

两异径湿球颗粒间静态液桥力的 近似解析公式及数值评测

李艳洁^{*1}, 邱洋平¹, 徐泳², 黄文彬²

(1. 北京林业大学 工学院, 北京 100083; 2. 中国农业大学 理学院, 北京 100083)

摘要:针对异径球形湿颗粒间液桥力,以 Young-Laplace 公式为基础,结合环形近似法并引入等效半径,在宽松设定的条件下推导出了简化的近似解析公式。此公式形式简洁,且当两球半径相等时,可回归到 Pitois 等提出的径球液桥力公式。本文对此近似解析公式进行参数敏感度分析,发现随着颗粒间距的增大,液桥力对颗粒半径的敏感度降低。此外,本文近似解析公式与其他实验和理论结果进行对比发现,该近似解析公式与上述实验和数值结果相当吻合,表明该近似解析公式可以较准确地计算接触角较小时的异径球颗粒间的液桥力,因而适于湿颗粒系统的数值模拟。

关键词:液桥;毛细力;异径球颗粒;接触角

中图分类号:O347.7;O242.1

文献标志码:A

文章编号:1007-4708(2023)01-0086-07

1 引言

自然界和工程中存在大量湿颗粒散体介质,如土壤、铸造型砂、化工颗粒和冰激凌等,研究散体的力学行为具有科学意义和工程应用价值。散体的自组织形态和受扰动情况下的宏观力学行为分析通常简化为等径或异径球体间存在填隙流体的力学模型。最简单的模型是存在回转体状钟摆型液桥时两球间的相互作用^[1,2]。

液桥力可分为静态液桥力和动态液桥力,静态液桥力是两球在静止状态下由液体表面张力和静水压力共同作用下发生的两球间作用力,也称毛细力。动态液桥力为因两球存在法向或切向相对速度引起的两球间的法向或切向力,其法向力即液体挤压或拉伸力。两球间的法向液桥力通常由静态和动态液桥力叠加得到。整个颗粒系统的宏观力学特性由形成液桥的所有颗粒间细观力学作用共同构成,本文只研究两球之间存在填隙流体时的静态液桥力^[3]。

借助于离散元法数值模拟可以预测颗粒系统的宏观力学形态^[4]。数值模拟要求对有关几何和物理参量进行数学表达才可以建立颗粒力学模

型^[5,6]。而液桥的真实形状是由球径、持液体积、间隙大小以及气-液-固界面力学依赖的物性根据能量法则形成的自然形态,无法用简单而精确的数学表达^[7]。为了数值计算建立力学模型所采用的液桥形状须进行合理的几何简化^[8,9]。Fisher^[10]最早提出环形近似法,将液桥外表面轮廓近似为与球颗粒固液接触线相交的弧,通过几何关系将液桥体积、半填充角、固液接触角、颗粒半径和颗粒间距等参数联系起来。当液桥体积较小且颗粒间距较小时,Derjaguin 近似法^[11]将液桥外轮廓曲率半径视为常数,结合环形近似法,使简化液桥形状满足 Young-Laplace 方程的计算条件。Lian 等^[12-14]提出了湿颗粒的液桥力数值模型并采用所提出的模型首次实现了颗粒团之间碰撞的离散元模拟。

以液桥持液量为主参数的液桥力表达式对于湿颗粒的数值计算具有物理意义明确、便于应用的优点^[15]。Pitois 等^[16,17]基于 Young-Laplace 方程,推导出了等径球颗粒间以持液量(液桥体积)表达的液桥力公式,依此公式计算出的液桥力数值与相关实验结果吻合,但未见将类似推导应用于更为复杂的异径球颗粒间液桥力的文献发表。Willett 等^[18]根据大量的液桥实验数据通过数学回归得出了异径球颗粒间液桥力的拟合公式,根据这一公式既可以解决离散元模拟中的液桥力计算问题,也可以对经过若干假定导出的解析形式的公式进行评估,但与其他拟合公式的缺点是参数的物理意义不够明确。本文采取 Pitois 等类似的方法,在采取更

收稿日期:2021-08-20;修改稿收到日期:2021-10-25.

基金项目:国家自然科学基金(11872333);中央高校基本科研业务专项基金(2017ZY37)资助项目.

作者简介:李艳洁^{*}(1980-),女,博士,教授
(E-mail:liyanjie@bjfu.edu.cn).

