第40卷第2期 计算力学学报 Vol. 40, No. 2
2023 年 4 月 Chinese Journal of Computational Mechanics April 2023

DOI:10.7511/jslx20201104002

含时滞的参数不确定主动悬架离散系统鲁棒控制

高小林[1]， 曹青松*[2]

(1.江西科技学院 协同创新中心,南昌 330098;2.江西科技学院 智能工程学院,南昌 330098)

摘 要:针对主动悬架存在传输时滞和参数不确定性的控制问题,设计了含时滞的参数不确定鲁棒控制器。首先,运用线性分式变换方法推导出含时滞的参数不确定主动悬架状态空间方程,采用零阶保持器取值处理和双线性变换,建立主动悬架离散控制系统模型。其次,以车身垂向加速度为车辆悬架系统的最优化输出目标,采用Lyapunov泛函方法,推导出系统渐进稳定的鲁棒控制器充分条件,得到满足最优 H_∞ 性能指标约束的反馈控制律,再通过求解线性矩阵不等式获得控制器参数。最后,进行数值算例仿真,结果表明,相较于只考虑时滞的控制器,含时滞的参数不确定鲁棒控制器具有更好的控制效果和鲁棒性,且受采样周期与不确定参数的耦合影响较小。

关键词:主动悬架;鲁棒控制器;时滞;不确定性;离散系统

中图分类号:U461.4;O231 **文献标志码**:A **文章编号**:1007-4708(2023)02-0166-09

1 引 言

相较于被动悬架,主动悬架由于其作动器能够实时输出可调作动力,可以兼顾操纵稳定性和平顺性[1,2]。主动悬架控制单元直接决定了其性能的优劣,一方面控制单元通过CAN网络实时通信,导致控制系统不可避免地受到传输时滞、数据丢包率和时序错乱等不良影响,同时控制单元中的微机处理器处理的是一定采样周期下的数字信号;另一方面,由于车辆在运行过程中,工况及行驶环境等均随之动态变化,使车辆参数在一定范围内波动,此类参数不确定性对主动悬架的控制系统及控制算法都是不小的挑战[3]。

主动悬架控制策略研究已经引起广泛重视,诸多学者提出及应用了最优控制[4]、滑膜控制[5]、模型预测控制[6]、模糊控制[7]、基于 μ 理论的鲁棒控制[8]以及 H_∞ 控制理论[9]等控制方法。文献[10]对比多种应用于主动悬架的控制方法,发现 H_∞ 控制更具有优势,能够抑制路面激励等外界扰动,保证主动悬架控制系统的动态性能,有效降低悬架的垂向振动。针对带时滞的不确定采样控制系统的鲁棒稳定问题,文献[11]较早将采样系统表示为时变时滞连续系统,进而进行稳定性分析。随后,诸多学者研究了工程实际中此类控制问题,文献[12]针对含有多面体参数不确定性的自主飞艇线性横向系统,采用输入时滞法建立了飞艇横向系统模型。文献[13]针对存在环境扰动的船舶动态定位问题,将船舶动态定位系统转换为时变时滞系统,设计了保证船舶保持理想位置、航向和速度的鲁棒控制器。文献[14]针对基于采样数据的高速列车鲁棒巡航控制调度问题,将采样周期转换为有界时变时滞,把调度问题转化为时变时滞系统稳定性分析问题,给出了保证列车在外界风干扰下的高速巡航鲁棒控制器。在时滞鲁棒控制实验方面,文献[15]对多时滞柔性梁的振动主动控制进行了实验研究。

时滞会导致悬架控制性能变差,甚至会引起系统失稳。部分学者开始关注主动悬架含时滞控制系统的鲁棒稳定性问题,文献[16]以主动悬架为研究对象,利用Lyapunov泛函方法,设计了基于 H_∞ 控制理论的时滞控制器。文献[17]针对含时滞的悬架系统,通过数值仿真和实验相结合的方法验证了设计的鲁棒 H_∞ 控制器的控制效果。同时车辆参数的不确定性也会导致悬架控制系统性能恶化,严重时会影响车辆行车安全。文献[3,18]针对主动悬架系统阻尼和刚度参数不确定带来的控制问题,考虑到悬架多性能目标约束,提出了一种混合 H_2/H_∞ 保性能状态反馈控制器。文献[19]以座椅悬架为研究对象,建立了考虑质量摄动的悬架动力学模型,设计了 H_∞ 输出反馈控制器。但目前悬架控制系统综合考虑时滞和不确定性问题的研究较少,文献[20]提出了一种考虑悬架系统输入时延和

收稿日期:2020-11-04;**修改稿收到日期**:2023-02-18.

基金项目:国家自然科学基金(51765021);江西省科技厅重点研发项目(20181BBE50012);江西省教育厅科学技术研究(GJJ171031;GJJ190992)资助项目.

作者简介:曹青松*(1978-),男,博士,副教授(E-mail:35249259@qq.com).

