第40卷第1期 计 算 力 学 学 报 Vol. 40, No. 1
2023 年 2 月 Chinese Journal of Computational Mechanics February 2023

DOI:10.7511/jslx20210611001

变截面欧拉梁自由振动分析的重采样微分求积法

徐卫敏[1,2], 何刿江[2], 吴 熙*[3]

(1.浙江建设职业技术学院,杭州 311231;2.浙江建院建筑规划设计院,杭州 310004;
3.浙大城市学院,杭州 310015)

摘 要:采用重采样微分求积法求解了变截面欧拉梁的自由振动问题。推导了变截面梁的控制方程离散格式,采用重采样矩阵方法对边界条件进行处理,给出了变截面梁自由振动算法。采用本文方法对不同类型截面形式和不同边界条件的变截面梁进行自由振动分析,并和其他解法进行比较。计算结果表明,本文方法可以适用于不同变截面类型和不同边界条件,计算精度与解析解吻合良好,具有良好的收敛性能。在同等精度条件下网格点数少于现有计算方法。重采样转换矩阵边界处理方法相比于传统边界处理方法具有更快的收敛性能。

关键词:变截面;自由振动;微分求积法;重采样

中图分类号:O323 **文献标志码**:A **文章编号**:1007-4708(2023)01-0073-06

1 引 言

在土木、机械和航空等领域工程结构中,由于构件等强度要求和质量分布等因素,导致梁式构件截面经常设计成变截面形式[1]。截面变化形式主要包括截面形状和尺寸变化等。分析变截面梁的自由振动特征如频率和振型等,对于了解变截面梁的结构特性十分重要,同时也是进一步对其进行复杂动力分析的基础[2]。

国内外对于变截面梁自振频率的计算展开了大量的解析和数值方法研究。解析法通常基于截面高度、宽度或者面积和惯性矩满足特定幂、指函数形式的假定,对解进行相应函数形式展开并进行匹配,从而求解梁的自振频率[3]。对于大多数变截面梁来说,其自振频率不存在理论解析解,需要采用数值方法进行计算[4,5]。

数值方法中有限元方法最为流行,该法格式统一,且适用于任意截面形式,一般情况下为工程师的首要选择[6]。然而,有限元法的问题在于精度较低,为了得到较为精确的结果通常需要划分较多的单元数。因此,国内外研究人员提出了一些高精度的数值方法[7-9],微分求积法是其中较为流行的一种方法。微分求积法的主要思想是用一个高阶插值函数来近似代替原有函数,并将函数的微分或者积分转化为插值点上函数值的加权求和,从而将微分方程或者积分方程转化为代数方程组。由于微分求积法具有插值点布置灵活、计算精度高的特点,故得到了较广泛的应用[10]。

传统上微分求积法处理高阶微分方程边界条件主要有三种方式[8],(1) δ-技术;(2) 改变权系数矩阵法;(3) 直接替代法。δ-技术存在施加边界条件不准确和引起问题高度病态的缺点,而改变权系数矩阵法在部分边界条件下会出现计算频率失败的情况[8]。因此,目前用的较多的是直接替代法。该方法直接用边界条件来替代控制方程首末各两个方程,常见的边界条件都可施加。然而,在确定某些整体型边界条件(如两端位移相等的边界条件)时,直接替代法对于这些边界条件如何替换控制方程的某些行还不明确,对于这类边界条件的施加存在任意性。此外,直接用边界条件方程替代控制方程的某些行会影响方程的特征值分布,从而影响方程的条件性态[11]。

为了解决传统微分求积法对边界条件处理存在的这些问题,本文采用 Driscoll 等[11]提出的重采样转换矩阵方法对边界条件进行处理,并和传统的方法进行比较。首先介绍微分求积法权系数矩阵和边界条件处理步骤;然后推导了变截面梁的控制方程,并给出求解其自振频率的算法。通过部分变截面梁算例,对本文计算方法的精度和效率进行验证,同时还比较了传统边界处理方法和本文处理方法在解精度上的影响。

收稿日期:2021-06-11;**修改稿收到日期**:2021-09-28.
基金项目:浙江省教育厅项目(Y202044981);浙江省自然科学基金面上项目(LY20E080006);国家自然科学基金青年项目(51808121)资助项目.
作者简介:吴 熙*(1985-),女,博士,副教授
(E-mail:wuxi@zucc.edu.cn).