多数学假定简化的情况下,推导异径球颗粒的液桥力的近似解。

2 静态液桥力近似公式的推导

2.1 静态液桥力与液桥外曲率半径的近似关系

任意球径的两颗粒间液桥的形状呈钟摆形,如图1所示。其中 ρ_1 和 ρ_2 分别为液桥回转曲面外曲率半径和最小内曲率半径^[19]。略去重力影响,液桥通常可用 Young-Laplace 方程描述

$$\Delta p = \gamma(1/\rho_1 - 1/\rho_2) \quad (1)$$

式中 Δp 为液桥气-液界面的压力差, γ 为液体表面张力。

静态液桥力 F 由液体表面张力与静水压力共同构成

$$F = 2\pi\gamma\rho_2 + \pi\rho_2^2\Delta p \quad (2)$$

将式(1)代入式(2),可得

$$F = \pi\gamma\rho_2(\rho_1 + \rho_2)/\rho_1 \quad (3)$$

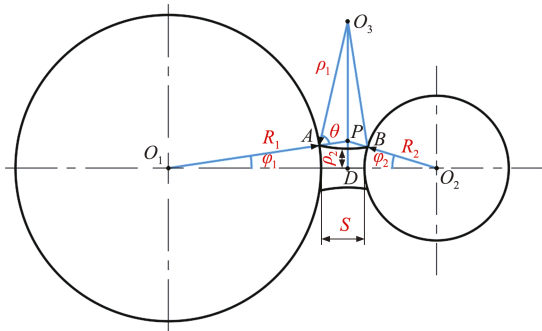


图1 两异径球颗粒间的液桥

Fig. 1 Parameters of a liquid bridge between two spheres of different radii

由图1中几何关系,可将两个曲率半径 ρ_1 和 ρ_2 表示为

$$\rho_1 = \frac{S + R_1(1 - \cos\varphi_1) + R_2(1 - \cos\varphi_2)}{\cos(\varphi_1 + \theta) + \cos(\varphi_2 + \theta)} \quad (4)$$

$$\rho_2 = R_1 \sin\varphi_1 + \rho_1 [\sin(\varphi_1 + \theta) - 1] \quad (5)$$

式中 S 为两球间距, R_1 和 R_2 为两球半径, θ 为固-液接触角, φ_1 和 φ_2 为半填充角。

当液桥体积小于颗粒体积的 1/10 时,半填充角 φ_1 和 φ_2 均较小,则有

$$\frac{R_2 + \overline{PB}}{R_1 + \overline{PA}} = \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} \approx \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \quad (6)$$

$$\text{和} \quad \cos(\varphi_1 + \theta) = \cos(\varphi_2 + \theta) \approx \cos\theta \quad (7)$$

将 $1 - \cos\varphi_1$ 和 $1 - \cos\varphi_2$ 根据半角公式展开

$$1 - \cos\varphi_i = 1 - \left(\cos^2 \frac{\varphi_i}{2} - \sin^2 \frac{\varphi_i}{2}\right) = 2 \sin^2 \frac{\varphi_i}{2} \quad (i = 1, 2) \quad (8)$$

将式(6~8)代入式(4),可近似得出

$$\rho_1 = \frac{S + R_1\varphi_1^2/2 + R_2\varphi_2^2/2}{2\cos\theta} = \frac{S + R_1\varphi_1(\varphi_1 + \varphi_2)/2}{2\cos\theta} = \frac{(S + R_1^2\varphi_1^2/R_{1,2})/(2\cos\theta)}{2\cos\theta} \quad (9)$$

式中 $R_{1,2}$ 定义为两个不等径球体的等效半径

$$\frac{1}{R_{1,2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (10)$$

又因式(5)中,假定半填充角很小时, $\rho_1 [\sin(\varphi_1 + \theta) - 1]$ 比 $R_1 \sin\varphi_1$ 小很多,舍去前者,式(5)进一步简化为

$$\rho_2 \approx R_1 \sin\varphi_1 \approx R_1 \varphi_1 \quad (11)$$

若再假设接触角也较小,仅舍去 $\sin(\varphi_1 + \theta)$, 式(5)又可以简化为

$$\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1} = \frac{R_1 \sin\varphi_1}{\rho_1} \approx \frac{R_1 \varphi_1}{\rho_1} \quad (12)$$

将式(9)代入式(12)得

$$(\rho_1 + \rho_2)/\rho_1 = (2\cos\theta R_1 \varphi_1)/(S + R_1^2 \varphi_1^2/R_{1,2}) = 2\cos\theta / \{R_1 \varphi_1 R_{1,2}^{-1} [1 + S/R_1^2 \varphi_1^2 R_{1,2}^{-1}]\} = 2\cos\theta [1 - S/R_1^2 \varphi_1^2 R_{1,2}^{-1}] / (R_1 \varphi_1 R_{1,2}^{-1}) \quad (13)$$

