. 安徽工程大学 汽车新技术安徽省工程技术研究中心, 芜湖 241000;

2. 安徽工程大学 建筑工程学院, 芜湖 241000; 3. 安徽工程大学 电气工程学院, 芜湖 241000)

摘要:提出了一种确定角度非均匀材料平面 V 形切口尖端应力奇性指数的有效方法。首先,在弹性力学基本方程中引入 V 形切口尖端位移场的级数渐近展开,建立以位移为特征函数的变系数和非线性微分方程组。然后,采用微分求积法(DQM)求解微分方程组,可得到多阶应力奇性指数及其相对应的特征函数,该法具有公式简单、编程方便、计算量少和精度高等优点,可处理任意开口角度和任意材料组合的 V 形切口。典型算例验证了微分求积法的有效性和精确性。

关键词:V 形切口;角度非均匀材料;应力奇性;微分求积法

中图分类号:O343

文献标志码:A

文章编号:1007-4708(2023)02-0264-09

1 引言

非均匀连续介质材料的材料参数随坐标连续变化,这种特殊材料常见于自然界和工程合成材料,如生物骨质、竹子、地表下的土体与岩石、公路路面以及机场跑道等,自 1990 年以来,这种材料参数在空间上逐渐变化的非均匀材料称为功能梯度材料^[1]。人们已认识到材料参数随坐标位置的变化可增加材料物理性能和减少工程造价成本,在工程和材料科学领域进行了许多研究。

材料弹性模量随着直角坐标连续变化的非均匀连续介质材料裂纹问题最早引起学者们的关注。Delale 等^[2]研究了泊松比为常数、杨氏模量为指数函数变化的非均匀材料的平面断裂问题,发现泊松比对裂纹尖端应力强度因子的影响非常小;Delale 等^[3]分析了处于均匀半平面和非均匀半平面之间的界面裂纹问题,假设两个半平面的力学属性在界面处保持连续,非均匀材料的剪切模量和泊松比取为指数函数形式,发现只要材料的力学属性在裂纹尖端保持连续,非均匀材料与均匀材料裂纹尖端应力场的奇异性是一致的。Konda 等^[4]研究了含有裂纹的非均匀弹性介质的断裂强度问题,包括材料

非均匀常数、裂纹方向、加载条件和泊松比对应力强度因子的影响;Gao^[5]提出了一种非均匀材料断裂分析的一阶模量摄动算法;运用三重互易边界元法,Ochiai^[6,7]分析了二维非均匀连续介质材料弹性应力场问题和三维热传导问题。Zhou 等^[8]给出了一个应力函数,采用复变函数方法分析了弹性夹杂物的性质对这种非均匀材料解的影响。Erdogan 等^[9,10]采用奇异积分方程法分析了非均匀材料平板中的裂纹;Yu 等^[11,12]采用相互作用积分法研究了非均匀连续介质材料裂纹问题;Itou 等^[13,14]分析了非均匀连续介质材料界面裂纹问题;Kim 等^[15]采用梯度有限元法分析了非均匀连续介质材料的裂纹问题;Yong 等^[16]通过数值方法求解柯西型奇异积分方程,研究了含裂纹的粘结弹性材料的反平面剪切问题;Wang 等^[17,18]研究了非均匀复合材料在动态反平面剪切作用下的多裂纹问题;Zhang 等^[19]采用边界积分方程法(BIEM)分析了功能梯度材料的裂纹问题。

针对材料弹性模量随着角度连续变化的非均匀连续介质材料裂纹和切口问题,Carpinter 等^[20]研究了角度非均匀连续介质材料裂纹应力奇异性,发现裂纹的应力奇性指数受到材料梯度的影响;Cheng 等^[21]运用插值矩阵法研究了角度非均匀连续介质材料平面和反平面切口和裂纹的应力奇异性;基于线弹性理论,Theotokoglou 等^[22,23]研究了集中力作用下角度非均匀连续介质材料平面楔体的弹性静力问题,当每个子楔体的体积趋于无穷小

收稿日期:2022-04-18;修改稿收到日期:2022-06-21.

基金项目:安徽省自然科学基金(1808085ME147);国家级大学生创新训练项目(202110363125);安徽工程大学-鸠江区产业协同创新专项基金(2022cyxtb1; 2022cyxtb5)资助项目.

作者简介:葛仁余*(1969-),男,博士,教授
(E-mail:gerenyu@sina.com).

且弹性模量平稳变化时,多材料楔体可视为角度非均匀楔体。

本文创新性地微分求积法(DQM)应用到非均匀连续介质材料断裂力学的研究领域,根据弹性力学基本理论,引入V形切口尖端位移场的级数渐近展开,建立以位移为特征函数的常微分方程组。基于微分求积法理论,将该常微分方程组的特征值问题转化为标准型广义代数方程组特征值问题,再采用QR法可一次性地计算出角度非均匀连续介质材料平面V形切口端部多阶应力奇性指数及其相应的位移特征函数。

2 角度非均匀单相材料平面V形切口应力奇性分析

图1所示为一角度非均匀材料平面V形切口在直角坐标系 oxy 和极坐标系 $or\theta$ 下的模型,坐标原点 o 在切口尖端。V形切口内张角为 $\gamma = \theta_2 - \theta_1$, x 轴与切口张角的角平分线一致。 $\theta = \theta_1$ 起始边的弹性模量为 E_1 , $\theta = \theta_2$ 终止边的弹性模量为 E_2 ,Poisson比 ν 不随角度变化,切口内材料的弹性模量 $E(\theta)$ 按照一定的函数关系变化,如图2所示。

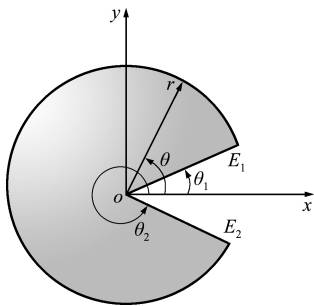


图1 角度非均匀平面V形切口
Fig. 1 Scheme of an angle inhomogeneous plane V-notch

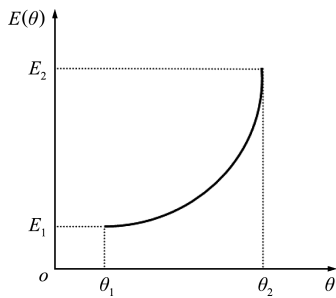


图2 弹性模量与角度变化的关系
Fig. 2 Relationship between elastic modulus and angle

根据线弹性理论,平面切口尖端区域的径向和周向渐近位移场 u_r 和 u_θ 可以表达成极坐标 r 的级数渐近展开形式,

$$\begin{cases} u_r = \sum_{k=1}^N A_k r^{\lambda_k+1} \tilde{u}_r(\theta) \\ u_\theta = \sum_{k=1}^N A_k r^{\lambda_k+1} \tilde{u}_\theta(\theta) \end{cases} \quad (1)$$

