第40卷第1期 计 算 力 学 学 报 Vol. 40, No. 1
2023 年 2 月 Chinese Journal of Computational Mechanics February 2023

DOI:10.7511/jslx20220508003

基于新型广义位移的箱形梁扭转单元及应用

梁永永, 张元海*

(兰州交通大学 土木工程学院, 兰州 730070)

摘 要:为了改进变截面连续箱梁桥的扭转分析理论,将截面总扭转角分解为自由翘曲扭转角和约束剪切扭转角,选取自由翘曲转角扭率作为广义位移,提出一个2节点8自由度的扭转梁段单元。从约束扭转控制微分方程出发,推导单元刚度矩阵及等效节点荷载列阵。引入应力增大系数,以反映约束扭转对初等梁应力的增大效应。数值算例验证了本文梁段单元的可靠性。最后对一个三跨变截面连续箱梁桥进行分析,结果表明,双力矩影响线与弯矩影响线较为类似,按双力矩影响线进行最不利荷载加载时最大应力值偏小;应力增大系数在集中荷载作用截面出现极值,均发生在腹板与顶板交点处;利用偏载放大系数来考虑扭转附加效应时,不宜考虑弯曲正应力较小及翘曲正应力出现极值的梁段区域。

关键词:箱梁桥;约束扭转;梁段单元;自由翘曲扭转角;应力增大系数

中图分类号:U448.21^{+}3;O302 **文献标志码**:A **文章编号**:1007-4708(2023)01-0119-07

1 引 言

箱梁桥因其良好的受力性能广泛应用于桥梁工程。由于支座和外部荷载的影响,箱梁往往发生约束扭转变形。乌氏第二理论是应用较多的针对闭口薄壁箱梁约束扭转的分析理论[1-8],其可直接对一些简单结构的桥型进行分析,然而变截面连续箱梁桥的扭转效应则必须通过结构有限元方法才能计算[9-13]。近年来,关于箱梁桥扭转的文献已陆续发表。胡毓仁等[14]基于最小势能原理,通过选取多项式形函数,开发出一种适用于任意截面形式的薄壁杆件扭转单元刚度矩阵。尉浩浩等[15]应用Fortran语言编制了用于分析活载作用下变截面连续箱梁桥约束扭转效应的梁段程序,并引入应力放大系数,以此来阐述约束扭转对初等梁应力的放大效应。结果表明,弯曲正应力较大的区域更适合作为控制截面来计算应力放大系数。马俊军等[16]利用ANSYS板壳单元建立了能准确模拟边界条件的有限元模型,研究了结构参数变化对箱形梁扭转效应的影响。Qi等[17]选取自由翘曲扭转角的一阶导数作为广义翘曲位移,提出一种可以考虑剪切变形和截面翘曲的新型扭转单元,优点是其刚度矩阵的推导不涉及传统插值函数的假设,并且略过了繁琐的有限元方法的推导,但该单元未涉及带悬臂板箱梁的分析。实际工程中,常采用偏载放大系数1.15来考虑箱梁扭转造成的附加效应,但目前箱梁桥桥宽和行车道数目较以往增加,对部分箱梁桥而言该系数已不适用。综上所述,现已报道的与箱梁桥约束扭转分析有关的文献多以乌氏第二理论为基础,然而乌氏第二理论所选的纵向翘曲位移函数没有明确的物理意义,不便于工程技术人员理解。此外,已有文献几乎没有考虑圣维南扭矩的影响。因此,对带悬臂板箱梁桥的约束扭转分析理论还需进一步研究。

本文将横截面总扭转角分解为自由翘曲扭转角和约束剪切扭转角,基于自由翘曲转角扭率这一新型广义位移,提出一种2节点8自由度的梁段单元,并结合数值算例,详细分析变截面连续箱梁桥约束扭转效应对初等梁应力的影响规律。

2 新型广义位移及箱梁扭转内力

将截面总扭转角 θ 分为自由翘曲扭转角 θ_F 和约束剪切扭转角 θ_R,即 $\theta(z)=\theta_F(z)+\theta_R(z)$,其中 z 轴为过截面扭转中心的纵轴。自由翘曲扭转角相当于截面自由扭转时的扭转角,其产生全部翘曲和相应的剪切变形。约束剪切扭转角只产生相应的剪切变形。

总剪应变 γ 可表示为

$$\gamma=\partial u/\partial s+\partial v/\partial z=\gamma_F+\gamma_R=\theta'_F(\Psi/t)+\theta'_R\rho_s \quad (1)$$

式中 u 和 v 分别为各点的纵向翘曲位移及切向位移,s 坐标为横截面的曲线坐标,γ_F 和 γ_R 分别为自

收稿日期:2022-05-08;**修改稿收到日期**:2022-07-21.
基金项目:国家自然科学基金(51968040)资助项目.
作者简介:张元海*(1965-),男,博士,教授,博士生导师
(E-mail:zyh17012@163.com).