当球间隙较小时,略去式(9)的距离 S , 得到

$$2\rho_1 \cos\theta = R_1^2 \varphi_1^2 R_{1,2}^{-1} \quad (14)$$

将式(13)和式(14)代入式(3)可得

$$F = 2\pi\gamma R_{1,2} \cos\theta [1 - S/(2\rho_1 \cos\theta)] \quad (15)$$

2.2 以液桥体积表达的异径球间静态液桥力近似公式

为了简化液桥体积的推导,现将液桥外表面近似取作圆台侧表面筒形,如图2所示。此时液桥体积 V 可看作圆台体积减去两个球冠体积,即

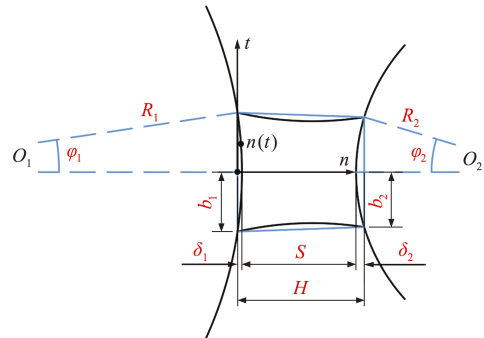


图2 液桥简化为圆台

Fig. 2 Liquid bridge simplified as a circular truncated cone

$$V = V_A - V_{B1} - V_{B2} \quad (16)$$

式中 V_A 为圆台体积, V_{B1} 和 V_{B2} 分别为两个球冠部分的体积,圆台体积 V_A 为

$$V_A = \frac{1}{3} \pi H (b_1^2 + b_2^2 + b_1 b_2) = \frac{1}{3} \pi (S + \delta_1 + \delta_2) (b_1^2 + b_2^2 + b_1 b_2) \quad (17)$$

式中 b_1 和 b_2 分别为两颗粒球冠底面半径, δ_1 和 δ_2 为两球冠高度, H 为圆台高度。

两球冠的体积 V_{B1} 和 V_{B2} 可通过二重积分近似求解。现对图 2 所示的投影平面,以 t 方向和 n 方向为主方向建立平面直角坐标系,其中球冠底面的投影线为 t 轴,液桥中心线的投影线为 n 轴,得到关于 $n(t)$ 的解析式

$$n(t) = \delta_1 - R_1 + \sqrt{R_1^2 - r^2} = \delta_1 - R_1 (1 - \sqrt{1 - r^2/R_1^2}) \quad (18)$$

对 $\sqrt{1 - r^2/R_1^2}$ 作泰勒展开化简得到 $\sqrt{1 - r^2/R_1^2} \approx 1 - r^2/(2R_1^2)$, 代入式(18)计算积分 $V_{B1} = 2\pi \int_0^{b_1} \left(\int_0^{z_1(r)} dz \right) r dr$ 即可得两球冠体积为

$$V_{Bi} = \pi [\delta_i b_i^2 - b_i^4/(4R_i)] \quad (i=1,2) \quad (19)$$

将式(17,19)代入式(16),液桥的体积可计算为

$$V = V_A - V_{B1} - V_{B2} = \frac{\pi}{3} S(b_1^2 + b_2^2 + b_1 b_2) + \frac{\pi}{4} \left(\frac{b_1^4}{R_1} + \frac{b_2^4}{R_2} \right) + f \quad (20)$$

式中 $f = \pi [\delta_1 (b_2^2 + b_1 b_2 - 2b_2^2) + \delta_2 (b_1^2 + b_1 b_2 - 2b_1^2)]/3$, 当 b_1 和 b_2 的量级相近时,可以得知 f 与其他两项相比很小,故可舍去。

由于两球冠底面半径 b_1 和 b_2 与颗粒半径存在几何关系,代入化简后可得液桥体积进一步简化后的表达式

$$V = \pi S R_1^2 \varphi_1^2 + \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) R_1^4 \varphi_1^4 = \pi \left(S R_1^2 \varphi_1^2 + \frac{1}{2 R_{1,2}} R_1^4 \varphi_1^4 \right) \quad (21)$$

对于圆台高度 $H = S + R_1 (1 - \cos \varphi_1) + R_2 (1 - \cos \varphi_2)$, $1 - \cos \varphi_1$ 和 $1 - \cos \varphi_2$ 可通过级数展开化简,得到

$$H \approx S + R_1 \varphi_1^2 + R_2 \varphi_2^2 = S + R_1^2 \varphi_1^2 R_{1,2}^{-1} \quad (22)$$

由式(22)可近似变换为

$$H^2 - S^2 = 2 R_{1,2}^{-1} \left(S R_1^2 \varphi_1^2 + \frac{1}{2 R_{1,2}} R_1^4 \varphi_1^4 \right) \quad (23)$$

比较式(21,23)可知

$$S/H = [1 + 2V/(\pi R_{1,2} S^2)]^{-1/2} \quad (24)$$

再根据式(9,15)联立,可得静态液桥力的表达式

$$F = 2\pi\gamma R_{1,2} \cos\theta (1 - S/H) \quad (25)$$

将式(24)代入式(25),即可得以液桥体积 V 表达的静态液桥力近似公式

$$F = 2\pi\gamma R_{1,2} \cos\theta \left[1 - \left(1 + \frac{2V}{\pi R_{1,2} S^2} \right)^{-1/2} \right] \quad (26)$$