式中 A_k 为级数展开项的幅值系数, λ_k 为应力奇性指数, N 为级数的截断项数, $\tilde{u}_r(\theta)$ 和 $\tilde{u}_\theta(\theta)$ 分别为径向和周向位移特征函数。将式(1)的典型项 $A_k r^{\lambda_k+1} \tilde{u}_r$ 和 $A_k r^{\lambda_k+1} \tilde{u}_\theta$ 代入平面线弹性理论的几何方程,可以获得应变分量 ϵ_{ij} ($ij = rr, \theta\theta, r\theta$)分别为

$$\begin{cases} \epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = A_k r^{\lambda_k} (1 + \lambda_k) \tilde{u}_r \\ \epsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = A_k r^{\lambda_k} (\tilde{u}_r + \tilde{u}'_\theta) \\ \epsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} = A_k r^{\lambda_k} (\tilde{u}'_r + \lambda_k \tilde{u}_\theta) \end{cases} \quad (2)$$

将式(2)代入平面应力状态下的物理方程,则应力分量 σ_{ij} ($ij = rr, \theta\theta, r\theta$)分别为

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{E(\theta)}{1-\nu^2} (\epsilon_{rr} + \nu \epsilon_{\theta\theta}) = \frac{E(\theta)}{1-\nu^2} A_k r^{\lambda_k} \times \\ \quad [(1+\nu) \tilde{u}_r + \nu \tilde{u}'_\theta + \lambda_k \tilde{u}_r] \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{E(\theta)}{1-\nu^2} (\epsilon_{\theta\theta} + \nu \epsilon_{rr}) = \frac{E(\theta)}{1-\nu^2} A_k r^{\lambda_k} \times \\ \quad [(1+\nu) \tilde{u}_r + \tilde{u}'_\theta + \lambda_k \nu \tilde{u}_r] \\ \sigma_{r\theta} = \frac{E(\theta)}{2(1+\nu)} \epsilon_{r\theta} = \frac{E(\theta)}{2(1+\nu)} A_k r^{\lambda_k} (\tilde{u}'_r + \lambda_k \tilde{u}_\theta) \end{cases} \quad (3)$$

式中 $(\dots)' = d(\dots)/d\theta$ 。

在极坐标系下,忽略体积力项的弹性力学平面问题平衡方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

将式(3)引入式(4),有

$$\begin{cases} \tilde{u}_r'' + \tilde{E}(\theta) \tilde{u}_r' + \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \lambda_k - 2 \right) \tilde{u}_\theta' + \\ \quad \lambda_k \tilde{E}(\theta) \tilde{u}_\theta + \frac{2}{1-\nu} \lambda_k (\lambda_k + 2) \tilde{u}_r = 0 \\ \tilde{u}_\theta'' + \tilde{E}(\theta) \tilde{u}_\theta' + \tilde{E}(\theta) (1+\nu) \tilde{u}_r + \\ \quad \lambda_k \nu \tilde{E}(\theta) \tilde{u}_r + \left[2 + \frac{1}{2} (1+\nu) \lambda_k \right] \tilde{u}_\theta' + \\ \quad \frac{1}{2} (1-\nu) \lambda_k (\lambda_k + 2) \tilde{u}_\theta = 0 \end{cases} \quad (5)$$

式中 $(\dots)'' = d^2(\dots)/d\theta^2$, $\tilde{E}(\theta) = E'(\theta)/E(\theta)$ 。

假设 $\theta = \theta_1$ 和 $\theta = \theta_2$ 径向边界上面力为零,即 $\sigma_{\theta\theta} = 0, \sigma_{r\theta} = 0$,根据式(3),则有边界条件

$$\begin{cases} \tilde{u}_\theta'(\theta) + (1+\nu) \tilde{u}_r(\theta) + \lambda_k \nu \tilde{u}_r(\theta) = 0 \\ \tilde{u}_r'(\theta) + \lambda_k \tilde{u}_\theta(\theta) = 0 \end{cases} \quad (\theta = \theta_1, \theta_2) \quad (6)$$

综上所述,角度非均匀材料平面 V 切口应力奇性指数的计算,可转化为求解在边界条件式(6)下微分方程式(5)的特征值问题。

3 三相材料组合构型的裂纹应力奇性分析

图 3 所示为一个三相材料组合构型的裂纹在直角坐标系 oxy 和极坐标系 $or\theta$ 下的模型,异质材料在交界处完全粘结,坐标原点 o 设在裂纹的尖端。其中,楔形材料 1 和材料 2 为各向同性均匀材料,内张角分别为 α 和 β ,且 $\alpha + \beta = 180^\circ$,材料的弹性模量分别为 E_1 和 E_2 ,Poisson 比分别为 ν_1 和 ν_2 。半平面材料 3 为角度非均匀材料,其弹性模量 $E_3(\theta)$ 按照一定的函数关系变化如图 4 所示, $\theta = \pi$ 起始边的弹性模量为 E_2 , $\theta = 2\pi$ 终止边的弹性模量为 E_3 ,Poisson 比为 ν_3 。

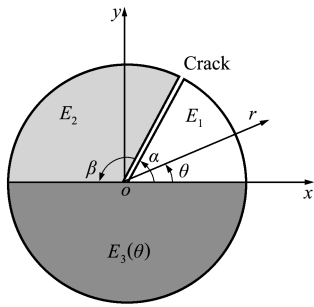


图 3 三相材料组合构型的界面裂纹

Fig. 3 Interfacial crack in three-phase composite configurations

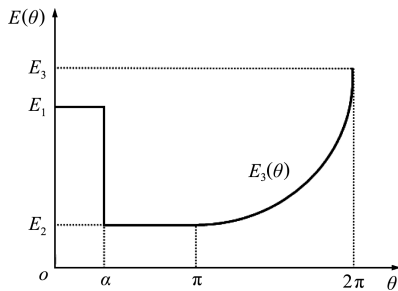


图 4 材料弹性模量与角度变化的关系

Fig. 4 Relationship between elastic modulus and angle

根据式(5),在三相材料 1、材料 2 和材料 3 域内建立平面 V 形切口问题控制方程,得

$$\begin{cases} \tilde{u}_{jr}'' + \tilde{E}_j(\theta) \tilde{u}_{jr}' + \left(\frac{1+\nu_j}{1-\nu_j} \lambda_k - 2 \right) \tilde{u}_{j\theta}' + \\ \lambda_k \tilde{E}_j(\theta) \tilde{u}_{j\theta} + \frac{2}{1-\nu_j} \lambda_k (\lambda_k + 2) \tilde{u}_{jr} = 0 \\ \tilde{u}_{j\theta}'' + \tilde{E}_j(\theta) \tilde{u}_{j\theta}' + \tilde{E}_j(\theta) (1 + \nu_j) \tilde{u}_{jr} + \\ \lambda_k \nu_j \tilde{E}_j(\theta) \tilde{u}_{jr} + \left[2 + \frac{1}{2} (1 + \nu_j) \lambda_k \right] \tilde{u}_{jr}' + \\ \frac{1}{2} (1 - \nu_j) \lambda_k (\lambda_k + 2) \tilde{u}_{j\theta} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

式中 $\tilde{E}_j(\theta) = E_j'(\theta)/E_j(\theta)$ ($j=1,2,3$), $\tilde{u}_{jr}$ 和 $\tilde{u}_{j\theta}$ 分别为三相材料的径向和周向位移特征函数。作为角度非均匀材料的特殊情形,由于材料 1 与材料 2 是各向同性均匀材料,弹性模量分别为 E_1 和 E_2 ,均为常量,所以, $\tilde{E}_1(\theta) = E_1'(\theta)/E_1(\theta) = 0$, $\tilde{E}_2(\theta) = E_2'(\theta)/E_2(\theta) = 0$ 。