车身质量参数不确定的广义混合控制器设计方法,但该控制器只考虑了单一参数摄动影响。

综合上述研究背景,针对含时滞的参数不确定主动悬架离散控制系统,以二自由度1/4主动悬架为研究对象,运用线性分式变换方法描述主动悬架参数不确定性问题,并采用零阶保持器取值和双线性变换方法将系统进行离散化处理,由此建立考虑时滞的参数不确定悬架的离散模型。选取车身振动加速度为 H_∞ 范数的优化指标,基于Lyapunov理论设计使控制系统渐进稳定的鲁棒控制器,利用yalmip求解器算出控制器参数,并在给定样车悬架模型上进行算例仿真。

2　控制问题描述

2.1　含时滞的参数不确定1/4主动悬架模型

含时滞主动悬架系统主要由车身、悬架、轮胎及含时滞的反馈控制单元等组成,1/4主动悬架模型如图1所示。

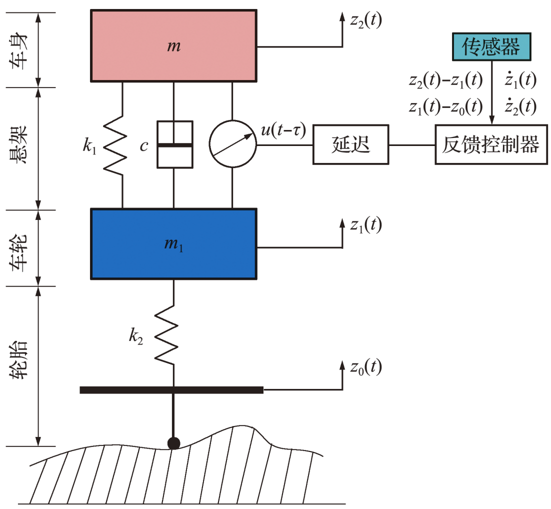

图1　含时滞1/4主动悬架模型

Fig. 1　1/4 active suspension model with time delay

图1中 $z_0(t)$,$z_1(t)$ 和 $z_2(t)$ 分别表示 t 时刻路面、轮胎和车身的垂向位移量,k_1 和 k_2 为悬架弹性元件刚度和轮胎等效刚度,$u(t-\tau)$ 为 t 时刻含时滞量 τ 的作动力,m 和 m_1 分别为车辆悬挂质量和非悬挂质量,c 为悬架阻尼元件等效阻尼。

根据力学模型可以分析出 t 时刻含时滞量 τ 的动力学方程为

$$\begin{cases} m_1\ddot{z}_1(t)=-k_1[z_1(t)-z_2(t)]-c[\dot{z}_1(t)-\dot{z}_2(t)]+ \\ \qquad k_2[z_0(t)-z_1(t)]-u(t-\tau) \\ m\ddot{z}_2(t)=k_1[z_1(t)-z_2(t)]+c[\dot{z}_1(t)-\dot{z}_2(t)]+ \\ \qquad u(t-\tau) \end{cases} \tag{1}$$

主动悬架设计过程中主要考虑的不确定参数有车辆悬挂质量 m、弹性元件刚度 k_1 以及悬架阻尼 c。这三项参数不确定性可以描述为

$$\begin{cases} m=\bar{m}(1+p_m\delta_m) \\ k_1=\bar{k}_1(1+p_k\delta_k) \\ c=\bar{c}(1+p_c\delta_c) \end{cases} \tag{2}$$

式中　$\bar{m}$,$\bar{k}_1$ 和 $\bar{c}$ 分别为不确定参数悬挂质量、弹性元件刚度以及悬架阻尼的名义值;p_m,p_k 和 p_c 分别为不确定参数对应的摄动值;δ_m,δ_k 和 δ_c 分别为三个不确定参数对应的摄动范围。

2.2　状态空间形式的离散系统运动方程

定义系统状态变量为

$$x(t)=[z_2(t)-z_1(t),\dot{z}_2(t),z_1(t)-z_0(t),\dot{z}_1(t)]^{\mathrm{T}}$$

定义输出变量为

$$y(t)=\ddot{z}_2(t)$$

式(2)经过线性分式变换,式(1)写成状态空间方程为

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=(A+\Delta A)x(t)+ \\ \qquad (B+\Delta B)u(t-\tau)+Lw(t) \\ y(t)=Jx(t)+Du(t-\tau) \end{cases} \tag{3}$$

式中　$w(t)=\dot{z}_0(t)$;A,B,J 和 D 均为主动悬架名义系统的参数常数矩阵,具体表达式为

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_1}{m} & -\frac{c}{m} & 0 & \frac{c}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{m_1} & \frac{c}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1} & -\frac{c}{m_1} \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \\ 0 \\ -1/m_1 \end{bmatrix},\ L=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J=\begin{bmatrix} -\frac{k_1}{m} & -\frac{c}{m} & 0 & \frac{c}{m} \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

式中　ΔA 和 ΔB 为悬架系统的参数不确定性,可以写成范数有界形式[21]为

$$[\Delta A\quad \Delta B]=CF(t)[E_1\quad E_2] \tag{4}$$

式中　C,E_1 和 E_2 为适维不确定性的常数矩阵,F(t) 为时变矩阵函数,且满足 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I$。

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_m & -p_c/\bar{m} & -p_k/\bar{m} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_c/m_1 & p_k/m_1 \end{bmatrix}$$

$$E_1=\begin{bmatrix}-\bar{k}_1/\bar{m} & -\bar{c}/\bar{m} & 0 & \bar{c}/\bar{m}\\ 0 & \bar{c} & 0 & -\bar{c}\\ \bar{k}_1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$F(t)=\begin{bmatrix}\delta_m & 0 & 0\\ 0 & \delta_c & 0\\ 0 & 0 & \delta_k\end{bmatrix},\ E_2=0_{3\times 1}$$

系统一个采样周期取 T,考察相邻采样时刻 kT 和 $k(T+1)$,含时滞的悬架作动器作动力 u 采用零阶保持器取值[21],时滞 τ 也经过离散化处理,取采样周期的整数倍 $\tau=d_kT$,同时系统经过双线性变换[22]。因此将式(3)连续状态空间模型转化为如下离散模型

$$\begin{cases}x(k+1)=(G+\Delta G)x(k)+(H+\Delta H)\times\\ \qquad u(k-d_k)+Ww(k)\\ y(k)=Jx(k)+Du(k-d_k)\\ [\Delta G\ \ \Delta H]=\bar{C}F(k)[\bar{E}_1\ \ \bar{E}_2]\end{cases}\tag{5}$$