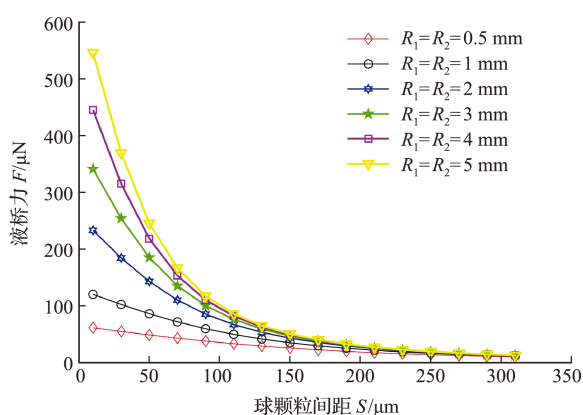
特别地,对等径球情形即 $R_1 = R_2 = R$ 时, $R_{1,2} = R$,

此时式(26)将退化为 Pitois 的等径球静态液桥力公式

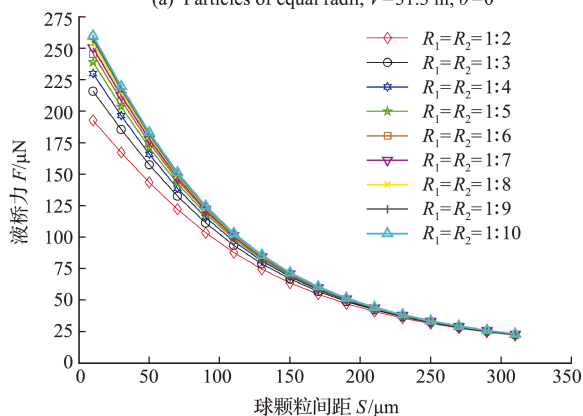
$$F = 2\pi\gamma R \cos\theta \left[1 - \left(1 + \frac{2V}{\pi R S^2} \right)^{-1/2} \right] \quad (27)$$

3 液桥力近似公式的数值验证

分析本文提出的简化液桥力公式(26),可以发现其除自变量颗粒间距 S 之外,对液桥力 F 产生影响的主要参数为表面张力 γ 、等效半径 $R_{1,2}$ 、接触角 θ 和液桥体积 V ,其中由于异径球颗粒半径变化导致的液桥力变化为本文研究的重点,所以,本文讨论了式(26)中液桥力对颗粒粒径变化的敏感程度。为了保证单因素的影响,分别取等径时的半径变化和异径时的粒径比研究,结果如图 3 所示。



(a) 等径颗粒, 液桥体积 $V=31.3$ nL, 接触角 $\theta=0^\circ$
(a) Particles of equal radii, $V=31.3$ nL, $\theta=0^\circ$



(b) 异径颗粒, 液桥体积 $V=61.8$ nL, 小颗粒半径 $R_1=1.191$ mm, 接触角 $\theta=0^\circ$
(b) Particles of different radii, $V=61.8$ nL, radius of small particle $R_1=1.191$ mm, $\theta=0^\circ$

图 3 静态液桥力对颗粒半径变化的敏感度分析

Fig. 3 Sensitivity of liquid bridge force to radii of particles

从不同单因素敏感度曲线可以看出,在颗粒间距较小时,液桥力对于颗粒粒径的变化敏感度较大,随着颗粒间距增大,液桥力趋于收敛。对比图 3 可以看出,无论是增大两个颗粒的半径还是只增大其中一个颗粒的半径都会导致液桥力增大。

4 与其他文献的比较

为了进一步探究本文推导得到的简化理论模型的准确性,将对简化的理论公式与他人经典的液桥力实验和理论模型进行对比。

4.1 近似解析公式与 Willett 等^[20]的实验结果回归公式比较

Willett 等^[20]选取二甲基硅油作为液桥的媒介(粘度为 110 mPa·s,表面张力为 20.6 m·N/m,密度为 960 kg/m³,固液接触角 $\theta=0^\circ$),使用微量天平对半径分别为 2.381 mm, 1.588 mm 和 1.191 mm 的三种球形颗粒进行等径、异径和与平板间的液桥力测量,同时还考虑了不同液桥体积的影响。通过文献[20]使用的数据提取软件对文献[20]的液桥实验数据(即文献[20]的图 1)提取数据,并与本文

的近似解析解进行同量纲下对比,得到的液桥力与颗粒间距的关系曲线如图 4 所示。可以看出,当颗粒间距约为零时,即式(26)中颗粒间距 $S=0$ 时,计算可得液桥力 $F=2\pi\gamma R_{1,2}\cos\theta$,由于该结果中所含参数皆为定值,即当颗粒间距取无穷小时的液桥力收敛于一常数,与试验结果的趋势一致。当颗粒间距约等于液桥断裂距离的 20%~30%时,理论结果与实验结果的拟合效果最好。虽然在等径球颗粒和异径球颗粒甚至是球颗粒与平面之间,本文提出的简化模型都能与实验很好地吻合,但在临近液桥断裂时,实验结果急剧减为 0,而理论曲线逐渐收敛,两者在此处的差异较为明显。实际上,此时的液桥已经处于非稳态,且断裂过程是瞬间发生,此过程的液桥力并非本文研究的静态液桥力范畴。