在图 3 模型的交界 $\theta = 0^\circ$ 和 $\theta = 180^\circ$ 上位移连续且面力相等,交界条件有

$$\begin{cases} \tilde{u}_{1r} = \tilde{u}_{3r} \\ \tilde{u}_{1\theta} = \tilde{u}_{3\theta} \\ \frac{E_1}{1-\nu_1^2} [\tilde{u}_{1\theta}' + (1+\nu_1) \tilde{u}_{1r} + \lambda_k \nu_1 \tilde{u}_{1r}] = \frac{E_3}{1-\nu_3^2} \times \\ [\tilde{u}_{3\theta}' + (1+\nu_3) \tilde{u}_{3r} + \lambda_k \nu_3 \tilde{u}_{3r}] \\ \frac{E_1}{2(1+\nu_1)} (\tilde{u}_{1r}' + \lambda_k \tilde{u}_{1\theta}) = \frac{E_3}{2(1+\nu_3)} (\tilde{u}_{3r}' + \lambda_k \tilde{u}_{3\theta}) \end{cases} \quad (8a)$$

$$\begin{cases} \tilde{u}_{2r} = \tilde{u}_{3r} \\ \tilde{u}_{2\theta} = \tilde{u}_{3\theta} \\ \frac{E_2}{1-\nu_2^2} [\tilde{u}_{2\theta}' + (1+\nu_2) \tilde{u}_{2r} + \lambda_k \nu_2 \tilde{u}_{2r}] = \frac{E_3}{1-\nu_3^2} \times \\ [\tilde{u}_{3\theta}' + (1+\nu_3) \tilde{u}_{3r} + \lambda_k \nu_3 \tilde{u}_{3r}] \\ \frac{E_2}{2(1+\nu_2)} (\tilde{u}_{2r}' + \lambda_k \tilde{u}_{2\theta}) = \frac{E_3}{2(1+\nu_3)} (\tilde{u}_{3r}' + \lambda_k \tilde{u}_{3\theta}) \end{cases} \quad (8b)$$

在图 3 模型的自由边界 $\theta = \alpha$ 上面力为 0,则有边界条件

$$\begin{cases} \tilde{u}_{1\theta}' + (1+\nu_1) \tilde{u}_{1r} + \lambda_k \nu_1 \tilde{u}_{1r} = 0 \\ \tilde{u}_{1r}' + \lambda_k \tilde{u}_{1\theta} = 0 \\ \tilde{u}_{2\theta}' + (1+\nu_2) \tilde{u}_{2r} + \lambda_k \nu_2 \tilde{u}_{2r} = 0 \\ \tilde{u}_{2r}' + \lambda_k \tilde{u}_{2\theta} = 0 \end{cases} \quad (8c)$$

综上所述,三相材料组合构型的裂纹应力奇性指数 λ_k 的求解,转化为在边界和交界条件式(8)下,关于应力奇性指数 λ_k 的变系数常微分方程式(7)特征值问题。下面采用微分求积法求解,可得到图 3 所示裂纹的应力奇性指数 λ_k 及其相应的位移特征函数 $\tilde{u}_{jr}$ 和 $\tilde{u}_{j\theta}$ ($j=1,2,3$)。

3 微分求积法求解平面 V 形切口应力奇性指数

不失一般性,以图 1 角度非均匀材料 V 形切口为例,来说明微分求积法求解应力奇性指数的分析过程。为了便于编程计算,引入无量纲变量 ξ ($0 \leq \xi \leq 1$),当 $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ 时,有

$$\xi = (\theta - \theta_1) / \theta_{21} \quad (\theta_{21} = \theta_2 - \theta_1) \quad (9)$$

将式(9)代入式(5),有

$$\begin{cases} \tilde{u}_r'' + \tilde{E} \tilde{u}_r' + \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \lambda_k - 2\right) \theta_{21} \tilde{u}_\theta' + \lambda_k \tilde{E} \theta_{21} \tilde{u}_\theta + \\ \frac{2}{1-\nu} \lambda_k (\lambda_k + 2) \theta_{21}^2 \tilde{u}_r = 0 \\ \tilde{u}_\theta'' + \tilde{E} \tilde{u}_\theta' + \tilde{E} (1 + \nu) \theta_{21} \tilde{u}_r + \lambda_k \nu \tilde{E} \theta_{21} \tilde{u}_r + \\ \left[2 + \frac{1}{2} (1 + \nu) \lambda_k\right] \theta_{21} \tilde{u}_r' + \\ \frac{1}{2} (1 - \nu) \lambda_k (\lambda_k + 2) \theta_{21}^2 \tilde{u}_\theta = 0 \end{cases} \quad (10)$$

式中 $(\dots)' = d(\dots)/d\xi$, $(\dots)'' = d^2(\dots)/d\xi^2$ 。

将位移特征函数 $\tilde{u}_r(\xi)$ 和 $\tilde{u}_\theta(\xi)$ 用节点函数值进行拉格朗日 (Lagrange) 插值来描述, 即

$$\begin{cases} \tilde{u}_r(\xi) = \sum_{j=0}^n l_j(\xi) \tilde{u}_r(\xi_j) \\ \tilde{u}_\theta(\xi) = \sum_{j=0}^n l_j(\xi) \tilde{u}_\theta(\xi_j) \\ l_j(\xi) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (\xi - \xi_k) / (\xi_j - \xi_k) \end{cases} \quad (11)$$

式中 $l_j(\xi)$ 为拉格朗日多项式, n 为离散单元总数, 离散节点方式采用具有稳定收敛特性的余弦网格模式, 即

$$\xi_j = \frac{1}{2} (1 - \cos \frac{\pi j}{n}) \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

将式(11)中函数 $\tilde{u}_r(\xi)$ 和 $\tilde{u}_\theta(\xi)$ 求一阶导数, 并在区间 $\xi \in [0, 1]$ 上划分 n 个离散单元, 得到

$$\begin{cases} \tilde{u}_r'(\xi_i) = \sum_{j=0}^n l_j'(\xi_i) \tilde{u}_r(\xi_j) \\ \tilde{u}_\theta'(\xi_i) = \sum_{j=0}^n l_j'(\xi_i) \tilde{u}_\theta(\xi_j) \end{cases} \quad (i, j = 0, 1, \dots, n) \quad (13)$$

式中 $l_j'(\xi) = dl_j(\xi)/d\xi$ 。

将式(13)写成向量形式, 得

$$\begin{cases} \tilde{u}_r'(\xi_i) = \mathbf{A}_{nn}^{(1)} \tilde{\mathbf{u}}_r(\xi_j) \\ \tilde{u}_\theta'(\xi_i) = \mathbf{A}_{nn}^{(1)} \tilde{\mathbf{u}}_\theta(\xi_j) \end{cases} \quad (14)$$

式中 向量 $\mathbf{A}_{nn}^{(1)}$, $\tilde{\mathbf{u}}_r(\xi_j)$, $\tilde{\mathbf{u}}_\theta(\xi_j)$, $\tilde{\mathbf{u}}_\theta'(\xi_j)$ 和 $\tilde{\mathbf{u}}_\theta(\xi_j)$ 为