由翘曲扭转角和约束剪切扭转角相应的剪应变，$\Psi=\Omega/\oint(\mathrm{d}s/t)$，其中 Ω 为闭合箱室壁厚中心线围成面积的 2 倍，t 为箱梁壁厚，ρ_s 为扭转中心到横截面一点切线的垂直距离。

求得截面纵向翘曲位移函数为

$$u(z,s)=u_0(z,0)-\theta'_{\mathrm{F}}(z)\bar{\omega}(s) \tag{2}$$

式中 u_0 为起始点纵向位移值，$\bar{\omega}$ 为广义主扇性坐标。

截面双力矩 B 及翘曲正应力 σ_ω 为

$$B=-EI_\omega\theta''_{\mathrm{F}},\ \sigma_\omega=(B/I_\omega)\bar{\omega} \tag{3,4}$$

式中 E 为弹性模量，I_ω 为箱梁全截面的广义主扇形惯性矩。

截面总扭矩由自由翘曲扭转角 θ_{F} 相应的圣维南扭矩 M_k、Bredt 扭矩 M_{B} 和约束剪切扭转角 θ_{R} 相应的翘曲扭矩 M_ω、二次扭矩 M_s 构成，各扭矩表达式分别为

$$\begin{cases}M_k=GI_k\theta'_{\mathrm{F}}\\ M_{\mathrm{B}}=GI_{\mathrm{B}}\theta'_{\mathrm{F}}\\ M_\omega=-EI_\omega\theta'''_{\mathrm{F}}\\ M_s=GI_{\mathrm{B}}\theta'_{\mathrm{R}}\end{cases} \tag{5}$$

式中 G 为剪切模量，I_k 为箱梁全截面的圣维南抗扭惯性矩，I_{B} 为 Bredt 抗扭惯性矩。

3 约束扭转控制微分方程及初参数解

建立关于自由翘曲扭转角 θ_{F} 的微分方程为

$$\theta''''_{\mathrm{F}}-k^2\theta''_{\mathrm{F}}=(\mu/EI_\omega)m \tag{6}$$

式中 m 为分布扭矩的荷载集度，以其力矢指向箱梁 z 轴正方向为正，μ 为翘曲系数，$k=\sqrt{GI_t/EI_\omega}$，其中，$I_t=I_k+(I_{\mathrm{B}}/I_\rho)(\mu I_\rho-I_k)$，$I_\rho$ 为箱梁全截面的极惯性矩。

自由翘曲扭转角 θ_{F} 和总扭转角 θ 的关系为

$$\theta'=[1/(GI_\rho)][T+G(\mu I_\rho-I_k)\theta'_{\mathrm{F}}] \tag{7}$$

式中 T 为截面总扭矩。

当 $z=0$ 时，箱梁起始端的初参数为 θ_0，$\theta'_{\mathrm{F}0}$，B_0 及 T_0，解得任意截面的状态向量为

$$\left\{\theta\quad\theta'_{\mathrm{F}}\quad\frac{B}{GI_t}\quad\frac{T}{GI_t}\right\}^{\mathrm{T}}=$$

$$\begin{bmatrix}1 & \dfrac{C_1}{k}\sinh kz & C_1(1-\cosh kz) & C_2\\ 0 & \cosh kz & -k\sinh kz & \mu(1-\cosh kz)\\ 0 & -\dfrac{1}{k}\sinh kz & \cosh kz & \dfrac{\mu}{k}\sinh kz\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\times$$

$$\begin{Bmatrix}\theta_0\\ \theta'_{\mathrm{F}0}\\ B_0/(GI_t)\\ T_0/(GI_t)\end{Bmatrix} \tag{8}$$

式中 $C_1=\mu-\dfrac{I_k}{I_\rho}$，$C_2=\dfrac{I_k}{I_\rho}z+C_1\left(z-\dfrac{\mu}{k}\sinh kz\right)$。

当跨长为 l 的箱梁受满跨均布扭矩荷载 m 作用时，截面的状态向量只需在式(8)的基础上补充

$$\begin{Bmatrix}-\dfrac{m\mu}{GI_t}\left[\dfrac{1}{2}z^2+\dfrac{C_1}{k^2}(1-\cosh kz)\right]\\ \dfrac{m\mu}{GI_tk}(\sinh kz-kz)\\ \dfrac{m\mu}{GI_tk^2}(1-\cos kz)\\ -mz\end{Bmatrix} \tag{9}$$