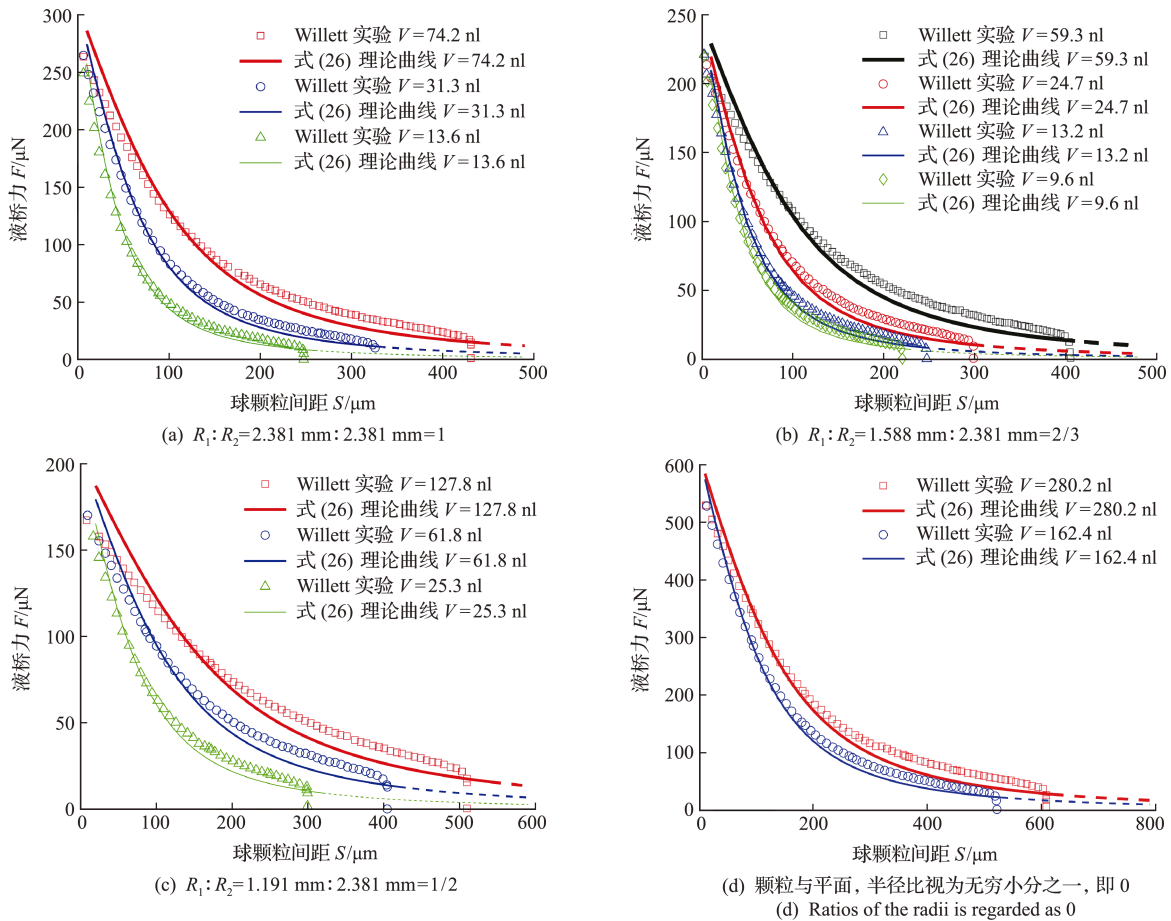


图4 Willett 实验与本文式(26)对比

Fig. 4 Comparison between Willett experiment and equation (26) of this paper

在实验研究中,颗粒间间距差异较小,为了验证简化模型在颗粒半径差异较大时仍然具有较好的准确度,考虑将理论公式与文献[20]的回归公式进行比较,其回归公式为

$$F^* = \frac{\cos\theta}{1 + 2.1 \frac{S^*}{2\sqrt{V^*}} + 10.0 \left(\frac{S^*}{2\sqrt{V^*}} \right)^2} \quad (28)$$

式中 F^* 和 S^* 分别为无量纲化后的液桥力和颗粒间距,有

$$F^* = \frac{F}{2\pi\gamma R_{1,2}}, S^* = \frac{S}{R_{1,2}}, V^* = \frac{V}{R_{1,2}^3} \quad (29\sim31)$$

式中 V^* 为无量纲化的液桥体积。

对理论式(26)进行相同的无量纲化处理后,得到无量纲液桥力公式

$$F^* = \cos \theta \left[1 - \left(1 + \frac{2V^*}{\pi S^{*2}} \right)^{-1/2} \right] \quad (32)$$