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{nn}^{(1)} = (\mathbf{A}_{ij}^{(1)})_{(n+1) \times (n+1)} \\ \tilde{\mathbf{u}}_r'(\xi) = (\tilde{u}_r'(\xi_0), \tilde{u}_r'(\xi_1), \dots, \tilde{u}_r'(\xi_n))^T \\ \tilde{\mathbf{u}}_r(\xi) = (\tilde{u}_r(\xi_0), \tilde{u}_r(\xi_1), \dots, \tilde{u}_r(\xi_n))^T \\ \tilde{\mathbf{u}}_\theta'(\xi) = (\tilde{u}_\theta'(\xi_0), \tilde{u}_\theta'(\xi_1), \dots, \tilde{u}_\theta'(\xi_n))^T \\ \tilde{\mathbf{u}}_\theta(\xi) = (\tilde{u}_\theta(\xi_0), \tilde{u}_\theta(\xi_1), \dots, \tilde{u}_\theta(\xi_n))^T \end{cases} \quad (15)$$

式中 一阶导数的加权系数矩阵 $\mathbf{A}_{nn}^{(1)}$ 的矩阵元素 $A_{ij}^{(1)}$ 显示表达式为

$$A_{ij}^{(1)} = l_j'(\xi_i) = \begin{cases} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i, j}}^n (\xi_i - \xi_k) / \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (\xi_j - \xi_k) & (i \neq j) \\ \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n [1 / (\xi_i - \xi_k)] & (i = j) \end{cases} \quad (16)$$

依次类推, 可得

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}_r''(\xi_i) = \mathbf{A}_{nn}^{(2)} \tilde{\mathbf{u}}_r(\xi_j) \\ \tilde{\mathbf{u}}_\theta''(\xi_i) = \mathbf{A}_{nn}^{(2)} \tilde{\mathbf{u}}_\theta(\xi_j) \end{cases} \quad (17)$$

式中

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{nn}^{(2)} = \mathbf{A}_{nn}^{(1)} \mathbf{A}_{nn}^{(1)} \\ \tilde{\mathbf{u}}_r''(\xi_i) = (\tilde{u}_r''(\xi_0), \tilde{u}_r''(\xi_1), \dots, \tilde{u}_r''(\xi_n))^T \\ \tilde{\mathbf{u}}_\theta''(\xi_i) = (\tilde{u}_\theta''(\xi_0), \tilde{u}_\theta''(\xi_1), \dots, \tilde{u}_\theta''(\xi_n))^T \end{cases} \quad (18)$$

将式(14, 17)代入式(10), 控制方程写成向量形式, 化简得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_r \\ \tilde{\mathbf{u}}_\theta \end{bmatrix} + \lambda_k \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_r \\ \tilde{\mathbf{u}}_\theta \end{bmatrix} + \lambda_k^2 \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_r \\ \tilde{\mathbf{u}}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (19)$$

式中 $\mathbf{C}_{11}$, $\mathbf{C}_{12}$, $\mathbf{C}_{21}$, $\mathbf{C}_{22}$, $\mathbf{D}_{11}$, $\mathbf{D}_{12}$, $\mathbf{D}_{21}$, $\mathbf{D}_{22}$, $\mathbf{G}_{11}$ 和 $\mathbf{G}_{22}$ 皆为 $(n+1) \times (n+1)$ 阶矩阵, 分别为

$$\begin{cases} \mathbf{C}_{11} = \mathbf{A}_{nn}^{(2)} + \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{A}_{nn}^{(1)}, \mathbf{C}_{12} = -2\theta_{21} \mathbf{A}_{nn}^{(1)} \\ \mathbf{D}_{11} = \frac{4\theta_{21}^2}{1-\nu} \mathbf{I}, \mathbf{D}_{12} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \theta_{21} \mathbf{A}_{nn}^{(1)} + \theta_{21} \tilde{\mathbf{E}}, \mathbf{G}_{11} = \frac{2\theta_{21}^2}{1-\nu} \mathbf{I} \end{cases} \quad (20a)$$

$$\begin{cases} \mathbf{C}_{21} = 2\theta_{21} \mathbf{A}_{nn}^{(1)} + (1+\nu) \theta_{21} \tilde{\mathbf{E}}, \mathbf{C}_{22} = \mathbf{A}_{nn}^{(2)} + \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{A}_{nn}^{(1)} \\ \mathbf{D}_{21} = \nu \theta_{21} \tilde{\mathbf{E}} + \frac{(1+\nu) \theta_{21}}{2} \mathbf{A}_{nn}^{(1)}, \mathbf{D}_{22} = (1-\nu) \theta_{21}^2 \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_{22} = \frac{(1-\nu) \theta_{21}^2}{2} \mathbf{I} \end{cases} \quad (20b)$$

式中 $\mathbf{I}$ 为 $(n+1) \times (n+1)$ 阶单位矩阵, $\tilde{\mathbf{E}}$ 为 $(n+1) \times (n+1)$ 阶对角阵, 即

$$\tilde{\mathbf{E}} = \text{diag}(\tilde{\mathbf{E}}(\xi_0), \tilde{\mathbf{E}}(\xi_1), \dots, \tilde{\mathbf{E}}(\xi_{n-1}), \tilde{\mathbf{E}}(\xi_n)) \quad (20c)$$

以 V 形切口两边自由的边界条件为例, 写成向量形式为

$$\begin{cases} [(1+\nu) \mathbf{I}]_{I_l} \tilde{\mathbf{u}}_r + [\mathbf{A}_{nn}^{(1)}]_{I_l} \tilde{\mathbf{u}}_\theta + \lambda_k [\nu \mathbf{I}]_{I_l} \tilde{\mathbf{u}}_r = \mathbf{0} \\ [\mathbf{A}_{nn}^{(1)}]_{I_l} \tilde{\mathbf{u}}_r + \lambda_k [\mathbf{I}]_{I_l} \tilde{\mathbf{u}}_\theta = \mathbf{0} \end{cases} \quad (21)$$

式中 $I_l = 0$ 和 n , $[\dots]_{I_l}$ 表示矩阵的第 0 行和第 n 行。将边界条件式(21)代入控制方程(19), 替换相应矩阵的第 0 行和第 n 行, 得

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}_{11} & \hat{\mathbf{C}}_{12} \\ \hat{\mathbf{C}}_{21} & \hat{\mathbf{C}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_r \\ \tilde{\mathbf{u}}_\theta \end{bmatrix} + \lambda_k \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{D}}_{11} & \hat{\mathbf{D}}_{12} \\ \hat{\mathbf{D}}_{21} & \hat{\mathbf{D}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_r \\ \tilde{\mathbf{u}}_\theta \end{bmatrix} + \lambda_k^2 \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{G}}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{G}}_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_r \\ \tilde{\mathbf{u}}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (22)$$

式(22)为标准型广义代数方程组特征值问题, 本文采用 QR 法求解该式, 可得到角度非均匀材料平面 V 形切口应力奇性指数 λ_k 和相应的特征向量 $\tilde{\mathbf{u}}_r$ 和 $\tilde{\mathbf{u}}_\theta$ 。

4 数值算例

4.1 角度非均匀单相材料 V 形切口应力奇异性

如图 1 所示, 假设角度非均匀材料的 Poisson

比为 $\nu=0.25$, 材料的弹性模量 $E(\theta)$ 按照角度坐标的指数形式变化, 且 $\theta=\theta_1$ 时的弹性模量为 E_1 , $\theta=\theta_2$ 时的弹性模量为 E_2 , 则

$$E(\theta)=E_1\exp\left[\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{E_2}{E_1}\right)\theta\right] \quad (23)$$