确定各初参数的边界条件为

自由端　$B=0$，$T=0$

简支端　$\theta=0$，$\theta''_{\mathrm{F}}=0$

固定端　$\theta=0$，$\theta'_{\mathrm{F}}=0$

4 单元刚度矩阵及等效节点荷载

在初等梁单元的基础上，增加相应于扭转部分的自由度即为本文梁单元。梁段单元如图 1 所示。选取箱梁截面总扭转角 θ 和自由翘曲转角扭率 θ'_{F} 作为扭转部分自由度，即将节点位移列阵表示为

$$\boldsymbol{\delta}=[w_i\quad\varphi_i\quad\theta_i\quad\theta'_{\mathrm{F}i}\quad w_j\quad\varphi_j\quad\theta_j\quad\theta'_{\mathrm{F}j}]^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

式中 w 和 φ 为箱梁弯曲产生的挠度和转角。

选取箱梁截面总扭矩 T 和广义双力矩 $\bar{B}$ 作为扭转部分的节点荷载，即将节点荷载列阵表示为

$$\mathbf{F}=[Q_i\quad M_i\quad T_i\quad \bar{B}_i\quad Q_j\quad M_j\quad T_j\quad \bar{B}_j]^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

式中 Q 和 M 为箱梁弯曲产生的剪力和弯矩，$\bar{B}=BC_1/\mu$。

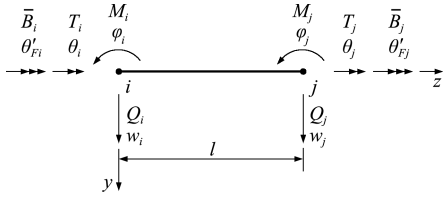


图 1 箱梁单元

Fig. 1 Box girder element

根据结构有限元分析理论[18]，建立单元平衡方程为

$$\mathbf{F}=\mathbf{K}\boldsymbol{\delta} \tag{12}$$

式中 $\mathbf{K}$ 为一个 8 行 8 列的单元刚度矩阵。

与初等梁单元相应的刚度矩阵及等效节点荷载列阵的元素推导可参考文献[18]，本文不再赘述。

记 $z=0$ 为 i 端，$z=l$ 为 j 端，根据刚度系数的定义，令 $\theta_i=1$，$\theta'_{\mathrm{F}i}=\theta_j=\theta'_{\mathrm{F}j}=0$，当 $z=l$ 时，代入式(8)，可得

$$\begin{cases} 0=1+\dfrac{B_0}{GI_t}C_1(1-\cosh kl)+\dfrac{T_0}{GI_t}\overline{C}_2 \\ 0=-k\dfrac{B_0}{GI_t}\sinh kl+\mu\dfrac{T_0}{GI_t}(1-\cosh kl) \\ B_l=B_0\cosh kl+\dfrac{\mu}{k}T_0\sinh kl \\ T_l=T_0 \end{cases} \tag{13}$$

式中 $\overline{C}_2=\dfrac{I_k}{I_\rho}l+C_1\left(l-\dfrac{\mu}{k}\sinh kl\right)$。

联立解得

$$\begin{cases} B_l=-B_0=D\mu(1-\cosh kl) \\ T_l=T_0=-Dk\sinh kl \end{cases} \tag{14}$$

式中 $D=\dfrac{GI_t}{C_1\mu(1-\cosh kl)^2+\overline{C}_2 k\sinh kl}$。

由刚度矩阵各元素的物理意义及内力与节点力的方向关系可知，$-T_0$，$-B_0C_1/\mu$，T_l 和 B_lC_1/μ 依次为单元刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 的元素 k_{33}，k_{43}，k_{73} 和 k_{83}。同理求出该 2 节点 8 自由度单元的刚度矩阵中与扭转位移自由度相应的各上三角元素为

$$\begin{cases} k_{33}=k_{77}=-k_{37}=Dk\sinh kl \\ k_{34}=k_{38}=-k_{47}=-k_{78}=DC_1(1-\cosh kl) \\ k_{44}=k_{88}=D[(C_1/\mu)\overline{C}_2\cosh kl-(C_1^2/k)\sinh kl(1-\cosh kl)] \\ k_{48}=-DC_1\overline{C}_2/\mu \end{cases} \tag{15}$$