2 微分求积法及边界条件施加方法

2.1 高阶插值函数

给定一组插值点 $\{x_i\}_0^N$ 和这组点对应的函数值 $\{f_i\}_0^N$，则可以插值生成一个 N 阶多项式 $p_N(x)$ 为

$$p_N(x)=\sum_{i=0}^{N} l_i(x) f_i \tag{1}$$

式中 $l_i(x)$ 为拉格朗日插值基函数，其表达式为

$$l_i(x)=\prod_{j=0,j\neq i}^{N}\frac{x-x_j}{x_i-x_j} \tag{2}$$

还可以进一步表示成更加紧凑和数值高效的重心插值形式[12]为

$$p_N(x)=\sum_{i=0}^{N}\frac{\lambda_i y_i}{x-x_i}\Big/\sum_{i=0}^{N}\frac{\lambda_i}{x-x_i} \tag{3}$$

式中
$$\lambda_i=\frac{1}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)} \tag{4}$$

2.2 微分权系数矩阵

函数 $y=\boldsymbol{f}(x)$ 采用插值多项式 $p_N(x)$ 近似表示时，其导数 $y'=\boldsymbol{f}'(x)$ 可以近似为

$$\boldsymbol{f}'(x)\approx p'_N(x)=\sum_{i=0}^{N} l'_i(x)\boldsymbol{f}_i \tag{5}$$

函数在插值点上的一阶导数值可以表示为

$$\boldsymbol{f}'_i=\sum_{j=0}^{N} l'_j(x_i)\boldsymbol{f}_j \tag{6}$$

式(6)可以进一步写成矩阵形式为

$$f'=\mathbf{W}f \tag{7}$$

式中 $\boldsymbol{f}'=[f'_0,f'_1,\cdots,f'_N]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{f}=[f_0,f_1,\cdots,f_N]^{\mathrm{T}}$，$\mathrm{W}_{ij}=l'_j(x_i)$。矩阵 $\mathbf{W}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的权系数矩阵，其大小为 $(N+1)\times(N+1)$。

对于 n 阶导数 $f^n(x)$ 在插值点上的值同样可以近似表示为

$$f^{(n)}=\mathrm{W}^{(n)}f \tag{8}$$

事实上，$\mathrm{W}^{(n)}$ 和 $\mathbf{W}$ 存在关系

$$\mathrm{W}^{(n)}=\mathrm{W}^{(n-1)}\mathbf{W}=\cdots=\mathrm{W}^n \tag{9}$$

式(9)大大简化了高阶权系数矩阵的计算。实际计算中，还存在另外更加高效的权系数矩阵递归算法，具体可参见文献[8]。

2.3 边界条件

利用微分权系数矩阵可以将微分方程特征值问题转化为代数特征值问题。为了进一步说明，考察 m 阶微分方程

$$a_m(x)u^{(m)}(x)+\cdots+a_1(x)u'(x)+a_0(x)u(x)=\lambda b_0(x)u(x) \tag{10}$$

和边界条件

$$l_i(u,\cdots,u^{(m-1)})=0\quad(i=1,\cdots,m) \tag{11}$$

以上边界条件均为线性条件。

采用插值点 $\{x_i\}_0^N$ 对方程进行离散时，方程转代数方程组为

$$\mathbf{A}\boldsymbol{u}=\lambda\mathbf{B}\boldsymbol{u} \tag{12}$$

式中 $\boldsymbol{u}$ 为函数 $u(x)$ 在插值点的函数值形成的向量，即 $\boldsymbol{u}=[u(x_0),\cdots,u(x_N)]^{\mathrm{T}}$，矩阵 $\mathbf{A}$ 和矩阵 $\mathbf{B}$ 分别为

$$\mathbf{A}=\mathrm{diag}(a_m)\mathrm{W}^m+\cdots+\mathrm{diag}(a_1)\mathrm{W}+\mathrm{diag}(a_0) \tag{13}$$

$$\mathbf{B}=\mathrm{diag}(b_0) \tag{14}$$

式中 diag(vector)表示以列向量 vector 为对角元素形成的对角矩阵。$\boldsymbol{a}_i$ 和 $\boldsymbol{b}_0$ 为函数 $a_i(x)$ 和 $b_0(x)$ 在插值点上的值构成的列向量，即 $\boldsymbol{a}_i=[a_i(x_0),\cdots,a_i(x_N)]^{\mathrm{T}}(i=0,\cdots,m)$，$b_0=[b_0(x_0),b_0(x_1),\cdots,b_0(x_N)]^{\mathrm{T}}$。