在区间 (θ_1,θ_2) 内, 当 V 形切口内张角 $\gamma=\theta_2-\theta_1=360^\circ$ 时, V 形切口退化为裂纹, 设弹性模量比值 $E_2/E_1=5$, 离散节点方式采用具有稳定收敛特性的余弦网格模式, 由微分求积法 (DQM) 编程计算角度非均匀单相材料的平面裂纹尖端区域应力奇异特征指数的前 5 阶值列入表 1, 表 1 中 n 是指区间 (θ_1,θ_2) 的离散单元数, 计算结果表明, 随着区间 (θ_1,θ_2) 离散单元数增多, 计算精度越高, DQM 计算值逐渐收敛于实际值。表 1 共列出 DQM 计算的前 5 阶应力奇性指数, 其中前 2 阶为复数根, 其实部为 $-1<\text{Re}\lambda_1<0$ 和 $-1<\text{Re}\lambda_2<0$, 根据式 (3) 呈现应力奇异性, 而 $\lambda_3>0, \lambda_4>0$ 和

$\lambda_5>0$ 不再呈现应力奇异性称之为应力非奇异项。由数学分析可知, 级数渐近展开的项数选取得越多, 就越能刻画离裂纹端点越远处的应力状态, 因此, 这些应力非奇异项是描述角度非均匀材料平面裂纹尖端附近完整应力场不可或缺的物理量^[24], 特别距离裂纹尖端较远处时, 后续非奇异项 λ_3, λ_4 和 λ_5 的影响不可忽略。

弹性模量比值分别为 $E_2/E_1=1, 10, 50$, 区间 (θ_1,θ_2) 的离散单元数 $n=20$ 时, 采用 DQM 计算式 (5), 获得角度非均匀材料的平面 V 形切口尖端区域应力奇性指数的前 2 阶计算值列入表 2, 由表 2 可知, 随着切口的内张角 γ 和弹性模量比值 E_2/E_1 的增大, 应力奇性指数是复数而不是实数。同时, 本文 DQM 计算值与 Cheng 等^[21] 结果一致, 表明了 DQM 分析角度非均匀材料平面 V 形切口应力奇性指数是有效且准确的。

表 1 平面裂纹应力奇性指数随离散单元 n 的变化 ($E_2/E_1=5$)
Tab. 1 Variation of stress singularity index of plane crack in angular non-uniform material with discrete element n ($E_2/E_1=5$)

n	Orders				
	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
4	$-0.4770+i0.0360$	$-0.4770-i0.0360$	0.1326	0.4467	0.9247
8	$-0.4848+i0.0402$	$-0.4848-i0.0402$	0.0283	0.4847	0.6254
10	$-0.4862+i0.0409$	$-0.4862-i0.0409$	0.0140	0.4717	0.5765
12	$-0.4867+i0.0411$	$-0.4867-i0.0411$	0.0099	0.4639	0.5703
14	$-0.4869+i0.0412$	$-0.4869-i0.0412$	0.0083	0.4606	0.5688
16	$-0.4870+i0.0412$	$-0.4870-i0.0412$	0.0077	0.4590	0.5683
20	$-0.4870+i0.0412$	$-0.4870-i0.0412$	0.0073	0.4582	0.5680
Ref. [21]	$-0.4871+i0.0412$	$-0.4871-i0.0412$	—	—	—

注: —表示文献[21]没有给出计算结果, $i=\sqrt{-1}$ 为虚数, 下同。

表 2 弹性模量按照指数函数变化时切口的应力奇性指数
Tab. 2 Stress singularity index of plane V-notch when the elastic modulus changes in the form of exponential function

γ	Orders	E_2/E_1					
		1		10		50	
		Ref. [21]	Present	Ref. [21]	Present	Ref. [21]	Present
280°	λ_1	-0.469	-0.469	-0.433	-0.433	-0.366	-0.366
	λ_2	-0.156	-0.156	-0.155	-0.155	-0.157	-0.157
300°	λ_1	-0.487	-0.487	-0.445	-0.445	-0.347	-0.348
	λ_2	-0.269	-0.268	-0.269	-0.269	-0.294	-0.294
320°	λ_1	-0.496	-0.496	-0.436	-0.436	$-0.366+i0.072$	$-0.366+i0.072$
	λ_2	-0.361	-0.361	-0.376	-0.376	$-0.366-i0.072$	$-0.366-i0.072$
340°	λ_1	-0.499	-0.499	$-0.444+i0.049$	$-0.444+i0.049$	$-0.402+i0.090$	$-0.402+i0.090$
	λ_2	-0.437	-0.437	$-0.444-i0.049$	$-0.444-i0.049$	$-0.402-i0.090$	$-0.402-i0.090$
360°	λ_1	-0.500	-0.499	$-0.474+i0.058$	$-0.473+i0.058$	$-0.429+i0.096$	$-0.429+i0.096$
	λ_2	-0.500	-0.499	$-0.474-i0.058$	$-0.473-i0.058$	$-0.429-i0.096$	$-0.429-i0.096$

4.2 三相材料组合构型的裂纹与切口应力奇异性

如图3所示,假设三相材料组合构型的裂纹模型中材料的Poisson比为 $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.25$,角度非均匀材料的弹性模量 $E_3(\theta)$ 按照角度坐标的指数形式变化,且 $\theta = \pi$ 时的弹性模量为 E_2 , $\theta = 2\pi$ 时的弹性模量为 E_3 ,则

$$E_3(\theta) = E_2 \exp \left[\frac{1}{\pi} \left(\ln \frac{E_3}{E_2} \right) (\theta - \pi) \right] \quad (\pi \leq \theta \leq 2\pi) \quad (24)$$

设弹性模量比值 $E_1/E_2 = 10$,离散单元数 $n = 20$,在区间 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 内,离散节点方式采用具有稳定收敛特性的余弦网格模式,采用微分求积法(DQM)计算式(7),获得角度非均匀材料组合构型的界面裂纹尖端区域应力奇性指数 λ 与弹性模量比值 E_3/E_2 的关系曲线如图5~图10所示。 $\alpha = 15^\circ$ 时,界面裂纹尖端区域应力奇特征指数变化曲线如图5所示,当 $0.001 \leq E_3/E_2 < 1.851$ 时,应

力奇性指数为实数根, $1.851 < E_3/E_2 \leq 10000$ 时,应力奇性指数为复数根,图5只描绘了复数根的负虚部。 $E_3/E_2 = 1.851$ 为应力奇性指数实数根与复数根的唯一过渡点,此时,裂纹尖端应力奇性指数有一个双实数根 $\text{Re}\lambda = -0.535323$,这种情况是幂对数应力奇异性的一个典型例子^[26]。这种 $\alpha = 15^\circ$ 界面裂纹模型应力奇异性特性类似地适用于所有其他 $\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ 和 90° 情形。如图7所示, $\alpha = 90^\circ$ 时,本文微分求积法(DQM)计算值与Carpinteri等^[20]计算结果完全一致,再次证明了DQM计算角度非均匀材料组合构型界面裂纹应力奇性指数的有效性和精确性。

如图5所示,在三相材料组合构型的界面裂纹模型中,若 $\alpha = \beta = 90^\circ$,则界面裂纹垂直于角度非均匀材料3的半平面;若 $\alpha = \beta < 90^\circ$,则界面裂纹成为垂直于半平面的V形切口。设弹性模量比值 $E_1/E_2 = 10$,Poisson比为 $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.25$,离散