由于应用梁段有限元法分析变截面箱梁桥时，要求荷载只施加在节点位置处，显然这与实际不符，因此需将跨间荷载等效到节点。

当箱梁单元受到均布扭矩荷载作用时，根据对称性可得

$$T_0=-T_l=\frac{1}{2}ml \tag{16}$$

根据边界条件，有

$z=0$ 时，$\theta_0=0$，$\theta'_{F0}=0$

$z=l$ 时，$\theta_l=0$，$\theta'_{Fl}=0$

代入式(8,9)，解得

$$\overline{B}_0=\overline{B}_l=\frac{mC_1}{2k\sinh kl}\left(\frac{2}{k}\sinh kl-l\cosh kl-l\right) \tag{17}$$

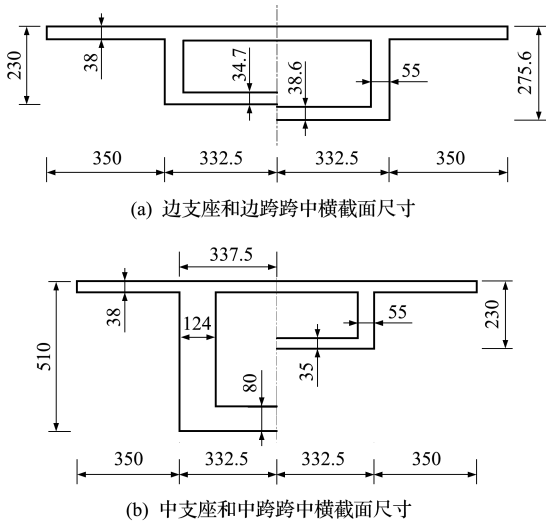
由上述所求内力与节点荷载的方向关系，得到该单元相应于扭转位移自由度的等效节点荷载列阵 $\mathbf{P}_q^f$ 为

$$\mathbf{P}_q^f=[0\quad 0\quad T_0\quad \overline{B}_0\quad 0\quad 0\quad -T_l\quad -\overline{B}_l]^{\mathrm{T}} \tag{18}$$

5　数值算例

算例 1　为验证本文扭转梁段单元的正确性，根据上述推导的单元刚度矩阵和等效节点荷载列阵，利用 Fortran 语言编写箱梁桥约束扭转分析程序。应用该程序计算文献[2]中第 78 页算例，即一带有悬臂板的预应力混凝土连续箱梁在其中一跨跨中受到 997.5 kN·m 的集中扭矩荷载作用，为使得计算条件一致，采用文献[2]的扭转几何特性值，计算该箱梁桥沿梁轴的内力。将计算结果与文献[2]中 84 页的算例结果进行对比可知，本文自编程序计算出的内力值与引用算例所给值完全一致，验证了所提梁段单元的正确性。当本文理论考虑圣维南扭矩时，由于圣维南抗扭惯性矩的影响，使得总截面抗扭刚度增大，得到荷载作用截面翘曲应力值比文献所得应力值减小了 0.83%，符合力学特性，说明本文理论具有更高的精确性。

算例 2　三跨预应力混凝土连续箱梁桥团结河大桥横截面尺寸如图 2 所示，主桥立面如图 3 所示，该桥跨径布置为 52 m+90 m+52 m，其中箱梁底板顶面和底面以不同抛物线的形式分布(顶面 $y=2.176(x^2/39.25)+2.02$(m)，其中 x 为截面横轴；底面 $y=2.8(x^2/40)+2.3$(m))。桥梁为双线设计，每幅桥桥面总宽为 13.65 m，两边各设置 0.5 m 的护栏，桥净宽 12.65 m。弹性模量和剪切模量分别为 34 GPa 和 14.45 GPa，车道荷载为公路Ⅰ级。对箱梁桥各控制截面(边跨跨中、中间支座和中跨跨中)按弯矩影响线图 4 进行最不利荷载布置，各工况效应依次为，(1) 中跨跨中正弯矩出现最大值；(2) 中间支座负弯矩出现最大值；(3) 边跨跨中正弯矩出现最大值。按照偏心荷载的最不利情况，以双车道从距离护栏 0.5 m 处布载(此时车道荷载宽 1.8 m，间距 1.3 m，集中荷载



(a) 边支座和边跨跨中横截面尺寸

(b) 中支座和中跨跨中横截面尺寸

图 2　箱梁桥截面尺寸(单位：cm)

Fig. 2　Cross-sectional dimensions of box girder bridge(unit: cm)

标准值为360 kN,均布荷载标准值为10.5 kN/m,横向车道布载系数为1),计算得各工况集中荷载 $P=720$ kN,均布荷载 $q=21$ kN/m,荷载偏心距皆为3.375 m。