边界条件可以统一离散成

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}=0 \tag{15}$$

式中 $\mathbf{L}$ 为大小为 $m\times(N+1)$ 的矩阵。方程第 i 行代表第 i 各边界条件的离散表示，即

$$e_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}=l_i(\boldsymbol{u},\mathbf{W}\boldsymbol{u},\cdots,\mathbf{W}^{m-1}\boldsymbol{u})=0 \tag{16}$$

式中 e_i 为 $(N+1)\times(N+1)$ 单位矩阵的第 i 行。

本文采取 Driscoll 等[11]提出的转换矩阵法来处理边界问题。微分、积分过程是一个函数降阶和升阶的过程，过程中将改变多项式最高次项。因此，微分和积分权系数矩阵在本质上应该具有矩形的矩阵形状，而非方形矩阵形状。m 次微分将使多项式 $p_N(x)$ 由 N 次降为 $N-m$ 次，因此用 $N+1-m$ 个插值点即可精确表达 $p_N(x)$ 的 m 次导数。Driscoll 等[11]通过重新选取插值点的方式对高阶导数项进行多项式插值，并通过转换矩阵映射到现有的插值点。具体来说，对于 $\{x_j,f_j\}_0^N$ 确定的插值多项式 $p_N(x)$ 在另外一组点 $\{\tilde{x}_k\}_0^{N-m}$ 上的函数值 $\{\tilde{f}_k\}_0^{N-m}$ 和插值节点上的函数值 $\{f_j\}_0^N$ 之间存在如下关系，

$$\tilde{\boldsymbol{f}}=\mathbf{P}_{N+1,m}\boldsymbol{f} \tag{17}$$

式中 $\tilde{\boldsymbol{f}}=[\tilde{f}_0,\tilde{f}_1,\cdots,\tilde{f}_{N-m}]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{f}=[f_0,f_1,\cdots,f_N]^{\mathrm{T}}$，$\mathbf{P}_{N+1,m}$ 称为重采样转换矩阵，大小为 $(N+1-m)\times(N+1)$，$\mathrm{P}_{N+1,m}$ 的每个元素定义为

$$(\mathrm{P}_{N+1,m})_{j,k}=\begin{cases}\dfrac{\lambda_k}{\tilde{x}_j-x_k}\left[\displaystyle\sum_{l=0}^{N}\frac{\lambda_l}{\tilde{x}_j-x_l}\right]^{-1} & (\tilde{x}_j\neq x_k)\\ 1 & (\tilde{x}_j=x_k)\end{cases} \tag{18}$$

综上所述，重采样转换矩阵方法在区间中重新选取一组插值点对整个方程进行离散，并通过转换矩阵变换回原有插值点，这样得到的离散控制方程为具有 $N+1$ 个变量的 $N+m-1$ 个方程组，配合 m 个边界条件方程，就自然得到了最后需要求解的方程，从而避免了传统直接替代法在处理整体型边界条件时对控制方程矩阵行替代上的任意性。

根据以上处理方式，首先对式(12)两侧同时左乘 $P_{N+1,m}$，并结合边界条件得到控制方程为

$$\widetilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{u}=\lambda\widetilde{\mathbf{B}}\boldsymbol{u} \tag{19}$$

式中 $\widetilde{\mathbf{A}}$ 和 $\widetilde{\mathbf{B}}$ 分别为

$$\widetilde{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix}\mathbf{L}\\ \mathbf{P}_{N+1,m}\mathbf{A}\end{pmatrix},\ \widetilde{\mathbf{B}}=\begin{pmatrix}0\\ \mathbf{P}_{N+1,m}\end{pmatrix} \tag{20,21}$$

方程(21)可以采用广义特征值算法 QZ 法进行求解[13]。

3　控制方程数值离散及求解

对于一个跨度为 L 的变截面梁，其自由振动控制方程为[4]

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(EI\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}\right)-\omega^2\overline{m}U=0 \tag{22}$$