取小颗粒半径为 1.191 mm, 根据颗粒半径的比例确定相应的大颗粒半径。为了验证颗粒粒径较大时理论公式的准确确定, 取液桥体积为小颗粒体

积的 1/12。

将式(32)与回归公式(28)进行比较, 结果如图 5 所示。可以看出, 理论公式与回归公式总体趋势保持一致, 两者之间的最大误差小于 20%。

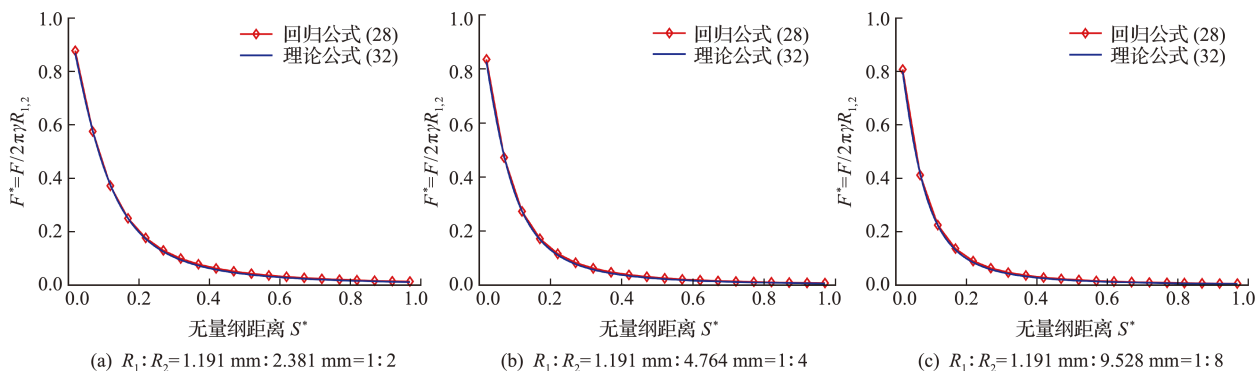


图 5 Willett 回归公式(28)与本文公式(32)对比

Fig. 5 Comparison between Willett regression formula (28) and equation (32) in this paper

4.2 与 Rabinovich 等^[21]的实验结果回归公式比较

除了文献[20]之外, Rabinovich 等^[21]选取了不同的球径比、固液接触角、液桥体积和表面张力, 对异径球颗粒间的液桥力进行了实验研究。同样使用数据提取软件可以将文献[21]中图 4 的实验结果提取后与本文液桥力理论公式(26)进行对比, 也得到了较好的吻合效果, 如图 6 所示。其中, 小颗粒半径 $R_1 = 19 \mu\text{m}$, 接触角 $\theta = 10^\circ$ 。其他参数第 1 组, 大颗粒半径 $R_2 = 27.5 \mu\text{m}$, 液体表面张力 $\gamma = 28 \text{ m} \cdot \text{N/m}$, 液桥体积 $V = 3.6 \mu\text{m}^3$ 。第 2 组, 大颗粒半径 $R_2 = 32.5 \mu\text{m}$, 液体表面张力 $\gamma = 24 \text{ m} \cdot \text{N/m}$, 液桥体积 $V = 1.2 \mu\text{m}^3$ 。第 3 组, 大颗粒半径 $R_2 = 35 \mu\text{m}$, 液体表面张力 $\gamma = 27 \text{ m} \cdot \text{N/m}$, 液桥体积 $V = 0.2 \mu\text{m}^3$ 。

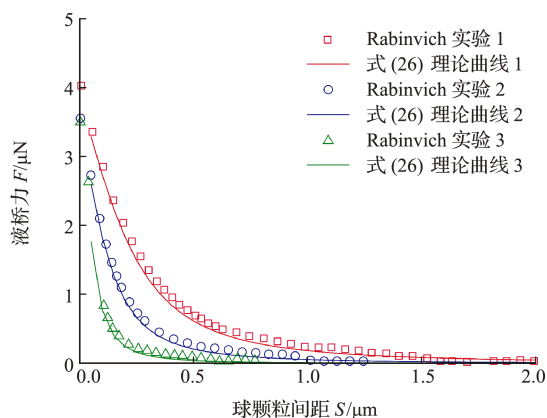


图 6 Rabinovich 实验与本文公式(26)理论对比

Fig. 6 Comparison between Rabinovich experiment and formula (26) in this paper

4.3 与他人无量纲化的比较

Wu 等^[22]曾对液桥力和液桥体积进行了无量

纲化后, 将理论模型与他人的结果做了对比, 本文将式(26)采用相同无量纲化方法处理后的液桥力, 即式(35)与文献[22]的结果一并做了对比, 如图 7 所示。