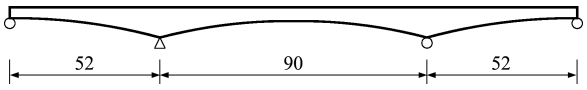


图3 主桥立面

Fig. 3 Façade diagram of main bridge

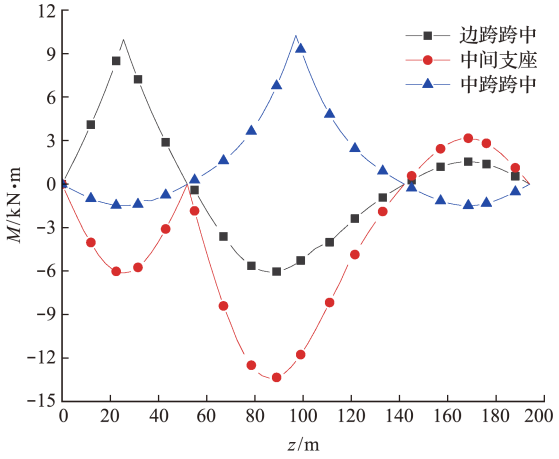


图4 控制截面弯矩影响线

Fig. 4 Influence line of bending moment of control section

应用本文提出的8自由度梁段单元对该算例的变截面连续箱梁桥进行有限元分析,将变截面箱梁桥划分为若干梁段单元,每个单元几何特征值取为该单元两端截面几何特性的平均值,从而等效处理为等截面梁段单元,忽略畸变荷载。本文分析时将全梁划分为132个单元,共计133个节点,33种单元特性。程序分析时,约束箱梁桥固定铰支座空间自由度中除 θ_x(绕截面横轴 x 的转动位移)以外的其他位移,约束可动铰支座空间自由度中除 u_z(沿 z 轴的平动位移)和 θ_x 以外的其他位移。

图5示出了该箱梁桥在三种工况作用下的双力矩分布。可以看出,双力矩在集中荷载作用截面出现正极值,在中支座处出现负极值,两种极值都有沿两侧快速衰减的分布特征。

翘曲正应力的分布可参考双力矩分布。

作为桥梁设计的重要参数,影响线可以反映结构截面刚度特性及最不利荷载分布。图6给出了本文算例箱梁桥各控制截面双力矩的影响线,图中横坐标表示单位扭矩荷载的作用位置,纵坐标表示双力矩的数值。

可以看出,边跨跨中截面的双力矩出现不同方向的极值,单位荷载作用该截面时出现最大值。中跨跨中截面的影响线呈先增大后减小的变化趋势,与边跨跨中截面一致,只发生在单位荷载作用该控制截面的附加区域。而不同于上述控制截面,中间支座截面的双力矩影响线整体数值较大,靠近支座两侧的双力矩变化较明显,存在两个相同方向的极值。