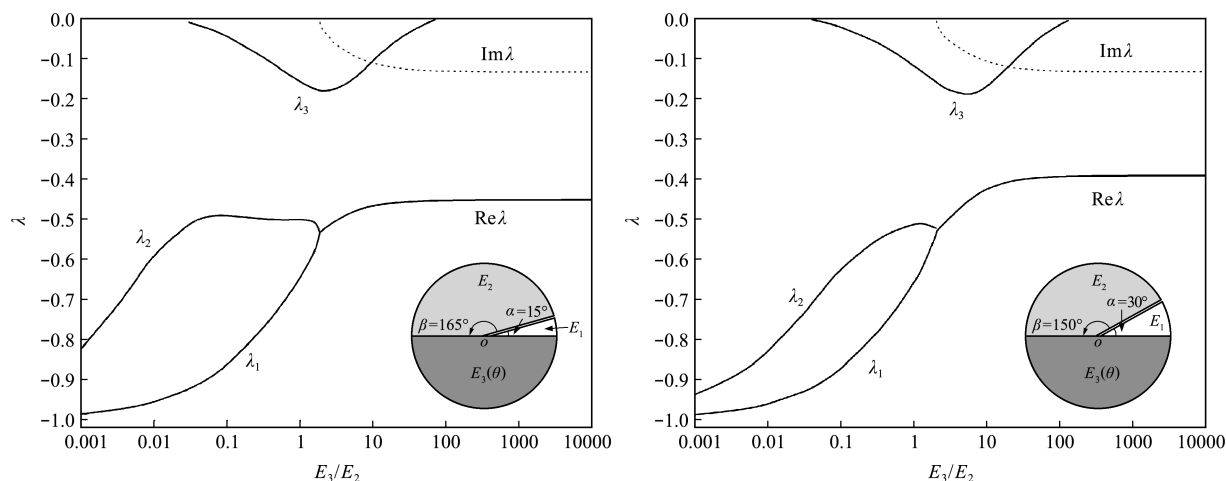


图5 $\alpha = 15^\circ$ 和 $\alpha = 30^\circ$ 的三相材料组合构型应力奇性指数

Fig. 5 Orders of singularities for tri-material combination configurations with $\alpha = 15^\circ$ and $\alpha = 30^\circ$

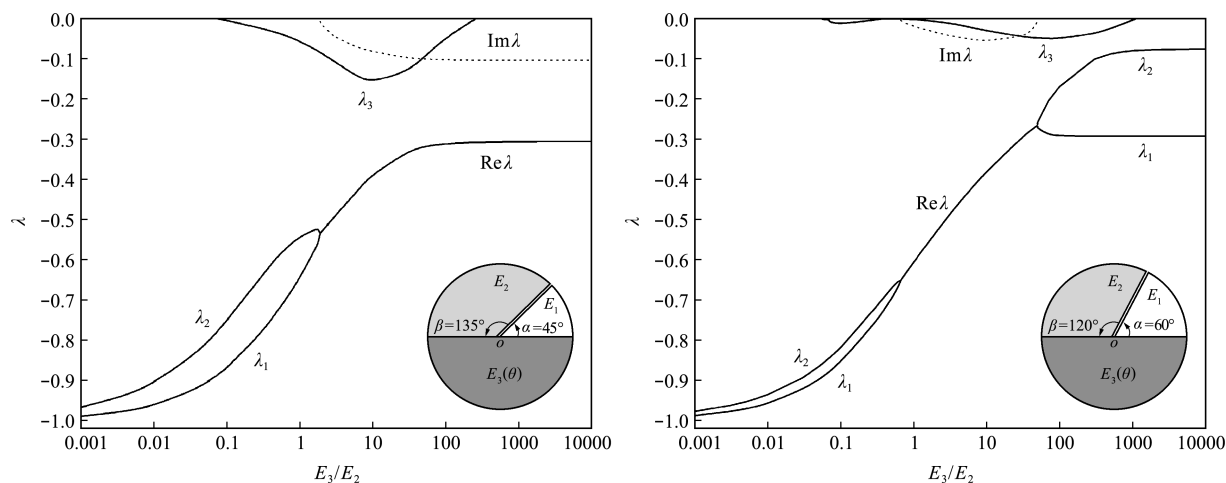


图6 $\alpha = 45^\circ$ 和 $\alpha = 60^\circ$ 的三相材料组合构型应力奇性指数

Fig. 6 Orders of singularities for tri-material combination configurations with $\alpha = 45^\circ$ and $\alpha = 60^\circ$

单元数 $n = 20$, 采用微分求积法 (DQM) 计算式 (7), 获得角度非均匀三相材料组合构型的 V 形切口尖端区域应力奇异特征指数与弹性模量比值 E_3/E_2 的关系曲线如图 8~图 10 所示。可以看出,

随着 V 形切口的外张角 $\phi = 180^\circ - \alpha - \beta$ 的增大, 应力奇性指数由复数向实数逐渐转化, 即垂直于界面的 V 形切口端部微小扇形区域内的振荡应力奇异性现象逐渐消失^[25]。

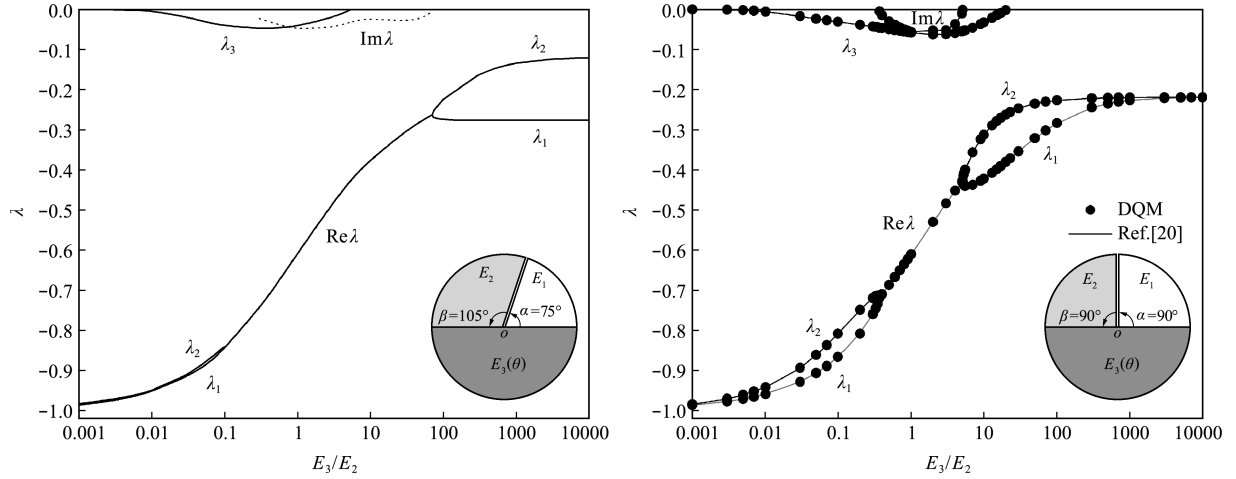


图 7 $\alpha=75^\circ$ 和 $\alpha=90^\circ$ 的三相材料组合构型应力奇性指数

Fig. 7 Orders of singularities for tri-material combination configurations with $\alpha=75^\circ$ and $\alpha=90^\circ$