式中 d_k 为时滞量,取周期的整数倍,且满足 $d_1\leqslant d_k\leqslant d_2$,$d_1$ 和 d_2 分别为时滞的上下限值。

$$G=e^{AT},\ \Delta G=[(G-I)A^{-1}\Delta A(G+I)]/2$$
$$H=(G-I)A^{-1}B$$
$$\Delta H=[(G-I)A^{-1}(2\Delta B+\Delta AH)]/2$$
$$W=(G-I)A^{-1}L,\ \bar{C}=[(G-I)A^{-1}C]/2$$
$$\bar{E}_1=E_1(G+I),\ \bar{E}_2=2E_2+E_1H$$

2.3 反馈控制器设计

设计如下形式的状态反馈控制器

$$u(k-d_k)=Kx(k-d_k)\tag{6}$$

式中 K 为控制系统反馈增益。

令 $\bar{G}=G+\Delta G$,$\bar{H}=H+\Delta H$,则式(5)含时滞和不确定性的主动悬架系统构成如下闭环系统,

$$\begin{cases}x(k+1)=\bar{G}x(k)+\bar{H}Kx(k-d_k)+Ww(k)\\ y(k)=Jx(k)+DKx(k-d_k)\end{cases}\tag{7}$$

主动悬架系统主要考虑乘坐舒适性,即车身振动加速度指标,H_∞ 范数能够描述能量有界扰动到控制输出峰值间的关系。因此,将考虑时滞和参数不确定性的主动悬架离散控制问题描述成设计一个鲁棒控制器,使控制系统(7)满足如下条件指标。

(1) 闭环系统(7)鲁棒渐进稳定。

(2) 在零初始条件下,悬架作动器控制输出和外部路面激励干扰满足 H_∞ 范数 γ 的约束条件为 $\|y(k)\|_2\leqslant\gamma\|w(k)\|_2$,其中 $\|\cdot\|_2$ 为 $L_2[0,\infty)$ 的标准范数,γ 为任意正标量。

3 主要结论与证明

3.1 主动悬架闭环系统稳定性分析

引理1 (Schur 补)对于分块对称矩阵

$$X=\begin{bmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{12}^{\mathrm{T}} & X_{22}\end{bmatrix}$$

式中 X_{11} 为方阵,则以下条件等价,

(1) $X<0$

(2) $X_{11}<0$,且 $X_{22}-X_{12}^{\mathrm{T}}X_{11}^{-1}X_{12}<0$

(3) $X_{22}<0$,且 $X_{11}-X_{12}X_{22}^{-1}X_{12}^{\mathrm{T}}<0$

引理2[24] $\tilde{\Omega}$ 为对称矩阵,适当维数矩阵有 $\hat{C}$,$\hat{E}$ 和 F,且 $\|F\|<1$,则存在 $\tilde{\Omega}+\hat{C}F\hat{E}+\hat{E}^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}\hat{E}^{\mathrm{T}}<0$,使 $\forall\varepsilon>0$,$\tilde{\Omega}+\varepsilon\hat{C}\hat{C}^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}\hat{E}^{\mathrm{T}}\hat{E}<0$ 成立。

本文给出系统(7)的稳定性判据。

定理1 对于存在时变时滞的主动悬架系统,给定反馈增益 K,如果存在正定矩阵 P_1,Q 和 R 以及适维的非奇异矩阵 $P_i(i=2,3)$,任意标量 $\gamma>0$,I 兼容维度的单位矩阵,使本文的 LMI 成立,则闭环系统(7)是稳定的。

$$Q<R\tag{8}$$

$$\Pi=\begin{bmatrix}\Pi_{11} & P_2^{\mathrm{T}}-\bar{G}^{\mathrm{T}}P_3 & -P_2^{\mathrm{T}}\bar{H}K & -P_2^{\mathrm{T}}W & J^{\mathrm{T}}\\ * & P_1+P_3^{\mathrm{T}}+P_3 & -P_3^{\mathrm{T}}\bar{H}K & -P_3^{\mathrm{T}}W & 0\\ * & * & -Q & 0 & K^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}\\ * & * & * & -r^2I & 0\\ * & * & * & * & -I\end{bmatrix}<0\tag{9}$$

$$\Pi_{11}=-P_1-P_2^{\mathrm{T}}\bar{G}-\bar{G}^{\mathrm{T}}P_2+Q+(d_2-d_1)R$$

证明 首先,定义 Lyapunov 泛函:

$$V(\bar{x}_k)=V_1(\bar{x}(k))+V_2(\bar{x}(k))+V_3(\bar{x}(k))$$

式中 $\bar{x}(k)=[x(k),y(k),x(k-d_k),w(k)]^{\mathrm{T}}$

$$V_1(\bar{x}(k))=\bar{x}^{\mathrm{T}}(k)MP\bar{x}(k)$$

$$V_2(\bar{x}(k))=\sum_{l=k-d_k}^{k-1}x^{\mathrm{T}}(l)Qx(l)$$

$$V_3(\bar{x}(k))=\sum_{l=-d_2+2}^{-d_1+1}\ \sum_{m=k+l-1}^{k-1}x^{\mathrm{T}}(m)Rx(m)$$

M 和 P 分别定义为奇异矩阵和非奇异矩阵,其形式为

$$M=\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ P=\begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0\\ P_2 & P_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & I & 0\\ 0 & 0 & 0 & I\end{bmatrix}$$

因此，可得

$$\begin{aligned}\Delta V_1(\bar{x}(k))=&V_1(\bar{x}(k+1))-V_1(\bar{x}(k))=\\ &y^{\mathrm{T}}(k)P_1y(k)-x^{\mathrm{T}}(k)P_1x(k)=\\ &\bar{x}^{\mathrm{T}}(k)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & P_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\bar{x}(k)-\\ &\bar{x}^{\mathrm{T}}(k)P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} x(k)\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{10}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}x(k)\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}I & 0 & 0 & 0\\ \bar{G} & -I & \bar{H}K & W\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\bar{x}(k)\tag{11}$$