式中 EI 为截面刚度，ρA 为梁线密度，均为 x 的函数，ω 为梁自由振动频率。

方程(1)需要施加适当的边界条件才存在适定解。通常情况下，梁有如下三类典型边界条件。

- 简支边界，对应的数学表达式为
  $U=0,\ \mathrm{d}^2U/\mathrm{d}x^2=0$
- 固定边界，对应的数学表达式为
  $U=0,\ \mathrm{d}U/\mathrm{d}x=0$
- 自由边界，对应的数学表达式为
  $U=0,\ \mathrm{d}^3U/\mathrm{d}x^3=0$

方程(1)可以进一步展开为

$$EI\frac{\mathrm{d}^4U}{\mathrm{d}x^4}+2\frac{\mathrm{d}EI}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^3U}{\mathrm{d}x^3}+\frac{\mathrm{d}^2EI}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}-\omega^2\overline{m}U=0 \tag{23}$$

为了求解式(23)，选取以下第二类切比雪夫点对方程进行离散，

$$x_i=\frac{L}{2}[1-\cos(i/N)]\quad(i=0,1,\cdots,N)$$

应用微分求积法有

$$EI(x_i)\sum_{j=0}^{N}W_{ij}^{(4)}U_j+2EI'(x_i)\sum_{j=0}^{N}W_{ij}^{(3)}U_j+2EI''(x_i)\sum_{j=0}^{N}W_{ij}^{(2)}U_j=\omega^2\overline{m}(x_i)U_i\quad(i=0,1,\cdots N) \tag{24}$$

式中 $EI(x_i)$，$EI'(x_i)$ 和 $EI''(x_i)$ 分别为截面刚度 EI 及其一阶和二阶导数在点 x_i 上的值，$W_{ij}^{(2)}$，$W_{ij}^{(3)}$ 和 $W_{ij}^{(4)}$ 分别为位移函数 $U(x)$ 的二阶导数、三阶导数和四阶导数的权系数矩阵元素。式(24)可以写成矩阵形式为

$$\mathbf{KU}=\omega^2\mathbf{MU} \tag{25}$$

式中 $\mathbf{U}=[U(x_0),U(x_1),\cdots,U(x_N)]^{\mathrm{T}}$，$\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{M}$ 为

$$\mathbf{K}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{EI})W^{(4)}+2\mathrm{diag}(\boldsymbol{EI}')W^{(3)}+\mathrm{diag}(\boldsymbol{EI}'')W^{(2)} \tag{26}$$

$$\mathbf{M}=\mathrm{diag}(\overline{\boldsymbol{m}}) \tag{27}$$

式(26)中，$\boldsymbol{EI}$，$\boldsymbol{EI}'$ 和 $\boldsymbol{EI}''$ 分别表示截面刚度 EI 及其一阶和二阶导数在插值点上形成的列向量，$\overline{\boldsymbol{m}}$ 为梁单位长度质量在插值点上形成的列向量，即

$$\boldsymbol{EI}=[EI(x_0),EI(x_1),\cdots,EI(x_N)]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{EI}'=[EI'(x_0),EI'(x_1),\cdots,EI'(x_N)]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{EI}''=[EI''(x_0),EI''(x_1),\cdots,EI''(x_N)]^{\mathrm{T}}$$
$$\overline{\boldsymbol{m}}=[\overline{m}(x_0),\overline{m}(x_1),\cdots,\overline{m}(x_N)]^{\mathrm{T}}$$

若刚度 EI 也采用位移函数的插值模式，则进一步有如下关系，

$$\boldsymbol{EI}'=\mathbf{W}\boldsymbol{EI},\ \boldsymbol{EI}''=\mathbf{W}^{(2)}\boldsymbol{EI} \tag{28,29}$$

采用转换矩阵法施加边界条件，可得

$$\widetilde{\mathbf{K}}\mathbf{U}=\omega^2\widetilde{\mathbf{M}}\mathbf{U} \tag{30}$$

式中 $\widetilde{\mathbf{K}}$ 和 $\widetilde{\mathbf{M}}$ 可以分别写成

$$\widetilde{\mathbf{K}}=\begin{pmatrix}\mathbf{L}\\ \mathbf{P}_{N+1,4}\mathbf{K}\end{pmatrix},\ \widetilde{\mathbf{M}}=\begin{pmatrix}0\\ \mathbf{P}_{N+1,4}\mathbf{M}\end{pmatrix} \tag{31,32}$$