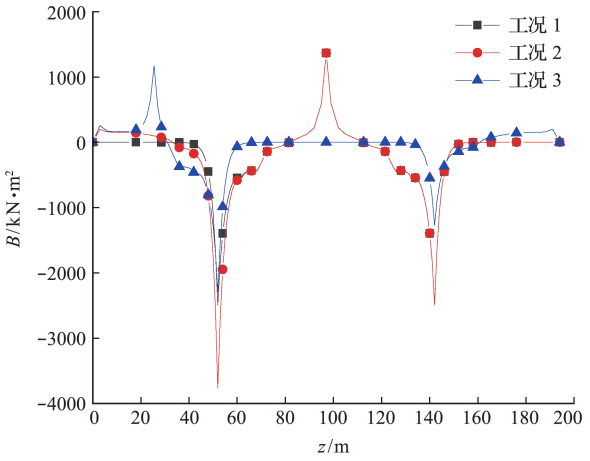


图5 各工况作用下双力矩的分布

Fig. 5 Distribution of bimoment under each working condition

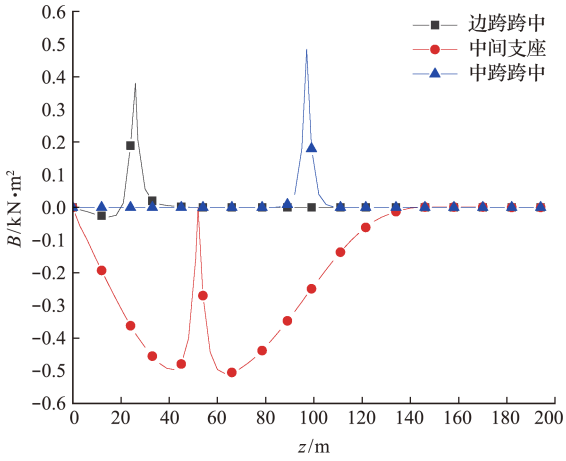


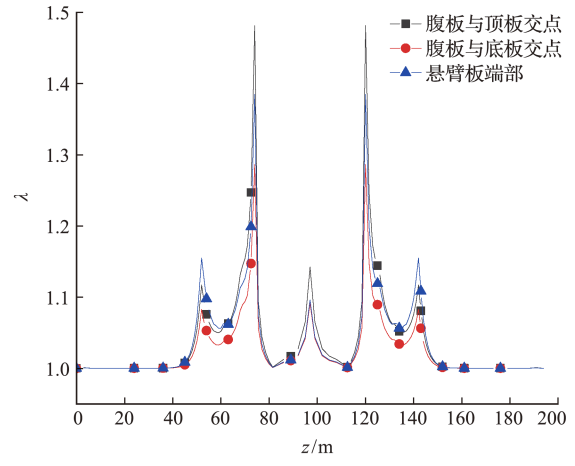
图6 控制截面双力矩影响线

Fig. 6 Influence line of bimoment of control section

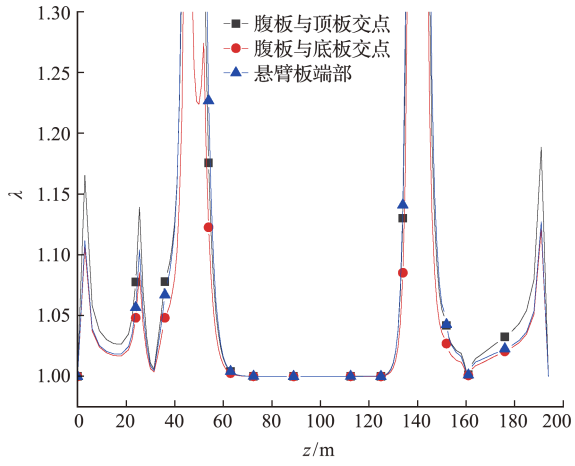
与弯矩影响线对比可知,各控制截面的双力矩影响线与弯矩影响线较为类似,不同之处在于按照双力矩影响线施加车道荷载时,各跨中截面的均布荷载没有满跨布置,并且边跨跨中截面无隔跨布置的均布荷载,而支座截面布置集中荷载的位置则更靠近支座。整体上,按双力矩影响线进行最不利荷载加载时最大应力值偏小。

桥梁设计中,常采用偏载放大系数1.15来考虑箱梁扭转造成的附加效应。本文为了反映约束扭转对初等梁应力的影响,引入应力增大系数 λ,其定义为箱梁截面总正应力与初等梁正应力的比

值。图 7 示出了工况 1 和工况 3 作用下箱梁截面控制点应力增大系数 λ 随 z 轴的分布曲线。



(a) 工况 1



(b) 工况 3

图 7　各工况应力增大系数分布

Fig. 7　Distribution of stress increase coefficient for each working condition

可以看出，同一工况作用下各控制点的应力增大系数分布曲线无较大差别。如图 7(a)所示，在工况 1 作用下，截面的应力增大系数在中支座悬臂板端部的位置出现极值，大小为 1.155，而跨中集中荷载作用处，该系数在腹板与顶板交点也达到了 1.142。在梁段 69 m～75.5 m 和 118.5 m～125 m 内，截面应力增大系数最高达到了 1.481，整体上，箱梁应力增大系数主要分布在 1～1.155，全梁截面应力增大系数超过偏载放大系数的区域不超过箱梁总长的 5%。如图 7(b)所示，工况 3 作用下，中间支座附近应力增大系数变化极大，其他箱梁截面该系数的极值都发生在腹板与顶板交点处，其中集中荷载作用截面为 1.139，全梁截面应力增大系数超过偏载放大系数的区域占箱梁总长的 14%。

为了明确该算例中团结河大桥在三种工况作用下截面应力增大系数超过偏载放大系数 1.15 的梁段区域特性，验证该箱梁桥的安全性，表 1 给出了各工况作用下箱梁控制截面的最大应力增大系数及相应弯曲正应力和翘曲正应力的值。

由表 1 可知，本算例中箱梁桥应力增大系数较大的截面，分别具有以下特征之一，(1) 该截面弯曲正应力的值往往小于此时作用工况下全梁最大弯曲正应力(工况 1、工况 2 和工况 3 的最大弯曲正应力分别为 2543.8，2359.3 和 1947)的 10.4%；(2) 翘曲正应力出现极值。由于这些截面总的应力值较小，对桥梁结构的安全性无较大影响，因此工程设计中利用偏载放大系数来考虑扭转的附加效应时不宜考虑具有上述特征的梁段区域。