将式(11)代入式(10)整理得

$$\Delta V_1(\bar{x}(k))=\bar{x}^{\mathrm{T}}(k)\hat{\Pi}\bar{x}(k)\tag{12}$$

式中

$$\hat{\Pi}=\begin{bmatrix}-P_1-P_2^{\mathrm{T}}\bar{G}-\bar{G}^{\mathrm{T}}P_2 & P_2^{\mathrm{T}}-\bar{G}^{\mathrm{T}}P_3 & -P_2^{\mathrm{T}}\bar{H}K & -P_2^{\mathrm{T}}W\\ * & P_1+P_3^{\mathrm{T}}+P_3 & -P_3^{\mathrm{T}}\bar{H}K & -P_3^{\mathrm{T}}W\\ * & * & 0 & 0\\ * & * & * & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Delta V_2(\bar{x}(k))=&V_2(\bar{x}(k+1))-V_2(\bar{x}(k))=\\ &\sum_{l=k+1-d_{k+1}}^{k}x^{\mathrm{T}}(l)Qx(l)-\sum_{l=k-d_k}^{k-1}x^{\mathrm{T}}(l)Qx(l)=\\ &\sum_{l=k+1-d_{k+1}}^{k-d_l}x^{\mathrm{T}}(l)Qx(l)+\sum_{l=k+1-d_l}^{k-1}x^{\mathrm{T}}(l)Qx(l)+\\ &x^{\mathrm{T}}(k)Qx(k)-\Big[\sum_{l=k+1-d_k}^{k-1}x^{\mathrm{T}}(l)Qx(l)+\\ &x^{\mathrm{T}}(k-d_k)Qx(k-d_k)\Big]\end{aligned}\tag{13}$$

式中　当所有 k 满足 $d_2\geqslant d_k\geqslant d_1$ 时

$$\sum_{l=k+1-d_1}^{k-1}x^{\mathrm{T}}(l)Qx(l)\leqslant\sum_{l=k+1-d_k}^{k-1}x^{\mathrm{T}}(l)Qx(l)\tag{14}$$

$$\sum_{l=k+1-d_{k+1}}^{k-d_1}x(l)^{\mathrm{T}}Qx(l)\leqslant\sum_{l=k+1-d_2}^{k-d_1}x(l)^{\mathrm{T}}Qx(l)\leqslant\sum_{l=k+1-d_2}^{k-d_1}x(l)^{\mathrm{T}}Rx(l)\tag{15}$$

式中　$Q<R$

$$\begin{aligned}\Delta V_3(\bar{x}(k))=&V_3(\bar{x}(k+1))-V_3(\bar{x}(k))=\\ &\sum_{l=-d_2+2}^{-d_1+1}\sum_{m=k+l}^{k}x^{\mathrm{T}}(m)Rx(m)-\\ &\sum_{l=-d_2+2}^{-d_1+1}\sum_{m=k+l-1}^{k-1}x^{\mathrm{T}}(m)Rx(m)=\\ &(d_2-d_1)x(k)^{\mathrm{T}}Rx(k)-\\ &\sum_{l=-d_2+2}^{-d_1+1}x(k+l-1)^{\mathrm{T}}Rx(k+l-1)=\\ &(d_2-d_1)x(k)^{\mathrm{T}}Rx(k)-\\ &\sum_{l=k+1-d_2}^{k-d_1}x(l)^{\mathrm{T}}Rx(l)\end{aligned}\tag{16}$$

在初始条件为零的情况下，$V(\bar{x}_k)|_{k=0}=0$，性能指标 S_{yw} 定义为

$$S_{yw}\triangleq\sum_{k=0}^{\infty}[y^{\mathrm{T}}(k)y(k)-\gamma^2w^{\mathrm{T}}(k)w(k)]$$

对于 $w(k)\in L_2[0,\infty)$，且 $k\geqslant 0$ 时，根据式(12～16)，结合引理1，可使下式成立，

$$\begin{aligned}S_{yw}\leqslant&\sum_{k=0}^{\infty}[y^{\mathrm{T}}(k)y(k)-\gamma^2w^{\mathrm{T}}(k)w(k)+\\ &V(\bar{x}(\infty))-V(\bar{x}(0))]=\\ &\sum_{k=0}^{\infty}[\Delta V(\bar{x}(k))+y^{\mathrm{T}}(k)y(k)-\\ &\gamma^2w^{\mathrm{T}}(k)w(k)]=\bar{x}^{\mathrm{T}}(k)\prod\bar{x}(k)\end{aligned}$$

由式(9)可得

$$S_{yw}\leqslant\bar{x}^{\mathrm{T}}(k)\prod\bar{x}(k)<0$$

由此可知，存在任意标量 $\gamma>0$，对于考虑时滞和参数不确定性的主动悬架系统，在初始条件为零的情况下，满足 H_∞ 性能指标 $\|T_y\|_\infty<\gamma$。因此，满足给定的条件(8,9)时，存在含时滞的主动悬架闭环系统(7)是稳定的。