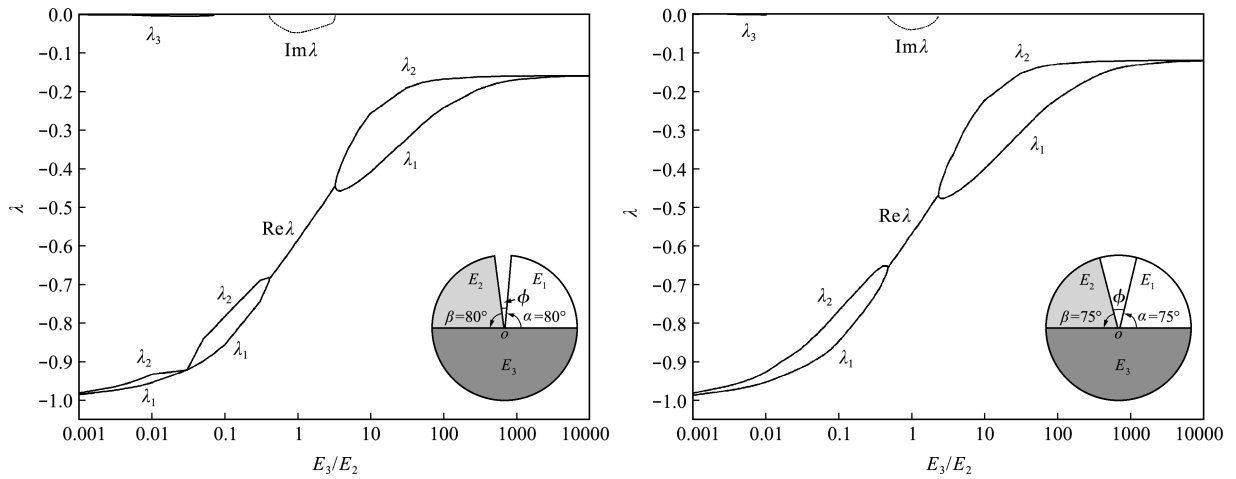


图 8 $\alpha=\beta=80^\circ$ 和 $\alpha=\beta=75^\circ$ 的三相材料组合构型应力奇性指数

Fig. 8 Orders of singularities for tri-material combination configurations with $\alpha=\beta=80^\circ$ and $\alpha=\beta=75^\circ$

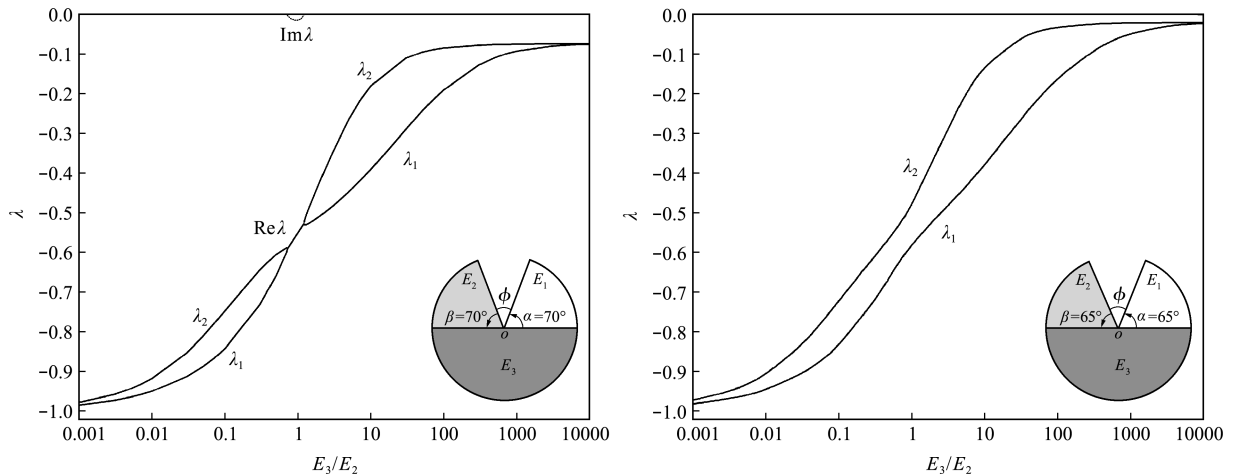


图 9 $\alpha=\beta=70^\circ$ 和 $\alpha=\beta=65^\circ$ 的三相材料组合构型应力奇性指数

Fig. 9 Orders of singularities for tri-material combination configurations with $\alpha=\beta=70^\circ$ and $\alpha=\beta=65^\circ$

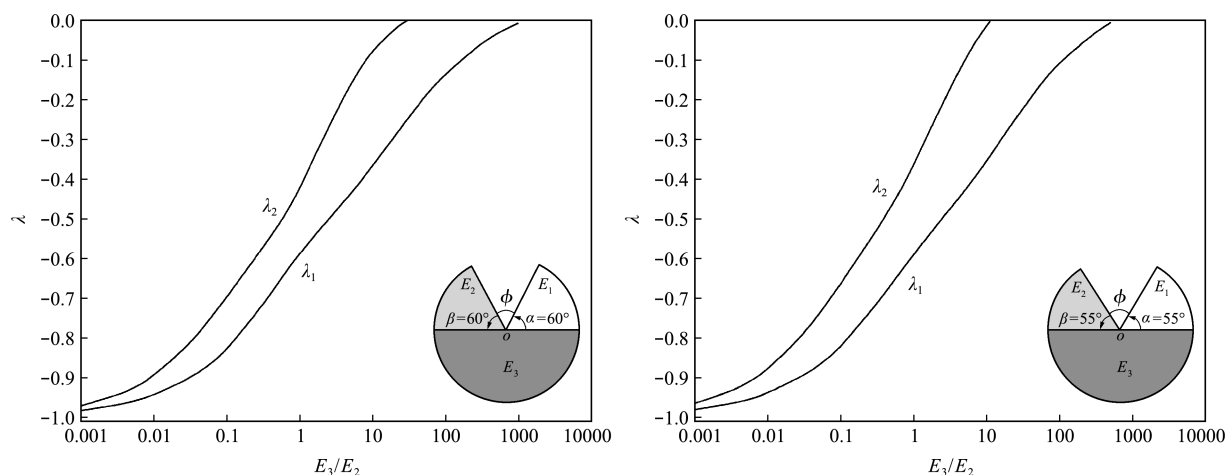


图 10 $\alpha=\beta=60^\circ$ 和 $\alpha=\beta=55^\circ$ 的三相材料组合构型应力奇性指数
Fig. 10 Orders of singularities for tri-material combination configurations with $\alpha=\beta=60^\circ$ and $\alpha=\beta=55^\circ$

5 结 论

基于平面 V 形切口端部位移场和应力场的 Williams 渐近展开式,将其典型项代入弹性力学平面问题平衡方程中,将角度非均匀单相材料和任意材料组合构型平面 V 形切口端部应力奇性指数的计算转化为一类常微分方程组 (ODEs) 特征值问题,再由微分求积法求解,可获得 V 形切口和任意材料组合构型的界面裂纹多阶应力奇性指数。主要结论如下。

(1) 本文典型算例的 DQM 计算值与已有文献结果完全一致,证明了微分求积法 (DQM) 求解角度非均匀单相材料平面 V 形切口和三相材料组合构型裂纹应力奇性指数是一种有效且准确的手段。