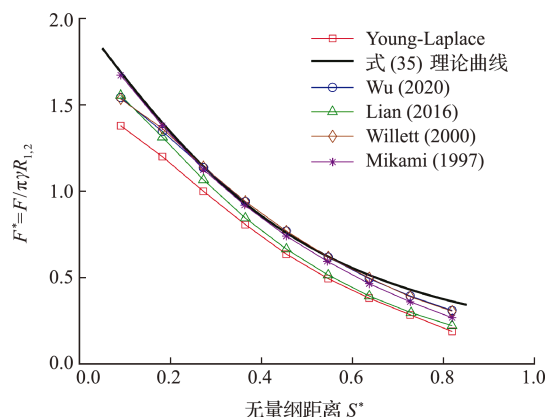


图 7 球颗粒无量纲化液桥力与分离距离的关系曲线对比
($V^* = 0.1, \theta_1 = \theta_2 = 0^\circ, R_1:R_2 = 1.25$)

Fig. 7 Comparison between the relationships of scaled liquid bridge forces versus separation distances for spherical particles ($V^* = 0.1, \theta_1 = \theta_2 = 0^\circ, R_1:R_2 = 1.25$)

图 7 中横坐标表示分离距离 S 与液桥断裂距离 $S_{\max}$ 的比值, 在文献[20]的研究中, 假设 $R_1 < R_2$, 断裂距离和液桥体积具有线性幂律关系, 即

$$S_{\max} = \left[1 + \frac{\theta}{4} \left(\frac{R_1}{R_2} + 1 \right) \right] \left[V^{*1/3} + \left(\frac{R_1}{2R_2} - \frac{2}{5} \right) V^{*2/3} \right] \quad (33)$$

在文献[22]的研究中对液桥体积和颗粒间距的无量纲化方法皆与文献[20]相同, 液桥力的关系为

$$F' = 2F^* \quad (34)$$

将 V^* 和 S^* 代入式(26), 再代入式(34), 得到

式(26)的变形形式为

$$F' = 2\cos\theta \left[1 - \left(1 + \frac{2V^*}{\pi S^{*2}} \right)^{-1/2} \right] \quad (35)$$

由图7对比其他理论结果与实验结果可以看出, Willett等^[20]主要通过实验测量得到了液桥力的大小,验证Young-Laplace数值积分的准确性;而Lian等^[12-14]通过数据拟合得到了液桥力关于液桥体积和半填充角及接触角的线性理论模型,相比于Lian等拟合得到的数学模型,本文进一步简化半填充角的影响,使得理论公式更加简洁,与其他理论和实验的结果吻合较好。

5 结 论

本文就两异径球颗粒间存在填隙流体的钟摆型液桥导出了静态液桥力的近似解析解。由于问题的复杂性,不得不在Pitois等的等径球颗粒液桥力推导所作假定基础上,增加了若干假定,这些假定并不完全符合实际情况。这样做的原因纯属为了简化数学推导,得到显式的解析解,所以在这一解析解的前面加上近似以标明限制条件不尽合理。

首先,该解析解对于等径球这一特例能退回到Pitois等径球的液桥力表达式,这保证了两球径差异较小时液桥力不会存在显著偏差,具有可用性。

其次,两球径差异较大时,该解析解与Willett等实验回归公式以及其他理论和实验结果吻合度依然较高,具有准确性。

参考文献(References):