3.2　系统可镇定分析

对系统可镇定分析的目的是设计可以使闭环系统稳定的状态反馈控制器。

定理2　对于反馈增益控制的时变时滞系统，给定时滞量上下界 d_2 和 d_1，定值正标量 ε。如果存在正定矩阵 $X_1>0$，$U>0$，$V>0$，以及矩阵 X_2，X_3 和 Y，使本文的LMI成立，则闭环系统(8)是稳定的。

$$V<U\tag{17}$$

$$\begin{bmatrix} -X_1 & -X_1G^{\mathrm{T}}+X_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & X_1J^{\mathrm{T}} & X_2^{\mathrm{T}} & X_2^{\mathrm{T}} & X_1^{\mathrm{T}} & X_1^{\mathrm{T}} & 0 & -X_1\bar{E}_1^{\mathrm{T}} \\ * & X_3+X_3^{\mathrm{T}} & -HY & -W & 0 & X_3^{\mathrm{T}} & X_3^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & \varepsilon\bar{C} & 0 \\ * & * & -U & 0 & Y^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Y^{\mathrm{T}}\bar{E}_2^{\mathrm{T}} \\ * & * & * & -r^2I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -X_1 & -X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -U & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -V/(d_2-d_1) & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \tag{18}$$

$$K = YU^{-1} \tag{19}$$

证明 假设存在 X 满足形式

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_2 & X_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$X_1 = P_1^{-1}$，$0 = P_2X_1 + P_3X_2$，$X_3 = P_3^{-1}$

在 LMI(9)两边分别乘以 X^{T} 和 X,则可得

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & -X_1\bar{G}^{\mathrm{T}}+X_2^{\mathrm{T}}P_1X_3+X_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & X_1J^{\mathrm{T}} \\ * & X_3^{\mathrm{T}}P_1X_3+X_3+X_3^{\mathrm{T}} & -\bar{H}K & -W & 0 \\ * & * & -Q & 0 & K^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}} \\ * & * & * & -r^2I & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{20}$$

式中 $\Omega_{11} = -X_1 + X_1^{\mathrm{T}}QX_1 + (d_2-d_1)X_1^{\mathrm{T}}RX_1 + X_2^{\mathrm{T}}P_1X_2$

将式(20)整理得

$$\begin{bmatrix} \bar{\Omega}_{11} & -X_1\bar{G}^{\mathrm{T}}+X_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & X_1J^{\mathrm{T}} \\ * & X_3+X_3^{\mathrm{T}} & -\bar{H}K & -W & 0 \\ * & * & -Q & 0 & K^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}} \\ * & * & * & -r^2I & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_2^{\mathrm{T}} \\ X_3^{\mathrm{T}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times P_1[\,X_2 \quad X_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0\,] < 0 \tag{21}$$

式中 $\bar{\Omega}_{11} = -X_1 + X_1^{\mathrm{T}}QX_1 + (d_2-d_1)X_1^{\mathrm{T}}RX_1$

结合引理 1,式(21)整理可得

$$\begin{bmatrix} -X_1 & -X_1\bar{G}^{\mathrm{T}}+X_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & X_1J^{\mathrm{T}} & X_2^{\mathrm{T}} & X_1^{\mathrm{T}} & X_1^{\mathrm{T}} \\ * & X_3+X_3^{\mathrm{T}} & -\bar{H}K & -W & 0 & X_3^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ * & * & -Q & 0 & K^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -r^2I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -X_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -Q^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -R^{-1}/(d_2-d_1) \end{bmatrix} < 0 \tag{22}$$

为了处理主动悬架控制系统中的不确定参数摄动矩阵,结合式(5)将式(22)整理为

$$\tilde{\Omega} + \hat{C}F\hat{E} + \hat{E}^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}\hat{C}^{\mathrm{T}} < 0 \tag{23}$$

式中

$$\tilde{\Omega} = \begin{bmatrix} -X_1 & -X_1G^{\mathrm{T}}+X_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & X_1J^{\mathrm{T}} & X_2^{\mathrm{T}} & X_1^{\mathrm{T}} & X_1^{\mathrm{T}} \\ * & X_3+X_3^{\mathrm{T}} & -HK & -W & 0 & X_3^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ * & * & -Q & 0 & K^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -r^2I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -X_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -Q^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -R^{-1}/(d_2-d_1) \end{bmatrix}$$

$\hat{C} = [0 \quad \bar{C}^{\mathrm{T}} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$

$\hat{E} = [-\bar{E}_1X_1 \quad 0 \quad -\bar{E}_2K \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$

结合引理 1 和引理 2,式(23)可以整理为

$$\tilde{\Omega}+\varepsilon\hat{C}\hat{C}^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}\hat{E}^{\mathrm{T}}\hat{E}<0$$

$$\begin{bmatrix}\tilde{\Omega} & \varepsilon\hat{C} & \hat{E}^{\mathrm{T}}\\ * & -\varepsilon I & 0\\ * & * & -\varepsilon I\end{bmatrix}<0 \tag{24}$$

需要通过参数化将式(24)的非线性项进行如下处理。

假设存在 $\bar{X}=\mathrm{diag}\{I,I,Q^{-1},I,I,I,I,I,I,I\}$

在式(24)的矩阵左右两边分别乘以 $\bar{X}^{\mathrm{T}}$ 和 $\bar{X}$ 后可得

$$\begin{bmatrix}
-X_1 & -X_1G^{\mathrm{T}}+X_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & X_1J^{\mathrm{T}} & X_2^{\mathrm{T}} & X_1^{\mathrm{T}} & X_1^{\mathrm{T}} & 0 & -X_1\bar{E}_1^{\mathrm{T}}\\
* & X_3+X_3^{\mathrm{T}} & -HKQ^{-1} & -W & 0 & X_3^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & \varepsilon\bar{C} & 0\\
* & * & -Q^{-1} & 0 & Q^{-1}K^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q^{-1}K^{\mathrm{T}}\bar{E}_2^{\mathrm{T}}\\
* & * & * & -r^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & -X_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & -Q^{-1} & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & -\dfrac{R^{-1}}{d_2-d_1} & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon I & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon I
\end{bmatrix}<0$$