对于两边简支的边界条件，

$$\mathbf{L}=\begin{pmatrix}e_1\\ e_{N+1}\\ \mathbf{W}^2[1,:]\\ \mathbf{W}^2[N+1,:]\end{pmatrix}$$

式中 e_1 和 e_{N+1} 表示 $(N+1)\times(N+1)$ 单位矩阵的第 1 行和第 $N+1$ 行，$\mathbf{W}^2[1,:]$ 和 $W^2[N+1,:]$ 分别表示 $\mathbf{W}^2$ 矩阵的第 1 行和第 $N+1$ 行。其余边界条件可以以类似方式写出。

当插值点映射为$[-1,1]$的第二类切比雪夫点时，权系数微分矩阵 $\mathbf{W}$ 可以得到非常简单的形式，

$$\mathbf{W}=\frac{L}{2}\mathbf{D} \tag{33}$$

式中 $\mathbf{D}$ 可以表示为[14]

$$(\mathbf{D})_{00}=-\frac{2N^2+1}{6},\ (\mathbf{D})_{NN}=\frac{2N^2+1}{6} \tag{34}$$

$$(\mathbf{D})_{jj}=\frac{x_j}{2(1-x_j^2)}\quad(j=1,\cdots,N-1) \tag{35}$$

$$(\mathbf{D})_{jj}=\frac{c_i(-1)^{i+j}}{c_j(x_j-x_i)}\quad(i\neq j;i,j=1,\cdots,\mathrm{N}-1)\tag{36}$$

式中

$$c_i=\begin{cases}2 & (i=0,\mathrm{N})\\ 1 & (\text{其他情况})\end{cases}\tag{37}$$

重采样点没有限制，通常可以映射为[−1,1]的第一类切比雪夫点，

$$\tilde{x}_k=\frac{L}{2}\left[1-\cos\left(\frac{2k-1}{2(\mathrm{N}-m)}\right)\right]$$

$$(k=0,\cdots,\mathrm{N}-m)\tag{38}$$

以上求解过程可以进一步总结如图 1 所示。

1. 选取插值点 $\{x_i\}_0^{\mathrm{N}}$。
2. 计算各阶微分权系数矩阵(式(9,33))。
3. 选取重插值点 $\{\tilde{x}_i\}_0^{\mathrm{N}-4}$ (式(38))。
4. 计算转换矩阵 $P_{\mathrm{N}+1,4}$ (式(18))。
5. 计算刚度矩阵 K 和质量矩阵 M (式(26,27))。
6. 计算边界条件矩阵 L。
7. 计算等效刚度矩阵 $\widetilde{\mathbf{K}}$ 和等效质量矩阵 $\widetilde{\mathbf{M}}$ (式(31,32))。
8. 采用 QZ 算法计算结构自由振动频率。

图 1 变截面梁自由频率计算框图

Fig. 1 Free frequency calculation diagram of variable section beam

4 计算结果及讨论

通过本文方法计算不同截面形式及变化规律、不同边界条件下的变截面梁的自由振动频率，并将计算结果与解析解和有限元解进行比较。同时，还将传统微分求积法的边界处理方法对计算结果的影响与本文结果进行比较。为了说明本文方法的收敛特性，计算结果精确到小数点后 4 位，其他文献结果按照原有数值选取。需要指出的是，部分算例不存在解析解，本文数值结果仅与文献中部分进行了收敛性分析的数值计算结果进行分析比较。

算例 1 直径线性变化圆截面梁自由振动[15]

考虑一个直径线性变化的圆截面梁。该梁跨度为 1 m，左右两侧截面直径分别为 0.02 m 和 0.01 m。弹性模量 $E=2.1\times10^{11}\ \mathrm{N/m^2}$，密度 $\rho=7800\ \mathrm{kg/m^3}$。表 1～表 3 分别给出了不同边界条件下按照本文方法采用插值点数从 10～25 的计算结果。同时还列出了文献中其他解法的计算结果。表 1～表 3 可以看出，当插值点数从 10 增至 25 时，圆形变截面梁前 5 阶自振频率迅速收敛到小数点后四位。事实上，如果选取合适的插值点位置，微分求积法具有谱精度收敛性[8]。在相同的插值点数(N=15)的情况下，本文方法精度高于文献[7]的计算结果。