- [1] Ji S Y, Liu L. *Computational Granular Mechanics and Its Engineering Applications* [M]. Singapore: Springer, 2020.
- [2] 张 昭,程靖轩,刘奉银,等. 考虑颗粒粒径和液桥体积的毛细力计算方法[J]. 水利学报, 2021, **52**(4): 442-460. (ZHANG Zhao, CHENG Jing-xuan, LIU Feng-yin, et al. A calculation method for capillary force considering particle size and liquid bridge volume [J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2021, **52**(4): 442-460. (in Chinese))
- [3] Bozkurt M G, Fratta D, Likos W J. Capillary forces between equally sized moving glass beads: An experimental study [J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2017, **54**(9): 1300-1309.
- [4] Cundall P A, Strack O. A computer model for simulating progressive large-scale movements in blocky rock systems [J]. *Proceedings of Symposium for International Society of Rock Mechanics*, 1971, **1**: 11-18.
- [5] 杜友耀,李锡夔. 二维液桥计算模型及湿颗粒材料离散元模拟[J]. 计算力学学报, 2015, **32**(4): 496-502. (DU You-yao, LI Xi-kui. 2D computational model of liquid bridge and DEM simulation of wet granular materials [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2015, **32**(4): 496-502. (in Chinese)).
- [6] Zhang L, Wu C Y. Discrete element analysis of normal elastic impact of wet particles [J]. *Powder Technology*, 2020, **362**: 628-634.
- [7] Zhao C F, Krut N P, Millet O. Capillary bridge force between non-perfectly wettable spherical particles: An analytical theory for the pendular regime [J]. *Powder Technology*, 2018, **339**: 827-837.
- [8] Megias-Alguacil D, Gauckler L J. Accuracy of the toroidal approximation for the calculus of concave and convex liquid bridges between particles [J]. *Granular Matter*, 2011, **13**(4): 487-492.
- [9] Sun X S, Sakai M. A liquid bridge model for spherical particles applicable to asymmetric configurations [J]. *Chemical Engineering Science*, 2018, **182**: 28-43.
- [10] Fisher R A. On the capillary forces in an ideal soil; correction of formulae given by W. B. Haines [J]. *The Journal of Agricultural Science*, 1926, **16**(3): 492-505.
- [11] Derjaguin B. Untersuchungen über die Reibung und Adhäsion, IV [J]. *Kolloid-Zeitschrift*, 1934, **69**(2): 155-164. (in German))
- [12] Lian G P, Thornton C, Adams M J. A theoretical study of the liquid bridge forces between two rigid spherical bodies [J]. *Journal of Colloid and Interface Science*, 1993, **161**(1): 138-147.
- [13] Lian G P, Thornton C, Adams M J. Discrete particle simulation of agglomerate impact coalescence [J]. *Chemical Engineering Science*, 1998, **53**(19): 3381-3391.
- [14] Lian G P, Seville J. The capillary bridge between two spheres: New closed-form equations in a two century old problem [J]. *Advances in Colloid and Interface Science*, 2016, **227**: 53-62.
- [15] 蒲 诚,刘奉银,张 昭,等. 不同含液量下颗粒间液桥力及形态的试验研究[J]. 水利学报, 2020, **51**(1): 81-91. (PU Cheng, LIU Feng-yin, ZHANG Zhao, et al. Experimental study on liquid force and profile between two moving sphere particles under different liquid content condition [J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2020, **51**(1): 81-91. (in Chinese)).
- [16] Pitois O, Moucheront P, Chateau X. Liquid bridge between two moving spheres: An experimental study of viscosity effects [J]. *Journal of Colloid and Interface Science*, 2000, **231**(1): 26-31.

- [17] Pitois O, Moucheron P, Chateau X. Rupture energy of a pendular liquid bridge[J]. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 2001, **23**(1):79-86.
- [18] Willet C D, Johnson S A, Adams M J, et al. Pendular capillary bridges[J]. *Handbook of Powder Technology*, 2007, **11**:1317-1351.
- [19] Sirghi L, Nakagiri N, Sugisaki K, et al. Effect of sample topography on adhesive force in atomic force spectroscopy measurements in air[J]. *Langmuir*, 2000, **16**(20):7796-7800.
- [20] Willett C D, Adams M J, Johnson S A, et al. Capillary bridges between two spherical bodies[J]. *Langmuir*, 2000, **16**(24):9396-9405.
- [21] Rabinovich Y I, Esayanur M S, Moudgil B M. Capillary forces between two spheres with a fixed volume liquid bridge: Theory and experiment[J]. *Langmuir: the ACS Journal of Surfaces and Colloids*, 2005, **21**(24):10992-10997.
- [22] Wu D L, Zhou P, Wang G, et al. Modeling of capillary force between particles with unequal contact angle[J]. *Powder Technology*, 2020, **376**:390-397.

Approximate analytical formula and numerical evaluation of static liquid bridge force between two wet balls of different radii

LI Yan-jie^{*1}, QIU Yang-ping¹, XU Yong², HUANG Wen-bin²

(1. School of engineering, Beijing Forestry University, Beijing 100083, China;

2. College of science, Agricultural University of China, Beijing 100083, China)

Abstract: For the liquid bridge force between spherical wet particles of different radii, based on Young-Laplace formula, combined with toroidal approximation method and introducing harmonic radius, a simplified approximate analytical formula is derived under loose setting conditions. This formula is simple in form, and when the radii of the two balls are equal, it can be regressed to the Pitois liquid bridge force formula between balls of equal radii balls. It is found that the sensitivity of liquid bridge force to particle radius decreases with the increase of distance between the two particles. In addition, by comparing the approximate analytical formula with the experimental and theoretical results of others, it is found that the approximate analytical formula is in quite good agreement with the above experimental and numerical results, which shows that the approximate analytical formula can accurately calculate the liquid bridge force between spherical particles of different radii with small contact angles, so it is applicable for the numerical simulation of a wet particle system.

Key words: liquid bridge; capillary force; particles of different radii; contact angle

引用本文/Cite this paper:

李艳洁, 邱洋平, 徐 泳, 等. 两异径湿球颗粒间静态液桥力的近似解析公式及数值评测[J]. 计算力学学报, 2023, **40**(1):86-92.

LI Yan-jie, QIU Yang-ping, XU Yong, et al. Approximate analytical formula and numerical evaluation of static liquid bridge force between two wet balls of different radii[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2023, **40**(1):86-92.