指定 $U=Q^{-1}$，$V=R^{-1}$，$Y=KU$，即得条件(18)，定理2得以证明。

4　实例仿真

采用某车辆悬架的基本参数列入表1。

表1　算例模型参数

Tab.1　Parameters of example model

序号	模型参数	数值
1	悬挂名义质量 $\bar{m}$/kg	370
2	非悬架质量 m_1/kg	43
3	弹簧名义刚度 $\bar{k}_1$/kN·m^{-1}	20
4	轮胎等效刚度 k_2/kN·m^{-1}	220
5	等效名义阻尼系数 $\bar{c}$	1517

根据定理2，给定时滞上限和下限，利用Matlab的Yalmip工具箱求解线性矩阵不等式(17～19)，可得到保证主动悬架系统稳定的控制反馈增益 K，并将此控制器定为控制器II。

另外，为了分析设计控制器的控制效果，文中增加两种控制系统：一个是考虑开环控制，即被动悬架；另一个是只考虑时滞的主动悬架控制系统，定为控制器I。

4.1　控制器控制效果

悬架控制系统采样周期 $T=0.02$ s，时滞限值 $d_1=0$ 和 $d_2=12$，系统时滞量 $\tau=0.08$ s(即 $d_k=4$)采用设计的Lyapunov稳定条件能求解出控制器II对应的最小鲁棒性能指标 $\gamma_{\min}=2.9$，路面激励采用阶跃信号和白噪声分别模拟凹坑路面和随机路面，其中随机路面采用行驶车速为30 km/h的B级路面。三种悬架系统的控制效果如图2所示。

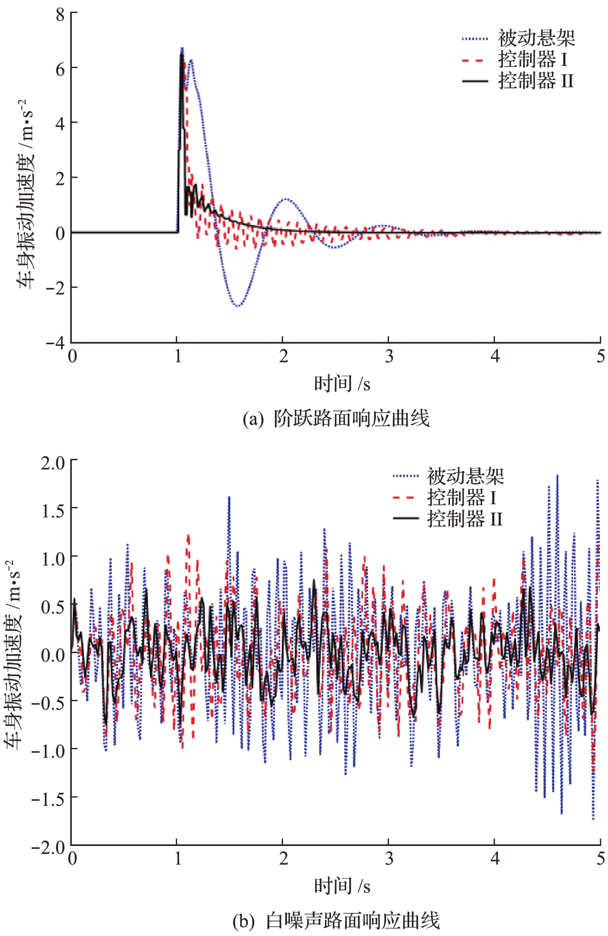

图2　不同悬架系统控制效果

Fig.2　Control effects of different suspension systems

从图2(a)可以看出，当汽车行驶在凹坑路面时，被动悬架减振缓冲效果和收敛效果最差，采用仅考虑时滞的控制器I车身振动加速度指标较控制器II大，且其收敛速度也较慢，含时滞的参数不

确定控制器(即控制器 II)控制效果最好。

从图 2(b)可以看出,当汽车行驶在随机白噪声路面上时,系统采用本文提出的控制器 II 时,主动悬架系统的控制效果最好。

4.2　参数不确定性影响

为了对比分析不同采样周期下,提出的控制器对悬架不确定参数的鲁棒性,控制系统分别取采样周期 $T=0.01$ s,0.02 s 和 0.04s,时滞限值 $d_1=0$,$d_2=12$,时滞量 $\tau=0.08$s 。路面激励采用 B 级随机白噪声路面,行驶车速为 30 km/h,仿真时间为 5 s 。悬架参数 m,k_1 和 c 各取±20%的不确定性,仿真结果列入表 2。

表 2　不同采样周期下考虑参数不确定性的车身振动加速度均方根值(单位:m/s^2)

Fig.2　RMS of vibration acceleration under different sampling period considering parameter uncertainty (unit:m/s^2)

周期 T/s	悬架类型	−20% m	−20% k_1	−20% c	+20% m	+20% k_1	+20% c
0.01	被动悬架	0.6524	0.6454	0.6785	0.9625	0.8125	0.7352
	控制器 I	0.4041	0.3942	0.4152	0.5411	0.4687	0.4424
	控制器 II	0.2414	0.2544	0.2854	0.2762	0.2798	0.2952
0.02	被动悬架	0.9652	0.9521	0.9658	1.285	0.1121	1.0012
	控制器 I	0.5652	0.5585	0.5384	0.7324	0.6703	0.5725
	控制器 II	0.3145	0.3245	0.3285	0.3692	0.3573	0.3384
0.04	被动悬架	1.185	1.125	1.174	1.585	1.189	1.132
	控制器 I	0.6821	0.6812	0.6755	0.9189	0.8221	0.7334
	控制器 II	0.4252	0.4320	0.4274	0.4925	0.482	0.4371