表 1 两边简支条件下圆形变截面梁振动频率

Tab. 1 Vibration frequency of circular variable cross section beam simply supported at both ends

频率阶数	本文方法				SFPM[7]	SAM[15]
	N=10	N=15	N=20	N=25	N=15	N=8
1	**6.95**8	6.956	6.956	6.956	6.96	6.93
2	29.155	**29.11**0	29.110	29.110	29.11	29.00
3	62.646	**65.22**7	65.227	65.227	65.24	64.98
4	118.485	115.636	**115.64**6	115.646	115.70	115.19
5	486.841	180.733	**180.41**3	180.413	180.64	179.63

注：SFPM 表示文献[7]提出的样条有限点法，SAM 表示文献[15]提出的半解析方法，下同。

表 2 两边固支条件下圆形变截面梁振动频率

Tab. 2 Vibration frequency of circular variable cross section beam fixed at both ends

频率阶数	本文方法				SFPM[7]	SAM[15]
	N=10	N=15	N=20	N=25	N=15	N=128
1	16.452	**16.479**	16.479	16.479	16.48	16.479
2	45.369	**45.175**	45.175	45.175	45.182	45.188
3	85.460	**88.352**	88.352	88.352	88.384	88.353
4	170.852	145.801	**145.890**	145.890	146.019	145.898
5	1237.273	219.242	**217.804**	217.804	—	—

表 3 固支-自由条件下圆形变截面梁振动频率

Tab. 3 Vibration frequency of circular variable cross section beam with one end fixed support and another end free

频率阶数	本文方法				SFPM[7]	SAM[15]
	N=10	N=15	N=20	N=25	N=15	N=128
1	4.623	**4.625**	4.625	4.625	4.625	4.626
2	19.557	**19.547**	19.547	19.547	19.548	19.547
3	48.767	**48.578**	48.578	48.578	48.582	48.576
4	86.812	91.811	**91.812**	91.812	91.837	91.814
5	172.890	149.250	**149.389**	149.389	—	—

算例 2 宽度和高度线性变化矩形截面梁自由振动[16]

一个矩形变截面简支梁跨度为 4 m，截面从左端尺寸 $b_0\times h_0=0.2\ \mathrm{m}\times0.2\ \mathrm{m}$ 线性变化至右端尺寸 $b_\mathrm{N}\times h_\mathrm{N}=0.4\ \mathrm{m}\times0.3\ \mathrm{m}$，弹性模量 $E=2.0\times10^{10}\ \mathrm{N/m^2}$，密度 $\rho=2500\ \mathrm{kg/m^3}$。本文方法计算结果和文献[7,16]计算结果比较列入表 4。由表 4 可知，本文结果在相同的插值点数(N=15)的情况下，方法精度高于文献[7]的计算结果。采用文献[16]的有限差分法，需要对结构划分步长数到达 900。

表 4　两边简支条件下矩形变截面梁振动频率

Tab.4　Vibration frequency of rectangular variable cross section beam simply supported at both ends

频率阶数	本文方法 N=10	本文方法 N=15	本文方法 N=20	本文方法 N=25	SFPM[7] N=15	FDM[16] N=900
1	**11.98**4	11.984	11.984	11.984	11.98	11.98
2	49.113	**49.13**5	49.135	49.135	49.14	49.14
3	111.331	**110.34**4	110.344	110.344	110.36	110.34
4	192.084	195.893	**195.90**7	195.907	195.99	195.90
5	1008.357	305.965	**305.86**4	305.865	306.21	305.86

注：FDM 表示文献[16]的有限差分法。

算例 3　面积和惯性矩同等变化变截面梁自由振动

变截面梁跨度为 L，惯性矩 $\boldsymbol{I}$ 和截面面积分别用函数表示为

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}_0\Psi^2(x),\ A=A_0\Psi^2(x),\ \Psi(x)=(1+\alpha x)^2 \tag{39}$$