表 1　正应力及应力增大系数

Tab. 1　Normal stress and stress increase coefficient

截面位置	工况类型	弯曲正应力	翘曲正应力	应力增大系数
边跨跨中	1	−967.979	−0.103	1.000
	2	−539.749	−12.793	1.024
	3	1118.768	155.789	1.139
中间支座	1	−726.317	−112.529	1.155
	2	−858.928	−170.297	1.198
	3	−201.966	−103.603	1.513
中跨跨中	1	1381.446	196.453	1.142
	2	1281.262	196.453	1.153
	3	−304.467	0.000	1.000

6　结　论

(1) 通过分解截面总扭转角，得出一种物理意义明确的新型广义位移即自由翘曲转角扭率，进而提出一种 2 节点 8 自由度的扭转梁段单元。从约束扭转控制微分方程出发，推导扭转位移自由度对应的单元刚度矩阵及等效节点荷载列阵元素，数值算例验证了本文所提梁段单元的正确性。

(2) 双力矩影响线与弯矩影响线较为类似，按双力矩影响线进行最不利荷载加载时最大应力值偏小。

(3) 应力增大系数在集中荷载作用截面出现极值，并且该值均发生在腹板与顶板交点处。利用偏载放大系数来考虑扭转造成的附加效应时，不宜考虑弯曲正应力较小及翘曲正应力出现极值的梁段区域。

参考文献(References):

[1] 项海帆.高等桥梁结构理论[M].北京:人民交通出版社,2013.(XIANG Hai-fan. *Advanced Theory of Bridge Structures*[M]. Beijing: China Communications Press,2013.(in Chinese))

[2] 郭金琼,房贞政,郑 振.箱形梁设计理论[M].北京:人民交通出版社,2008.(GUO Jin-qiong,FANG Zhen-zheng,ZHENG Zhen. *Design Theory of Box Girder*[M]. Beijing:China Communications Press,2008.(in Chinese))

[3] Cheng X L,Chen H,Gong Y Q,et al. Stocky thin- or thick-walled beams: Theory and analysis [J]. *Engineering Structures*,2018,**159**:55-65.

[4] 张元海,周鹏杰,林丽霞.薄壁箱梁约束扭转二次剪力流的分解计算方法研究[J].铁道学报,2021,**43**(4):183-190.(ZHANG Yuan-hai, ZHOU Peng-jie, LIN Li-xia. Research on resolution calculation method for secondary shear flow of thin-walled box girders under restrained torsion[J]. *Journal of the China Railway Society*,2021,**43**(4):183-190.(in Chinese))

[5] 孙成成,张元海.波形钢腹板组合箱梁约束扭转分析[J].计算力学学报,2020,**37**(6):709-714.(SUN Cheng-cheng, ZHANG Yuan-hai. Analysis on restrained torsion of composited box girder with corrugated steel webs[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*,2020,**37**(6):709-714.(in Chinese))

[6] 张元海,黄洪猛,梁永永.薄壁箱梁约束扭转剪应力计算[J].东南大学学报(自然科学版),2021,**51**(6):942-948.(ZHAGN Yuan-hai, HUANG Hong-meng, LIANG Yong-yong. Calculation of shear stress of thin-walled box girders under restrained torsion[J]. *Journal of Southeast University(Natural Science Edition)*,2021,**51**(6):942-948.(in Chinese))

[7] Qiao P,Di J,Qin F J. Warping torsional and distortional stress of composited box girder with corrugated steel webs[J]. *Mathematical Problems in Engineering*,2018,**2018**:7613231.

[8] 杨霞林,于小芹,张元海.钢桁腹式混凝土组合箱梁的扭转效应分析[J].计算力学学报,2021,**38**(2):230-238.(YANG Xia-lin, YU Xiao-qin, ZHANG Yuan-hai. Analysis on torsion effect of concrete composite box girder with steel truss webs[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*,2021,**38**(2):230-238.(in Chinese))

[9] 李海锋,罗永峰.横隔板对薄壁钢箱梁纵向正应力的影响[J].建筑结构学报,2010,**31**(S1):39-44.(LI Hai-feng,LUO Yong-feng. Influences of diaphragms of thin-walled box steel beams on the longitudinal normal stress[J]. *Journal of Building Structures*,2010,**31**(S1):39-44.(in Chinese))

[10] Li X Y,Wan S,Shen K J,et al. Finite beam element with exact shape functions for torsional analysis in thin-walled single- or multi-cell box girders[J]. *Journal of Constructional Steel Research*, 2020, **172**: 106189.