由表 2 可知,在固定的采样周期下,$T=0.01$ s 时,(1) 悬挂质量 m 不确定性从−20%～+20%时,被动悬架、控制器 I 和控制器 II 三种悬架类型的车身振动加速度性能指标分别增加了 47.5%,34.0%和 14.4%,说明在采样周期一定下,采用控制器 II 的悬架系统的车身振动加速度指标增量最小,对不确定参数 m 变化的敏感度最小。(2) 弹性元件刚度 k_1 不确定性从−20%～+20%时,被动悬架、控制器 I 和控制器 II 三种悬架类型的车身振动加速度性能指标分别增加了 25.9%,18.9%和 9.98%,说明在采样周期一定下,采用控制器 II 的悬架系统的车身振动加速度指标增量最小,对不确定参数 k_1 变化的敏感度最小。(3) 阻尼系数 c 不确定性从−20%～+20%时,被动悬架、控制器 I 和控制器 II 三种悬架类型的车身振动加速度性能指标变化均不大,说明系统对悬架阻尼 c 敏感程度低。系统采用固定采样周期 $T=0.02$ s 和 $T=0.04$ s时,控制系统具有相似的规律。综上可以看出,主动悬架控制系统对不确定参数 m 的变化最为敏感,对不确定参数 c 敏感程度最低;控制器 II 对不确定参数变化的敏感度最小,表明设计的控制器对具有不确定性的悬架系统具有更好的鲁棒性。

采样周期不同时,即 $T=0.01$ s,0.02 s 和 0.04 s下,(1) 悬挂质量 m 不确定性从−20%～+20%时,系统采用控制器 II 后的性能指标分别增加了 14.4%,17.4%和 15.8%。(2) 弹性元件刚度 k_1 不确定性从−20%～+20%时,系统采用控制器 II 后的性能指标分别增加了 9.98%,10.1%和11.6%。(3) 阻尼系数 c 不确定性从−20%～+20%时,系统采用控制器 II 后的性能指标分别增加了 3.43%,3.01%和 2.26%。说明采样周期不同,不确定参数对控制系统的影响程度变化不大。

5　结　论

本文针对含时滞不确定参数的主动悬架系统,提出了一种鲁棒控制器。采用 Lyapunov 稳定性判据推导出考虑时滞和不确定参数的主动悬架系统渐进稳定性判据,并将控制器设计问题转化为求解线性矩阵不等式问题。

研究结果表明,提出的控制器具有更好的控制效果,且对含时滞和参数不确定主动悬架系统具有良好的鲁棒性能。针对离散主动悬架系统,采样周期与不确定参数的耦合影响较小。

参考文献(References):

[1] Wang G, Chen C Z, Yu S B. Robust non-fragile finite-frequency H_∞ static output feedback control for active suspension systems[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2017, **91**: 41-56.

[2] 杨　超,李以农,郑　玲,等. 基于多目标粒子群算法的电磁主动悬架作动器优化[J]. 机械工程学报, 2019, **55**(19): 154-166. (YANG Chao, LI Yi-nong, ZHENG Ling, et al. Optimum of electromagnetic active suspension actuator using multi-objective particle swarm optimization algorithm[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2019, **55**(19): 154-166. (in Chinese))

[3] 庞　辉,王　延,刘　凡. 考虑参数不确定性的主动悬架 H_2/H_∞ 保性能控制[J]. 控制与决策, 2019, **34**(3): 470-478. (PANG Hui, WANG Yan, LIU Fan. H_2/H_∞ guaranteed cost control for active suspensions considering parameter uncertainty[J]. *Control and Decision*, 2019, **34**(3): 470-478. (in Chinese))

[4] 汪若尘，谢　健，叶　青，等.直线电机式主动悬架建模与试验研究[J].汽车工程，2016，**38**(4)：495-499.(WANG Ruo-chen，XIE Jian，YE Qing，et al. Modeling and experimental study of active suspension with linear motor[J]. *Automotive Engineering*，2016，**38**(4)：495-499.(in Chinese))

[5] 秦　武，康英姿，上官文斌，等.基于天棚模型和扰动观测器的主动悬架滑模控制研究[J].华南理工大学学报(自然科学版)，2020，**48**(6)：16-24，33.(QIN Wu，KANG Ying-zi，SHANGGUAN Wen-bin，et al. Study on sliding mode control with disturbance observer integrating skyhook model for active suspension systems[J]. *Journal of South China University of Technology*(*Natural Science Edition*)，2020，**48**(6)：16-24，33.(in Chinese))

[6] Van Der Sande T P J，Besselink I J M，Nijmeijer H. Rule-based control of a semi-active suspension for minimal sprung mass acceleration：Design and measurement[J]. *Vehicle System Dynamics*，2016，**54**(3)：281-300.

[7] 陈　龙，马　瑞，王寿静，等.车辆半主动悬架阻尼多模式切换控制研究[J].振动与冲击，2020，**39**(13)：148-155.(CHEN Long，MA Rui，WANG Shou-jing，et al. Damping multi-mode switching control for a vehicle semi-active suspension[J]. *Journal of Vibration and Shock*，2020，**39**(13)：148-155.(in Chinese))

[8] 周　兵，吴晓建，文桂林，等.基于μ综合的整车主动悬架鲁棒控制研究[J].振动工程学报，2017，**30**(6)：1029-1037.(ZHOU Bing，WU Xiao-jian，WEN Gui-lin，et al. Robust control research for full-car active suspension based on the μ synthesis algorithm[J]. *Journal of Vibration on Engineering*，2017，**30**(6)：1029-1037.(in Chinese))

[9] 李武杰，陈从根，郭立新.基于微分几何法的主动悬架鲁棒H_∞控制[J].东北大学学报(自然科学版)，2019，**40**(5)：716-721.(LI Wu-jie，CHEN Cong-gen，GUO Li-xin. Robust H_∞ control of active suspension based on differential geometry[J]. *Journal of Northeastern University*(*Natural Science*)，2019，**40**(5)：716-721.(in Chinese))

[10] Ghasemalizadeh O. Analysis and Development of Control Methodologies for Semi-Active Suspension[D]. Virginia Polytechnic Institute and State University，2016.