式中 α 为非负数，$\boldsymbol{I}_0$ 和 A_0 分别为 $x=0$ 处截面的惯性矩和面积。当 $\alpha=0$ 时，结构为等截面梁。在以下计算中，$A_0=0.04\ \mathrm{m}$，$\boldsymbol{I}_0=1.333\times10^{-4}\ \mathrm{m}$，梁的跨度 $L=4.0\ \mathrm{m}$，弹性模量 $E=2.0\times10^{11}\ \mathrm{Pa}$，密度 $\rho=7800\ \mathrm{kg/m^3}$。本文方法（N=20）、有限元法（单元数为 100）以及解析解[17]的结果比较列入表 5。由表 5 可知，本文解和解析解吻合良好，有限元数值解需要 100 个单元才能达到本文方法精度，进一步说明了本文方法的高精度特点。

表 5　一边固支和一边简支情况下变截面梁无量纲振动频率比较

Tab.5　Comparison of dimensionless vibration frequencies of variable cross section beams with one side fixed and another simply supported

模态阶数	α=0 本文解	α=0 解析解	α=0 FEM	α=1 本文解	α=1 解析解	α=1 FEM	α=2 本文解	α=2 解析解	α=2 FEM
1	15.418	15.418	15.396	12.363	12.3635	—	10.598	10.598	—
2	49.964	49.964	49.732	47.626	47.626	—	46.667	46.667	—
3	104.247	104.248	103.217	102.024	102.02	—	101.173	101.174	—
4	178.269	178.270	175.240	176.104	176.105	—	175.304	175.304	—
5	272.031	272.032	264.995	269.900	269.904	—	269.128	**269.129** *	—
6	385.529	385.533	371.518	383.419	383.423	—	382.666	382.669	—

注：该数据原为 269.136，根据文献[18]结果修正为 269.129。表中有限元解表示求解过程出现数值问题，无法得到解答。

以算例 3 为例，讨论采用本文的边界条件处理方式和传统的直接替代方式对计算结果的影响。表 6 列出了在固支-简支条件下变截面梁（$\alpha=2$）的前六阶频率对比情况，并突出表示了两种方法达到小数点 3 位有效数字的插值点数。由表 6 可知，尽管在点 N=10 时两种处理方式计算的频率精度各有优势，但是随着 N 增大，本文方法可以更快地收敛到精确解。

表 6　不同边界条件处理方式对频率的影响比较

Tab.6　Comparison of the influence of different boundary conditions on frequency

频率阶数	本文方法 N=10	本文方法 N=20	本文方法 N=30	替代法 N=10	替代法 N=20	替代法 N=30
1	10.9589	**10.598**377	10.5983	11.8655	**10.598**434	10.5983
2	43.6305	**46.667**809	46.6678	44.6133	**46.667**701	46.6678
3	112.3615	**101.173**757	101.1737	103.7459	101.17403	**101.173**756
4	168.3670	**175.304**327	175.3043	173.7734	175.3035	**175.304**332
5	921.6496	**269.128**176	269.1281	173.7734	269.1291	**269.128**147
6	2025.8223	382.66651	**382.669**458	316.1286	382.8087	**382.669**458

5　结　论

精确计算变截面梁的自振频率是了解变截面梁的自振特性和进一步进行复杂动力分析的基础。本文采用微分求积法对其控制方程进行离散并求解，采用重采样转换矩阵方法对边界条件进行处理。通过不同算例对本文计算结果与其他方法计算结果进行比较，同时对微分求积法传统处理方法和本文处理方法进行讨论，可以得到如下结论。

（1）由于切比雪夫点多项式插值对于光滑函数具有谱收敛性质，本文方法采用少数插值点即可达到很高的数值精度；对于计算算例，本文方法计算结果精度均高于半解析法、有限点样条方法、有限差分法以及有限元方法计算结果。