[11] 夏桂云,李传习,杨美良.薄壁箱梁约束扭转的有限元分析及弯扭力矩新算法[J].湖南大学学报(自然科学版),2019,**46**(1):85-92.(XIA Gui-yun,LI Chuan-xi, YANG Mei-liang. Finite element analysis of restrained torsion and new algorithm of flexural-torsional moment for thin-walled box girder[J]. *Journal of Hunan University(Natural Sciences)*,2019,**46**(1):85-92.(in Chinese))

[12] 文 颖,陈泽林.基于协调翘曲场的开闭口混合薄壁截面杆件约束扭转一维有限元分析[J].工程力学,2020,**37**(9):38-49.(WEN Ying, CHEN Ze-lin. One-dimensional finite element analysis of warping torsion for thin-walled members with open-closed cross sections based on compatible warping field [J]. *Engineering Mechanics*,2020,**37**(9):38-49.(in Chinese))

[13] Lezgy-Nazargah M, Vidal P, Polit O. A quasi-3D finite element model for the analysis of thin-walled beams under axial-flexural-torsional loads [J]. *Thin-Walled Structures*,2021,**164**:107811.

[14] 胡毓仁,陈伯真.一种新的薄壁杆件单元扭转刚度矩阵[J].计算结构力学及其应用,1988,**5**(3):19-28.(HU Yu-ren,CHEN Bo-zhen. A new torsional stiffness matrix of thin-walled bar elements [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*,1988,**5**(3):19-28.(in Chinese))

[15] 尉浩浩,张元海.变截面三跨连续箱梁桥活载作用下的约束扭转分析[J].公路交通科技,2021,**38**(11):68-76.(WEI Hao-hao, ZHANG Yuan-hai. Analysis on restrained torsion of 3-span continuous box girder bridge with variable section under live load [J]. *Journal of Highway and Transportation Research and Development*,2021,**38**(11):68-76.(in Chinese))

[16] 马俊军,蔺鹏臻.时速 250 km/h 铁路双线箱梁的扭转效应研究[J].铁道科学与工程学报,2018,**15**(10):2463-2470.(MA Jun-jun,LIN Peng-zhen. Restrained torsion effect of double track railway box girders with speed of 250 km/h [J]. *Journal of Railway Science and Engineering*,2018,**15**(10):2463-2470.(in Chinese))

[17] Qi H L,Wang Z Q,Zhang Z T. An efficient finite ele-

ment for restrained torsion of thin-walled beams including the effect of warping and shear deformation [J]. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 2019, **233**: 032029.

[18] 吴鸿庆，任　侠. 结构有限元分析[M]. 北京：中国铁道出版社，2000. (WU Hong-qing, REN Xia. *Structural Finite Element Analysis* [M]. Beijing: China Railway Publishing House, 2000. (in Chinese))

Torsion element and its applications of box girder based on a new generalized displacement

LIANG Yong-yong,　ZHANG Yuan-hai*

(School of Civil Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In order to improve the torsion analysis theory of variable-section box girder bridges, the total section rotation is decomposed into free warping rotation and constrained shear rotation. The free warping torsion rate is selected as the generalized displacement, and a torsional beam segment element with 2 nodes and 8 DOFs is proposed. Starting from the constrained differential equation torsion, the stiffness matrix and the equivalent nodal load array of the element are established. A stress increase coefficient is introduced to reflect the increasing effect of constrained torsion on elementary beam stresses. Numerical examples verify the reliability of the beam element in this paper. Finally, a three-span variable cross-section continuous box girder bridge is analyzed. The results show that the bimoment influence line is similar to the bending moment influence line, and the maximum stress is smaller when the most unfavorable load is loaded according to the bimoment influence line. The extreme value of the stress increase coefficient in the concentrated load action section occurs at the intersection of the web and the top plate. When using the offset load amplification coefficient to consider the additional effect of torsion, it is not appropriate to consider the beam section area where the bending normal stress is small and the warping normal stress has an extreme value.

Key words: box girder bridge; restrained torsion; beam segment element; free warping rotation; stress increase coefficient

引用本文/Cite this paper:

梁永永，张元海. 基于新型广义位移的箱形梁扭转单元及应用[J]. 计算力学学报，2023，**40**(1)：119-125.

LIANG Yong-yong, ZHANG Yuan-hai. Torsion element and its applications of box girder based on a new generalized displacement[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2023, **40**(1): 119-125.