[11] Fridman E，Seuret A，Richard J P. Robust sampled-data stabilization of linear systems：An input delay approach[J]. *Automatica*，2004，**40**(8)：1441-1446.

[12] Wang Y Y，Wang Q B，Zhou P F，et al. Robust H_∞ directional control for a sampled-data autonomous airship[J]. *Journal of Central South University*，2014，**21**(4)：1339-1346.

[13] Zheng M，Zhou Y，Yang S，et al. Robust H_∞ control for sampled-data dynamic positioning ships[J]. *Control Engineering and Applied Informatics*，2017，**19**(4)：84-92.

[14] Li S K，Yang L X，Li K P，et al. Robust sampled-data cruise control scheduling of high speed train[J]. *Transportation Research Part C：Emerging Technologies*，2014，**46**：274-283.

[15] Chen L X，Cai G P. Active control experiment study of a flexible beam with multiple time delays[J]. *The International Journal of Acoustics and Vibration*，2015，**20**(4)：195-206.

[16] 李佩琳，方明霞.轮毂驱动电动汽车主动悬架的时滞控制[J].噪声与振动控制，2020，**40**(4)：137-141，182.(LI Pei-lin，FANG Ming-xia. Time-delay H_∞ control for active suspension system of wheel-driven electric vehicles[J]. *Noise and Vibration Control*，2020，**40**(4)：137-141，182.(in Chinese))

[17] 纪仁杰，方明霞，李佩琳，等.含时滞悬架系统H_∞控制的理论与实验研究[J].汽车工程，2020，**42**(3)：339-344，352.(JI Ren-jie，FANG Ming-xia，LI Pei-lin，et al. Theoretical and experimental research on H_∞ control suspension system with time delay[J]. *Automotive Engineering*，2020，**42**(3)：339-344，352.(in Chinese))

[18] 张丽萍，弓栋梁.时域硬约束下汽车主动悬架H_2/H_∞保性能控制[J].计算机仿真，2017，**34**(8)：190-196.(ZHANG Li-ping，GONG Dong-liang. H_2/H_∞ guaranteed cost control of vehicle active suspension under time-domain hard constraints[J]. *Computer Simulation*，2017，**34**(8)：190-196.(in Chinese))

[19] 张志勇，刘　鑫，黄彩霞，等.具有参数不确定性的车辆座椅悬架H_∞输出反馈半主动控制[J].振动与冲击，2013，32(14)：93-97，147.(ZHANG Zhi-yong，LIU Xin，HUANG Cai-xia，et al. H_∞ output feedback semi-active control for a vehicle seat suspension with parametric uncertainty[J]. *Journal of Vibration and Shock*，2013，**32**(14)：93-97，147.(in Chinese))

[20] 梁　青，陈文源，彭　程，等.具有时延的参数不确定主动悬架广义H_2/H_∞控制[J].信息与控制，2010，**39**(3)：284-290.(LIANG Qing，CHEN Wen-yuan，PENG Cheng，et al. Generalized H_2/H_∞ control for active suspensions with time-delay and parameter uncertainty[J]. *Information and Control*，2010，**39**(3)：284-290.(in Chinese))

[21] 高小林，曹青松.考虑控制时滞的主动悬架离散系统最优控制[J].噪声与振动控制，2018，**38**(S1)：326-

329.(GAO Xiao-lin,CAO Qing-song. Optimal control of active suspension discrete systems with control delay[J]. *Noise and Vibration Control*,2018,38(S1):326-329.(in Chinese))

[22] 徐 飞,刘明雍,李闻白,等.参数不确定性系统的鲁棒控制器数字化再设计研究[J].系统工程与电子技术,2013,**35**(1):156-160.(XU Fei,LIU Ming-yong,LI Wen-bai,et al. Research on digital redesign of the robust controller for parametric uncertain systems [J]. *Systems Engineering and Electronics*,,2013,**35**(1):156-160.(in Chinese))

[23] Xie L H. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty[J]. *International Journal of Control*,1996,**63**(4):741-750.

Robust control for discrete active suspension with time delay and parameter uncertainty

GAO Xiao-lin[1], CAO Qing-song[*2]

(1. Center of Collaboration and Innovation,Jiangxi University of Technology,Nanchang 330098,China;
2. School of Intelligent Engineering,Jiangxi University of Technology,Nanchang 330098,China)

Abstract:In order to solve the control problem of transmission delay and parameter uncertainty in active suspension,a parameter uncertain robust controller with delay was designed. Firstly, the state space equation of the uncertain active suspension with delay was derived by using linear fractional transformation method,and the discrete system model of active suspension system was established by using zero-order retainer value processing and bilinear transformation. Secondly,the vertical acceleration was taken as the optimal output target of the vehicle suspension system,and the Lyapunov functional method was adopted to derive sufficient conditions for the robust controller to make the system asymptotically stable, and the feedback control law satisfying the optimal H_∞ performance index constraint was obtained. Then the controller parameters were obtained by solving linear matrix inequality. Finally,numerical simulation results show that compared with the controller with time delay only,the parametric uncertain robust controller with time delay has better control performance(including robustness),and is less affected by the coupling between sampling period and uncertain parameters.

Key words:active suspension;robust controller;time delay;uncertainty;discrete system

引用本文/Cite this paper:
高小林,曹青松.含时滞的参数不确定主动悬架离散系统鲁棒控制[J].计算力学学报,2023,**40**(2):166-174.
GAO Xiao-lin,CAO Qing-song. Robust control for discrete active suspension with time delay and parameter uncertainty[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*,2023,**40**(2):166-174.