（2）截面属性采用和待求函数同样的插值方式，本文方法可以适用于任意截面形式。

（3）本文边界条件处理方法在处理方式上更为自然，在计算上具有更快的收敛能力。

参考文献（References）：

[1]　孙训方，方孝淑，关来泰．材料力学[M]．北京：高等教育出版社，2002.（SUN Xun-fang，FANG Xiao-shu，

Guan Lai-tai. *Mechanics of Materials*[M]. Beijing: Higher Education Press,2002.(in Chinese))
[2] 克拉夫,彭 津.结构动力学[M].北京:高等教育出版社,2006.(Clough R,Penzien J. *Dynamics of Structures*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2003.(in Chinese))
[3] Elishakoff I. *Eigenvalues of Inhomogeneous Structures:Unusual Closed-Form Solutions*[M]. CRC Press, 2005.
[6] Bathe K J. *Finite Element Procedures*[M]. Klaus-Jurgen Bathe,2007.
[7] 刘 鹏,刘红军,林 坤,等.基于样条有限点法的变截面Euler梁横向自由振动分析[J].振动与冲击,2016,**35**(11):66-73.(LIU Peng,LIU Hong-jun,LIN Kun,et al. Free transverse vibration analysis of tapered Bernoulli-Euler beams based on spline finite point method[J]. *Journal of Vibration and Shock*,2016,**35**(11):66-73.(in Chinese))
[8] Shu C. *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*[M]. London:Springer,2000.
[9] Boyd J P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods: Second Revised Edition*[M]. Dover Publications,2013.
[10] 吕朝锋.基于状态空间架构的微分求积法及其应用[D].浙江大学,2006.(LÜ Chao-feng. State-Space-Based Differential Quadrature Method and Its Applications[D]. Zhejiang University,2006.(in Chinese))
[11] Driscoll T A,Hale N. Rectangular spectral collocation[J]. *IMA Journal of Numerical Analysis*,2016,**36**(1):108-132.
[12] Trefethen L N. *Approximation Theory and Approximation Practice*[M]. Society for Industrial and Applied Mathematics,2013.
[13] Golub G H,van Loan C F. *Matrix Computations*[M]. Johns Hopkins University Press,2012.
[14] Fornberg B. A *Practical Guide to Pseudospectral Methods*[M]. Newyork:Cambridge University Press, 1996.
[15] 崔 灿,蒋 晗,李映辉.变截面梁横向振动特性半解析法[J].振动与冲击,2012,**31**(14):85-88.(CUI Can, JIANG Han,LI YING-hui. A semi-analytical method for vibration characteristic of variable cross-section beam [J]. *Journal of Vibration and Shock*,2012,**31**(14): 85-88.(in Chinese))
[16] 钱 波,岳华英.变截面梁横向振动固有频率数值计算[J].力学与实践,2011,**33**(6):45-49.(QIAN Bo, YUE Hua-ying. Numerical Calculation of Natural Frequency of Transverse Vibration of Non-uniform Beams[J]. *Mechanics in Engineering*,2011,**33**(6): 45-49.(in Chinese))
[17] Abrate S. Vibration of non-uniform rods and beams [J]. *Journal of Sound and Vibration*,1995,**185**(4): 703-716.
[18] Wu J S,Hsieh M. Free vibration analysis of a non-uniform beam with multiple point masses[J]. *Structural Engineering and Mechanics*,2000,**9**(5):449-467.

Resampling differential quadrature method for free vibration analysis of Euler beams with variable cross section

XU Wei-min[1,2], HE Shan-jiang[2], WU Xi[*3]
(1. Zhejiang College of Construction,Hangzhou 311231,China;
2. Zhejiang Jianyuan Architectural Design & Urban Planning Institute,Hangzhou 310004,China;
3. Zhejiang University City College,Hangzhou 310015,China)

Abstract:In this paper,the free vibration of Euler beams with variable cross-sections is analyzed by virtue of the resampling differential quadrature method. The discrete scheme of the governing equations of beams of variable cross-sections is derived and the boundary conditions are imposed by the resampling matrix method,and the detailed algorithm for the free vibration problem is established. Several beams with different cross-sections under different boundary conditions are analyzed and compared with the results computed by other methods. Results indicate that the accuracy of the proposed method is high. Moreover,the proposed method has excellent convergence and outperforms other methods compared in this paper. By comparing with the traditional replacing row method,the resampling matrix method has better convergence performance.

Key words:variable sections;free vibration;differential quadrature method;resampling

引用本文/Cite this paper:
徐卫敏,何剡江,吴 熙.变截面欧拉梁自由振动分析的重采样微分求积法[J].计算力学学报,2023,**40**(1):73-78.
XU Wei-min,HE Shan-jiang,WU Xi. Resampling differential quadrature method for free vibration analysis of Euler beams with variable cross section[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*,2023,**40**(1):73-78.