(2) 关于角度非均匀单相材料 V 形切口,随着切口的内张角 γ 和弹性模量比值 E_2/E_1 的增大,应力奇性指数是复数而不是实数,出现振荡应力奇异性。

(3) 关于角度非均匀三相材料组合构型,随着 V 形切口外张角 ϕ 的增大,垂直于材料 3 半平面的 V 形切口应力奇性指数由复数向实数逐渐转化,即 V 形切口端部微小扇形区域内的振荡应力奇异性逐渐消失。

参考文献 (References):

- [1] 岳中琦. 多层与梯度非均匀材料弹性力学问题解析解的简明数学理论[J]. 岩石力学与工程学报, 2004(17): 2845-2854. (YUE Zhong-qi. Mathematical theory for elastic solutions in multilayered or functionally graded materials[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2004(17): 2845-2854. (in Chinese))
- [2] Delale F, Erdogan F. The crack problem for a nonhomogeneous plane[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1983, **50**(3): 609-614.
- [3] Delale F, Erdogan F. Interface crack in a nonhomogeneous elastic medium[J]. *International Journal of*

Engineering Science, 1988, **26**(6): 559-568.

- [4] Konda N, Erdogan F. The mixed mode crack problem in a nonhomogeneous elastic medium[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1994, **47**(4): 533-545.
- [5] Gao H J. Fracture analysis of nonhomogeneous materials via a moduli-perturbation approach [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1991, **27**(13): 1663-1682.
- [6] Ochiai Y. Meshless stress analysis of nonhomogeneous materials by triple-reciprocity boundary element method[A]. 2014.
- [7] Ochiai Y. Three-dimensional heat conduction analysis of non-homogeneous materials by triple-reciprocity BEM [J]. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series B*, 2013, **79**(805): 1793-1804.
- [8] 周承偶, 胡义祥. 双相非均质材料断裂力学分析[J]. 大连工学院学报, 1983, **23**(3): 69-76. (ZHOU Cheng-ti, HU Yi-xiang. An analysis of non-homogeneous materials by fracture mechanics [J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 1983, **23**(3): 69-76.
- [9] Chan Y S, Paulino G H, Fannjiang A C. The crack problem for nonhomogeneous materials under antiplane shear loading—A displacement based formulation [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, **38**(17): 2989-3005.
- [10] Erdogan F. The crack problem for bonded nonhomogeneous materials under antiplane shear loading[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1985, **52**(4): 823-828.
- [11] Yu H J, Wu L Z, Guo L C, et al. An interaction integral method for 3D curved cracks in nonhomogeneous materials with complex interfaces [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, **47**(16): 2178-2189.
- [12] Yu H J, Wu L Z, Guo L C, et al. Interaction integral method for the interfacial fracture problems of two nonhomogeneous materials[J]. *Mechanics of Mate-*

- rials, 2010, **42**(4): 435-450.
- [13] Itou S. Stress intensity factors around a crack in a nonhomogeneous interfacial layer between two dissimilar elastic half-planes [J]. *International Journal of Fracture*, 2001, **110**(2): 123-135.
- [14] Itou S. Thermal stresses around a crack in the nonhomogeneous interfacial layer between two dissimilar elastic half-planes [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2004, **41**(3-4): 923-945.
- [15] Kim J H, Paulino G H. Isoparametric graded finite elements for nonhomogeneous isotropic and orthotropic materials [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2002, **69**(4): 502-514.
- [16] Chung Y M, Kim C, Choi H J. Anti-plane shear behavior of an arbitrarily oriented crack in bonded materials with a nonhomogeneous interfacial zone [J]. *KSME International Journal*, 2003, **17**(2): 269-279.
- [17] Wang B L, Han J C, Du S Y. Multiple crack problem in nonhomogeneous composite materials subjected to dynamic anti-plane shearing [J]. *International Journal of Fracture*, 2000, **100**(4): 343-353.
- [18] Monfared M M, Ayatollahi M. Multiple crack problems in nonhomogeneous orthotropic planes under mixed mode loading conditions [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2016, **155**: 1-17.
- [19] Zhang C, Sladek J, Sladek V. Antiplane crack analysis of a functionally graded material by a BIEM [J]. *Computational Materials Science*, 2005, **32**(3-4): 611-619.
- [20] Carpinteri A, Paggi M. On the asymptotic stress field in angularly nonhomogeneous materials [J]. *International Journal of Fracture*, 2005, **135**(1): 267-283.
- [21] Cheng C Z, Ge S Y, Yao S L, et al. Singularity analysis for a V-Notch with angularly inhomogeneous elastic properties [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2016, **78-79**: 138-148.
- [22] Theotokoglou E E, Stampouloglou I H. The plane wedge problem loaded at its apex- the self-similarity property and the characteristic vector [J]. *Journal of Elasticity*, 2004, **76**(1): 21-43.
- [23] Stampouloglou I H, Theotokoglou E E. The plane self-similar anisotropic and angularly inhomogeneous wedge under power law tractions and the asymptotic analysis of the stress field [J]. *European Journal of Mechanics-A/ Solids*, 2007, **26**(1): 55-67.
- [24] Cheng C Z, Niu Z R, Recho N. Effect of non-singular stress on the brittle fracture of V-notched structure [J]. *International Journal of Fracture*, 2012, **174**(2): 127-138.
- [25] 许金泉. 界面力学 [M]. 北京: 科学出版社, 2006. (XU Jin-quan. *Mechanics of Interface* [M]. Beijing: Science Press, 2006. (in Chinese))
- [26] Cho S B, Carpenter W C. The complex potential approach to power-logarithmic stress singularities for V-notched cracks in a bi-material [J]. *KSME International Journal*, 1999, **13**(1): 19-25.

Stress singularity analysis of plane V-notch in angular non-uniform materials

WANG Jing-ping¹, JIANG Wei², LI Jun-ping³, PAN Jia-yu², SHANG Yue², GE Ren-yu^{*2}

(1. Automotive New Technology Anhui Engineering and Technology Research Center,
Anhui Polytechnic University, Wuhu 241000, China;

2. College of Architectural Engineering, Anhui Polytechnic University, Wuhu 241000, China;

3. School of Electrical Engineering, Anhui Polytechnic University, Wuhu 241000, China)

Abstract: This paper presents an effective method to determine the stress singularity index at the tip of plane V-notch in angular non-uniform materials. Firstly, the series asymptotic expansion of the displacement field at the tip of the V-notch is introduced into the basic equations of elasticity, and the nonlinear variable coefficient differential equations with displacement as the characteristic functions are established. Then the differential quadrature method (DQM) is used to solve the differential equations, and the multi-order stress singularity index and its corresponding characteristic function can be obtained. This method has the advantages of a simple formula, convenient programming, less calculation and high precision. It can deal with the V-shaped notch with any opening angle and any material combination. Typical examples verify the effectiveness and accuracy of the differential quadrature method.

Key words: V-shaped notch; Angular inhomogeneous material, stress singularity, differential quadrature method

引用本文/Cite this paper:

王静平, 姜伟, 李俊萍, 等. 角度非均匀材料平面 V 形切口应力奇性分析 [J]. 计算力学学报, 2023, **40**(2): 264-272.

WANG Jing-ping, JIANG Wei, LI Jun-ping, et al. Stress singularity analysis of plane V-notch in angular non-uniform materials [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2023, **40**(2): 264-272.